

Corrigé de l'examen du 29 Janvier 2015
Correction de l'exercice 1.

Remarque 1.

- (1) Dans ce corrigé, la théorie de l'interpolation est utilisée pour construire deux fonctions $x \mapsto x(t)$ et $x \mapsto y(t)$ vérifiant les contraintes (11) et (12) et donc une courbe vérifiant la contrainte (23). Cette façon de procéder utilise la théorie de l'interpolation polynomiale, vue en cours, est utilisée, mais il est préférable de passer par les courbes de Bézier (voir point 6 page 10), qui fournissent les mêmes résultats dans le cas particulier étudié. (voir point 6 page 10).
- (2) On peut aussi se passer totalement de la théorie complète de l'interpolation pour déterminer ces fonctions et les déterminer à la main (voir remarque 3 page 3) en se rendant directement à la question 1(c)iii page 3.

Remarque 2. On rappelle les deux types d'interpolations polynomiale vus en cours :

- (1) Interpolation de Lagrange : on se donne $x_0, x_1, \dots, x_n, n + 1$ points deux à deux distincts et f une fonction. On dit que p_n est le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f aux points x_0, x_1, \dots, x_n si et seulement si

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad p_n(x_i) = f(x_i). \quad (1)$$

Ce polynôme est unique et est donné par

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1}). \quad (2)$$

Les différences divisées $f[x_0], f[x_0, x_1], f[x_0, x_1, x_2], \dots, f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ se calculent grâce aux formules

$$f[x_0] = f(x_0), \quad (3a)$$

$$f[x_0, \dots, x_p] = \frac{f[x_1, \dots, x_p] - f[x_0, \dots, x_{p-1}]}{x_p - x_0}. \quad (3b)$$

Pour plus de détails, on pourra consulter [BM03, chapitre 2] et [CM84, chapitre 1].

- (2) Interpolation d'Hermite : les points x_i sont quelconques et ne sont plus nécessairement 2 à 2 distincts. Dans ce cas, le polynôme p_n est encore unique. Mais les équations (1) sont remplacées par

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad p_n^{(r_i-1)}(x_i) = f^{(r_i-1)}(x_i), \quad (4)$$

où r_i est l'entier égal au nombre de fois où le point x_i est présent dans la liste (x_0, \dots, x_n) . L'égalité (3) est toujours valable, mais la relation de récurrence n'est plus valable si $x_0 = x_p$. Dans ce cas, les différences divisées font intervenir des dérivées de f . Enfin, l'égalité (2) est toujours valable.

Pour plus de détails, on pourra consulter l'exercice de TD 2.3, mais aussi [BM03, chapitre 2, exercice corrigé 2.8 p. 56 et p. 247, exercice corrigé 3.2 p. 119 et 260, TP 2.F p. 67] et [CM84, chapitre 1].

Début du corrigé!

(1) (a) On a :

$$f[a] = f(a), \quad (5a)$$

$$f[a, a] = f'(a), \quad (5b)$$

$$f[a, a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)^2} - \frac{f'(a)}{b-a}, \quad (5c)$$

$$f[a, a, b, b] = \frac{f'(a) + f'(b)}{(b-a)^2} + 2\frac{f(a) - f(b)}{(b-a)^3}. \quad (5d)$$

En effet, d'après [BM03, exercice corrigé 2.8 p. 56 et p. 247], on a (puisque $a \neq b$)

$$f[a, a] = f'(a)$$

puis, d'après (3b),

$$f[a, a, b] = \frac{f[a, b] - f'(a)}{b-a},$$

soit

$$f[a, a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)^2} - \frac{f'(a)}{b-a}.$$

De même, on trouve

$$f[a, a, b, b] = \frac{1}{(b-a)^2}((f[b, b] - f[a, b]) - (f[a, b] - f[a, a])),$$

dont on déduit (5d).

Compte tenu de $a = 0$, $b = 1$, les formules (5) se simplifient sous la forme

$$f[0] = f(0), \quad (6a)$$

$$f[0, 0] = f'(0), \quad (6b)$$

$$f[0, 0, 1] = (f(1) - f(0)) - f'(0), \quad (6c)$$

$$f[0, 0, 1, 1] = f'(0) + f'(1) + 2(f(0) - f(1)). \quad (6d)$$

On alors, d'après (2),

$$p_3(t) = f(0) + f'(0)t + [f(1) - f(0) - f'(0)]t^2 + [f'(0) + f'(1) + 2(f(0) - f(1))]t^2(t-1), \quad (7)$$

que l'on pouvait laisser sous cette forme.

(b) On sait que, d'après (4),

$$p_3(0) = f(0), \quad (8a)$$

$$p'_3(0) = f'(0), \quad (8b)$$

$$p_3(1) = f(1), \quad (8c)$$

$$p'_3(1) = f'(1) \quad (8d)$$

(c) (i) Remplaçons dans (7), $f(0)$, $f'(0)$, $f(1)$ et $f'(1)$, respectivement par 0, 0, 1/2 et 1. On obtient alors

$$x(t) = 1/2 t^2. \quad (9)$$

(ii) On obtient de même en remplaçant dans (7), $f(0)$, $f'(0)$, $f(1)$ et $f'(1)$, respectivement par $-1/2$, 1, 1/2 et 1

$$y(t) = t - 1/2. \quad (10)$$

(iii) D'après (8), on a

$$x(0) = 0, \quad (11a)$$

$$x'(0) = 0, \quad (11b)$$

$$x(1) = 1/2, \quad (11c)$$

$$x'(1) = 1 \quad (11d)$$

et

$$y(0) = -1/2, \quad (12a)$$

$$y'(0) = 1, \quad (12b)$$

$$y(1) = 1/2, \quad (12c)$$

$$y'(1) = 1 \quad (12d)$$

Remarque 3. On peut déterminer, à la main, les deux fonctions $x \mapsto x(t)$ et $x \mapsto y(t)$ vérifiant les contraintes (11) et (12).

Soient $f = (f_0, f_1, f_2, f_3) \in \mathbb{R}^4$. Puisque l'on a 4 égalités, on cherche un polynôme p_3 , de degré 3, sous la forme

$$p_3(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$$

vérifiant (avec $a = 0$ et $b = 1$)

$$p_3(a) = f_0, \quad (13a)$$

$$p_3'(b) = f_1, \quad (13b)$$

$$p_3(b) = f_2, \quad (13c)$$

$$p_3'(b) = f_3. \quad (13d)$$

Les équations (13) sont équivalentes au système linéaire

$$BX = {}^t f \quad (14)$$

où $X = {}^t(a_0, a_1, a_2, a_3)$ et

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

La résolution du système (14) dans le cas particulier

$${}^t f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

fournit

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

et donc

$$p_3(t) = \frac{t^2}{2}. \quad (18)$$

La résolution du système (14) dans le cas particulier

$${}^t f = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

fournit

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

et donc

$$p_3(t) = t - \frac{1}{2}. \quad (21)$$

(2) En éliminant t entre x et y définis par (9) et (10), on a

$$x = \frac{1}{2} \left(y + \frac{1}{2} \right)^2. \quad (22)$$

Puisque que t décrit l'intervalle $[a, b]$ où $a = 0$, $b = 1$, alors y défini par (10) décrit l'intervalle $[-1/2, 1/2]$; x décrit alors $[0, 1/2]$.

(3) C'est une parabole! D'après (11) et (12), le cours sur les courbes paramétrées (voir par exemple [Bas07]) nous dit que cette parabole passe par les points $A(0, -1/2)$ et $B(1/2, 1/2)$ et que ses tangentes sont portées respectivement en ces points par les vecteurs de coordonnées $(0, 1)$ et $(1, 1)$, ce qu'une étude directe à partir de (22) aurait pu nous montrer!

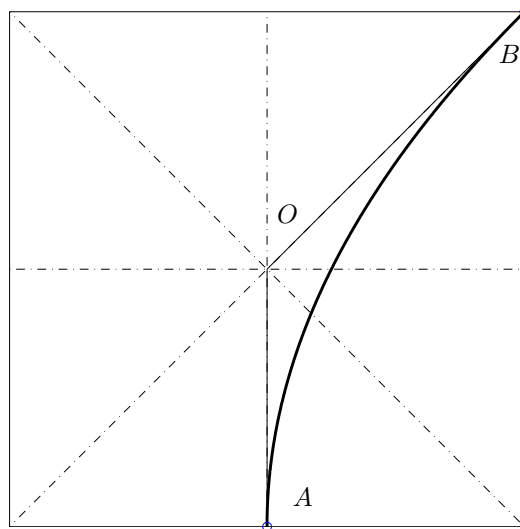


FIGURE 1. La parabole obtenue

Voir figure 1.

(4) *Question facultative*

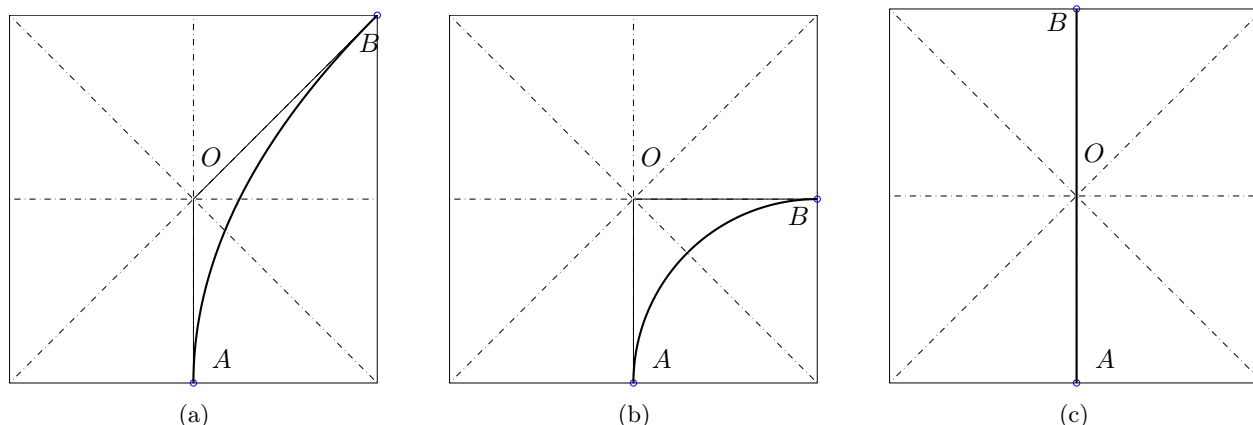


FIGURE 2. La trois figures complétées

- (a) La parabole est aussi représentée sur la figure 2(a) (qui est identique à la figure 1 page précédente). D'après ce que l'on a montré, la parabole passe par les points A et B et est tangente aux droites (OA) et (OB) , où O est le centre du carré, puisque (OA) passe par A et est portée par le vecteur $(0, 1)$ et que (OB) passe par B et est portée par le vecteur $(1, 1)$.
- (b) Pour la figure 1(b) de l'énoncé, on cherche une courbe simple incluse dans le carré tracé, partant chacune du point A , arrivant en B , tangente en A à la droite (OA) et en B à la droite (OB) , où O est le centre du carré. Il suffit de tracer le quart de cercle de rayon $1/2$ et de centre le point $(1/2, -1/2)$. L'origine est placée en O . Voir la figure 2(b).
Enfin, pour la figure 1(c) de l'énoncé, il suffisait de tracer le segment $[AB]$! Voir la figure 2(c).
- (c) Nous avons donc construit 3 courbes partant chacune du point A , arrivant en B , tangente en A à la droite (OA) et en B à la droite (OB) , où O est le centre du carré. En déplaçant ses courbes (c'est-à-dire en leur appliquant des isométries du plan) et en utilisant successivement pour chacun des huit carrés :
- une parabole
 - un arc de cercle
 - deux paraboles
 - un segment de droite
 - deux arcs de cercle
 - et finalement une parabole
- on pouvait donc construire la courbe demandée dans l'énoncé. Chacun des points A_i et A_{i+1} (A_1 pour le dernier carré) joue successivement les rôles de A et de B .
Voir la figure 3 page suivante.
- (d) Dans chacun des carrés de centre O_i , pour $1 \leq i \leq 8$, la courbe part du point A_i , arrive en A_{i+1} , tangente en A_i à la droite $(O_i A_i)$ et en A_{i+1} à la droite $(O_i A_{i+1})$. Or, il s'avère que chacun des points A_i est un point commun à deux carrés successifs (en étant un sommet ou un milieu de côté). La courbe ainsi construite, constituée des 8 portions inscrites dans un carré, est donc continue! De plus, les droites successives $(A_i O_i)$ et $(A_{i+1} O_i)$ sont confondues et la courbe ainsi construite a deux demi-tangentes de chaque côté portées chacune par ces deux droites. Les deux demi-tangentes sont donc confondues et, en A_i , la courbe est donc de classe \mathcal{C}^1 . Par ailleurs, à l'intérieur de chacun des carrés, les huit portions de courbes (constituées de parabole, de cercle et de droites) sont de classe \mathcal{C}^1 et donc la totalité de courbe ainsi construite est de classe \mathcal{C}^1 !

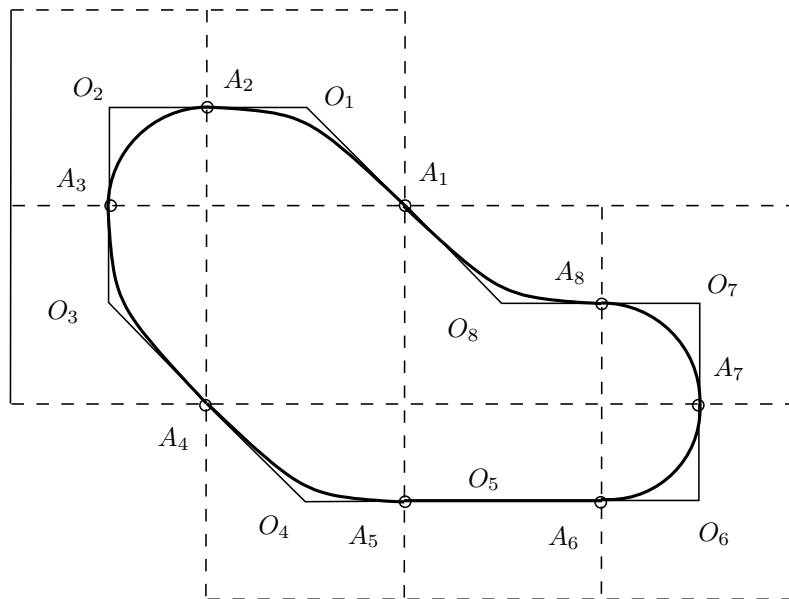


FIGURE 3. La figure complétée

On a donc réussi à construire une courbe qui se « reboucle sur elle-même » (c'est-à-dire de façon continue et dérivable), et ce, sans plan défini à l'avance, même si celui-ci était représenté sur votre copie ! Il s'agit en fait de trouver un moyen de construire des courbes C^1 , avec un nombre fini de formes, en utilisant un pavage du plan par des carrés, ce qui sera utilisé dans un jouet de circuit de trains ou de voiture. Voir point 1.

Remarque 4. Justifions maintenant, dans cette remarque finale, *hors-sujet*, l'intérêt de la construction de la courbe et expliquons pourquoi cette idée a été à l'origine d'un brevet, déposé en 2012 et délivré en 2014.

Pour plus de détails, on pourra consulter : [bre ; pct] ainsi que l'url suivantes où un certain nombre de photos de circuits réalisés sont montrées :

http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/detail_brevet_rails.html

ou à la fiche faite par Pulsalys, disponible sur

<http://www.pulsalys.fr/entreprise/offres-technologies/11025-easy-loop-5-rails-circuits-miniatures-toujours-refermables/>

- (1) Il existe aujourd'hui des circuits formés d'un très grand nombre de pièces différentes, c'est-à-dire supérieur à dix. Ce grand nombre de pièces est intéressant car il permet de fabriquer un grand nombre de circuits différents à partir du même ensemble de pièces. En revanche, à cause de ce grand nombre de pièces différentes, il existe aussi un grand nombre de situations où il n'est pas possible de raccorder simplement les deux extrémités du circuit pour le refermer sur lui-même. Dans certains cas, cela n'est tout simplement pas possible. Pour remédier à cet inconvénient, l'une des solutions consiste à rajouter des pièces de guidage supplémentaires, permettant de raccorder les extrémités du circuit qui, auparavant, n'étaient pas raccordables. Cela conduit donc à augmenter le nombre de pièces différentes et crée de nouvelles situations où il n'est pas possible de raccorder les deux extrémités du circuit.

A l'opposé, il existe des circuits formés de très peu de pièces différentes. Le nombre de circuits fermés réalisables avec un ensemble donné de ces pièces est alors très faible. Par exemple, il n'existe souvent qu'une seule combinaison des pièces de cet ensemble permettant de refermer le circuit sur lui-même.

L'invention vise à pallier au moins l'un de ces inconvénients en proposant un circuit ou un ensemble de pièces de guidage qui :

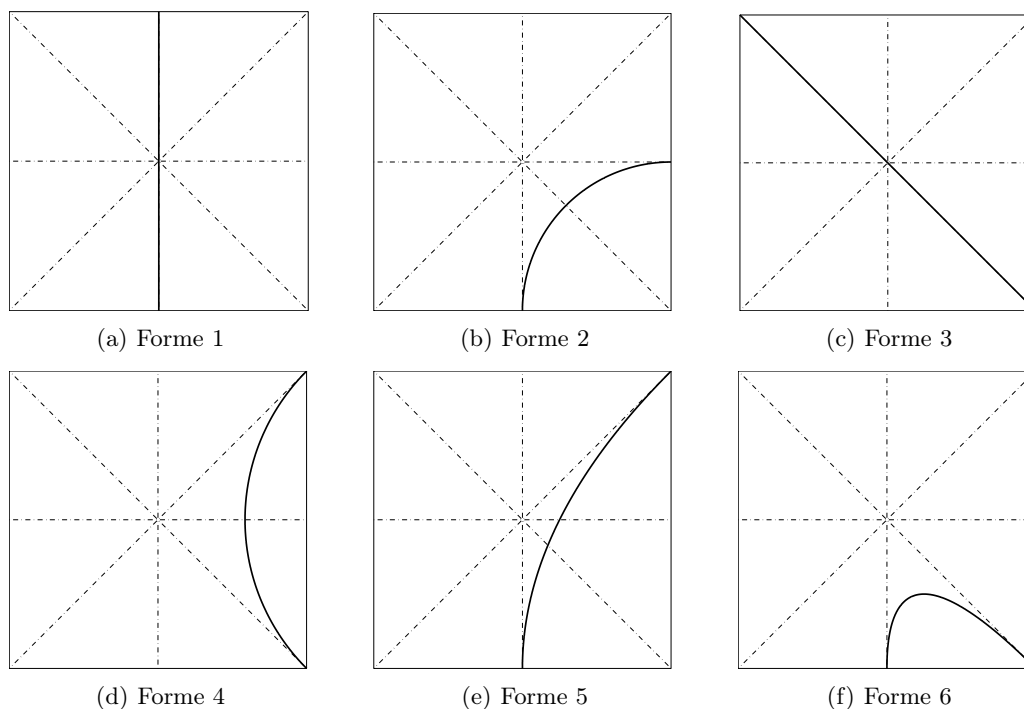


FIGURE 4. Les six formes de base.

- permet la réalisation d’un grand nombre de circuits fermés à partir du même ensemble de pièces,
- utilise un minimum de pièces de guidage différentes,
- garantit qu’il est toujours possible de refermer simplement le circuit sur lui-même.

Typiquement, l’invention concerne le domaine des circuits de trains pour enfants. Elle peut concerner également le domaine des circuits de petites voitures ou similaires.

- (2) Les 3 courbes présentées en figure 2 font partie d’un ensemble de 6 courbes particulières qui vérifient toutes la propriété habituelle :

« partir du point A , arriver en B , en étant tangente

$$\text{en } A \text{ à la droite } (OA) \text{ et en } B \text{ à la droite } (OB) \text{ »} \quad (23)$$

les points A et B étant, plus généralement, l’un quelconque des l’un des huit points de l’ensemble constitués des 4 sommets d’un carré et des 4 milieux de ses côtés et O est le centre du carré.

Ces courbes sont les suivantes (L désigne la longueur du côté, choisie égale à 1, ici) :

- La courbe 1 : segment de longueur L ;
- La courbe 2 : quart de cercle de rayon $L/2$;
- La courbe 3 : segment de longueur $\sqrt{2}L$;
- La courbe 4 : quart de cercle de rayon $(\sqrt{2}/2)L$;
- la courbe 5 : parabole (courbe de Bézier de degré 2).
- la courbe 6 : courbe de Bézier de degré 2.

Sur la figure 4(a), les six courbes de base ont été tracées (L est la longueur du côté du carré, choisie égale à 1, ici). Nous reviendrons sur la courbe 5 et 6. Vous reconnaissez les courbe 1, 2 et 5, vues dans cet exercice !

- (3) Il est en fait inutile de construire toutes les courbes possibles !

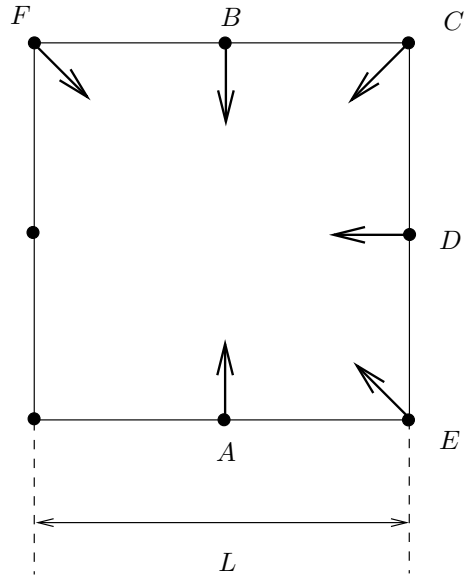
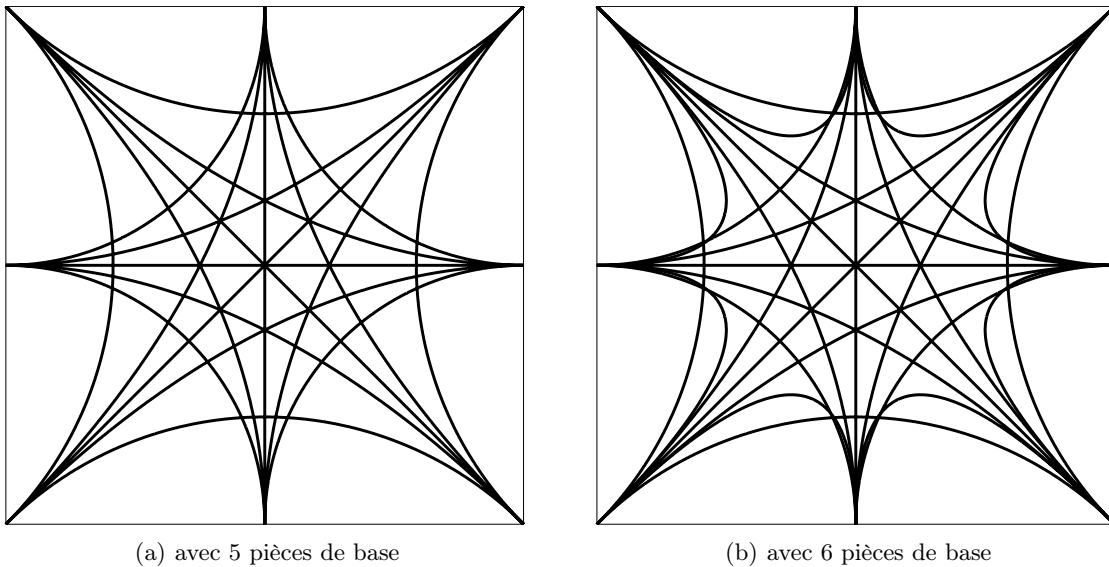
FIGURE 5. Le carré de côté L .

FIGURE 6. Ensemble des trajets possibles.

L'idée générale est de s'appuyer sur un pavage simple du plan, par celui du carré et de trouver les formes de pièces qui permettent de (voir figure 5) de relier le point A à chacun des points (B , C , D et E) et, de même, de relier E à A , B , C , D et F . Les autres liaisons ne sont pas considérées à cause des symétries et de rotations laissant le carré invariant. Notons que le nombre total de liaisons envisagées est de $C_8^2 = 28$ pour si chacun des points est relié aux autres ou $8 \times 5/2 = 20$ si chacun des points est relié aux autres sauf à ses deux voisins les plus proches. Sur la figure 6, ont été représentés l'ensemble des 28 ou 20 trajets possibles, selon que l'on prenne les 5 pièces de base (de 1 à 5) ou les 6 pièces de base (de 1 à 6).

(4) (a)

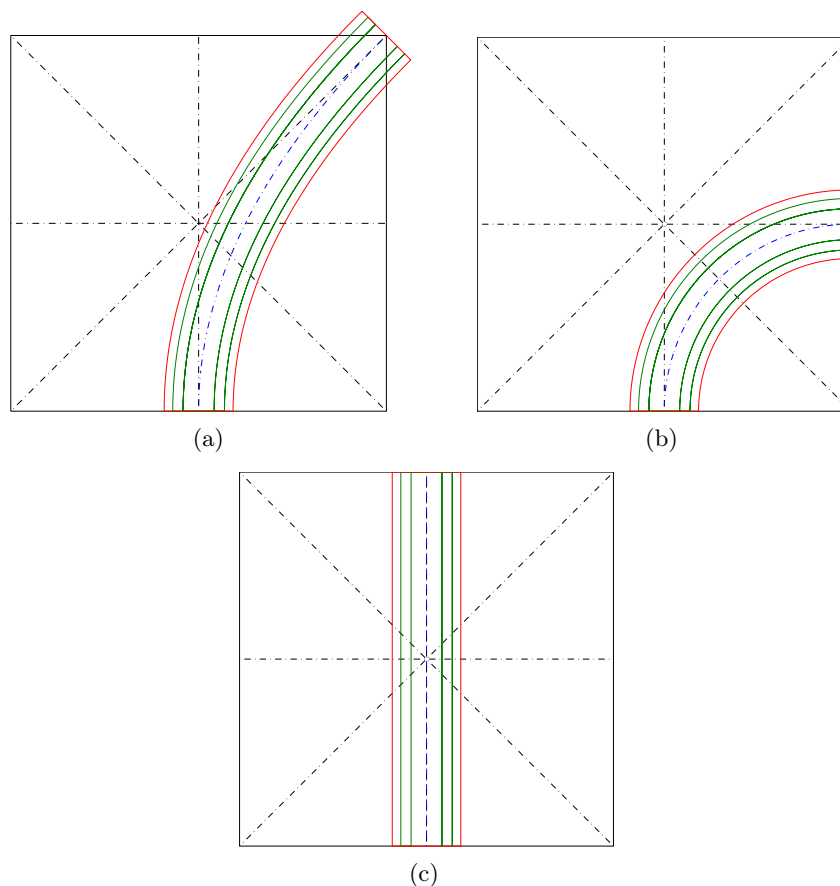


FIGURE 7. La trois figures complétées avec les pièces totales

Pour chacune des courbes ainsi construites, on a ensuite défini deux passages et deux bords, ces deux passages, qui seront construits en creux, permettent de faire circuler un véhicule miniature, comme le montre la figure 7. Le côté L a été choisi égal à 1 dans cet exercice, puisque l'on peut travailler en multipliant toutes les longueurs par la vraie dimension du côté, choisie égale à

$$L = 21.8 \text{ cm} \quad (24)$$

(b)

À partir des 3 modèles 2D de la figure 7, les modèles 3D ont ensuite été réalisés sous Catia par des étudiants de l'INSA de Lyon, du département Génie Mécanique et conception (voir figure 8 page suivante).

(c)

Enfin, des prototypes en bois, de cotations similaires aux rails Brio[®], ont été réalisées¹ par l'entreprise AS'Bois à Saint-Julien sur Suran (Jura, <http://www.as-bois.fr>). Voir figure 9 page 11.

(5) En fait, sur les 6 courbes présentées en figure 4(f), 5 prototypes en bois ont été réalisés, correspondant aux pièces 1 à 5, la pièce 6 (voir figure 4(f) page 7) n'a pas été réalisée puisque le rayon de courbure est trop faible.

1. en bois massif certifié PEFC à 100 %.

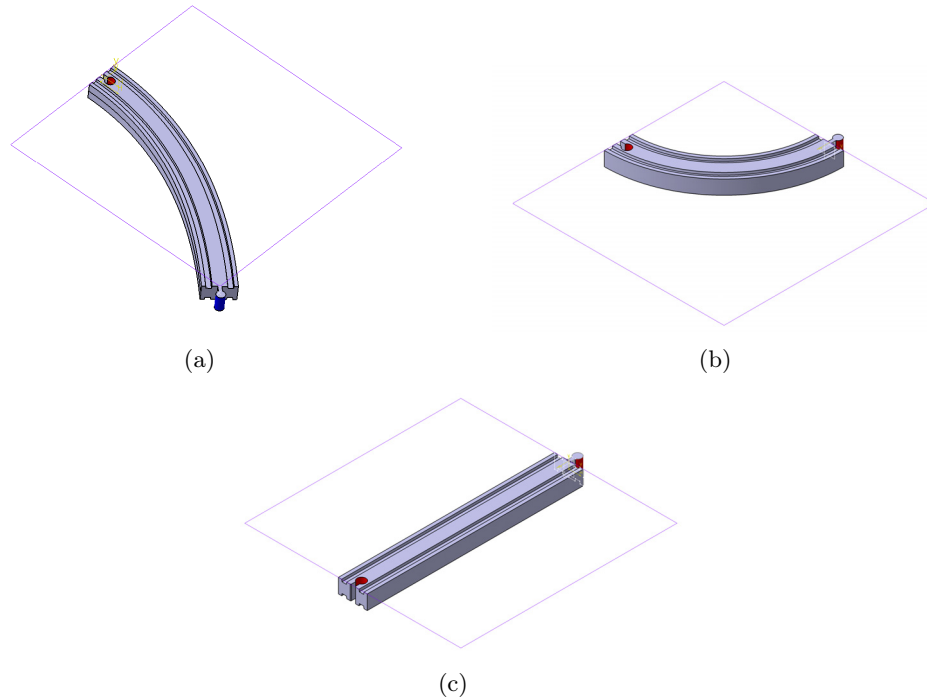


FIGURE 8. Les modèles 3D réalisés sous Catia par des étudiants de l'INSA de Lyon, du département Génie Mécanique et conception

Pour plus de détails sur l'ensemble des 5 pièces, on renvoie à http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/detail_brevet_rails.html

(6)

La pièce 5 est définie à partir d'une parabole que vous avez déterminée (en principe!) grâce aux fonctions splines. On aurait pu la chercher directement sous la forme d'une parabole, mais il n'était pas évident *a priori* qu'une telle parabole puisse obéir aux contraintes définies par (23).

Il est en fait beaucoup plus adapté d'utiliser les courbes de Bézier (voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Courbe_de_Bézier ou [HM13]). Définie par $n + 1$ points de contrôle du plan, P_0 à P_n elle part de P_0 et finit à P_n . Le vecteur $\overrightarrow{P_0P_1}$ est tangent à la courbe en P_0 et le vecteur $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ est tangent à la courbe en P_n . Enfin, elle est incluse dans l'enveloppe convexe des points P_i .

Nous nous sommes contentés d'une courbe de Bézier d'ordre $n = 2$, définie par trois points de contrôle P_0 , P_1 et P_2 , passant par P_0 et P_2 , dont les dérivées en ces points sont portées par $\overrightarrow{P_0P_1}$ et $\overrightarrow{P_1P_2}$. Voir figure 10(a). L'équation de cette courbe est donnée par

$$\forall t \in [0, 1], \quad P(t) = (1 - t)^2 P_0 + 2t(1 - t) P_1 + t^2 P_2. \quad (25)$$

On retrouve grâce à cette courbe, les courbes 5 et 6 (voir figures 10(b) et 10(c)). D'autres variantes de circuits sont aussi proposées dans le brevet [bre; pct] à partir de cette courbe de Bézier de degré 2.

(7)

Pour conclure, nous présentons en figure 11 page 12 le petit circuit demandé dans la question 4c de l'énoncé, avec le plan total et la photo associée.

Naturellement, des circuits beaucoup plus grand peuvent être réalisés. On renvoie pour des plans et des photos à

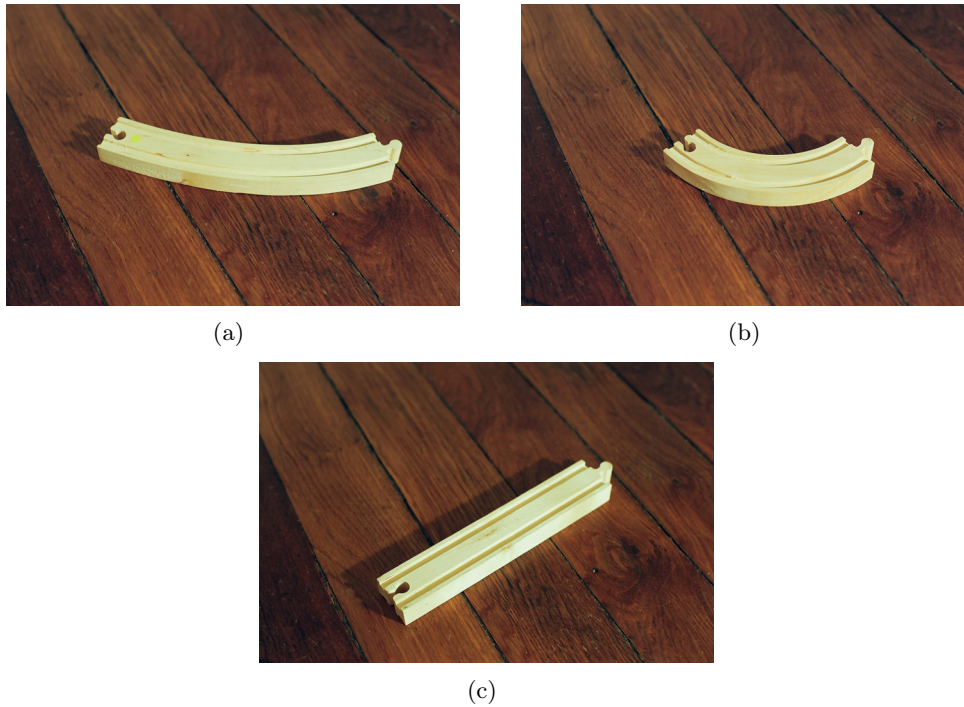


FIGURE 9. Trois des six prototypes réalisés par AS' Bois

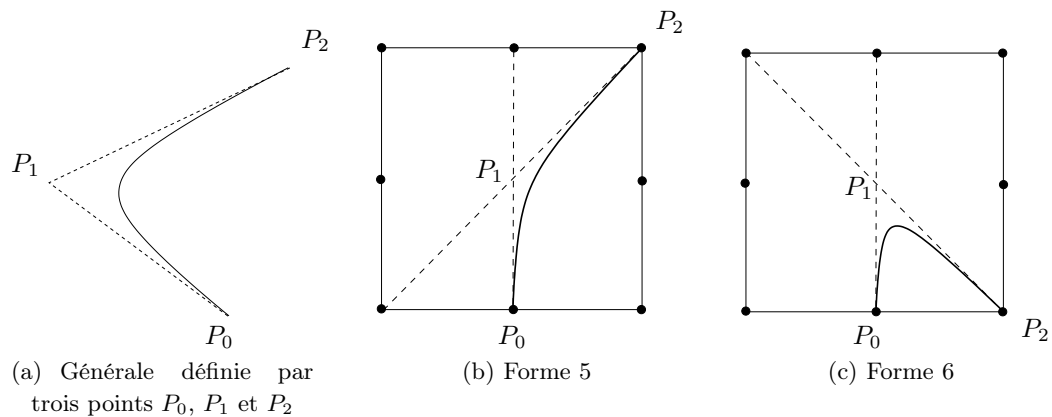
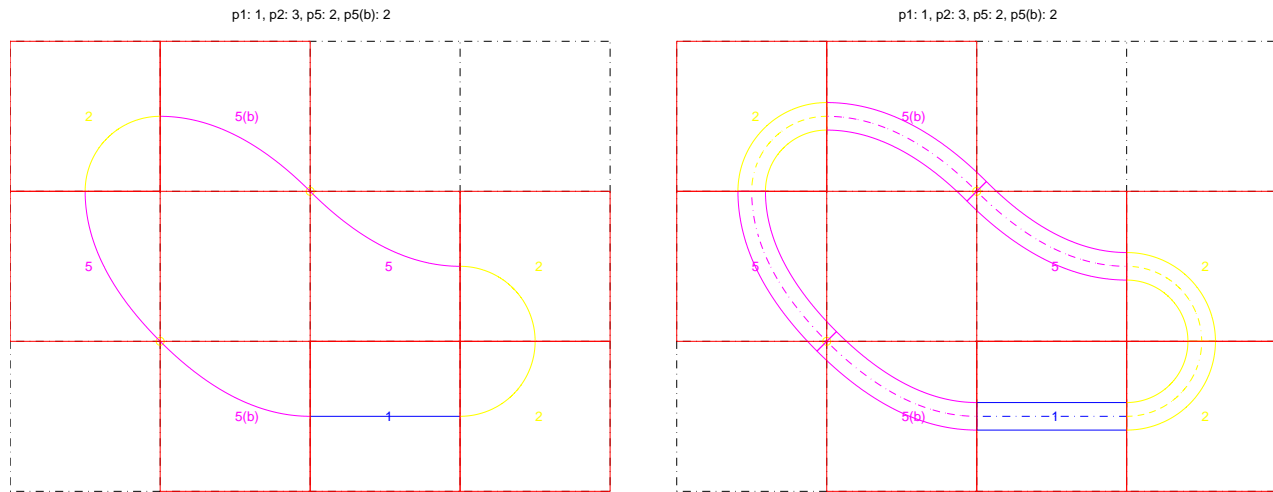


FIGURE 10. Courbes de Bézier de degré 2.

http://utbmjb.chez-alice.fr/recherche/brevet_rail/detail_brevet_rails.html

- (8) Un exposé, sous forme ludique, sera présenté dans le « Forum mathématiques vivantes, de l'école au monde », le 21 Mars à Lyon. Cette année le thème choisi est « les mathématiques nous transportent » ! Plus d'info sur <http://www.cfem.asso.fr/actualites/forum-mathematiques-vivantes>.



(a) : plan avec ligne moyenne seule

(b) : plan avec pièces complètes



(c) : photo

FIGURE 11. Le circuit réalisé , à partir de 3 parmi les 5 types de pièces du brevet.

Correction de l'exercice 2.

(1) En notant

$$I = \int_A^B p(x) dx,$$

on obtient respectivement pour la méthode du point milieu :

$$I \approx 6.68055556,$$

pour la méthode des trapèzes :

$$I \approx 6.88888889,$$

pour la méthode de Simpson :

$$I \approx 6.75000000.$$

(2) La valeur exacte est égale à

$$I = 6.75000000,$$

ce qui donne les erreurs suivantes : pour la méthode du point milieu :

$$E = 6.9443 \cdot 10^{-2},$$

pour la méthode des trapèzes :

$$E = 1.3889 \cdot 10^{-1},$$

pour la méthode de Simpson :

$$E = 0.$$

(3) Les deux premières erreurs sont similaires (la deuxième étant plus grande que la première), ce qui est normal car elles correspondent à une méthode d'ordre 2. La dernière erreur est nulle. Pour la méthode de Simpson, on remplace la fonction par son interpolée de degré 2; ici, son interpolée devrait être différente de la fonction, qui est polynomiale de degré 3. Rappelons-nous cependant que le point du milieu « compte double » : l'intégration se comporte comme avec 4 et non 3 points d'interpolation. Cela est confirmée par l'expression de l'erreur d'intégration composite qui est la somme des erreurs d'intégration élémentaire, chacune étant du type :

$$E = -\frac{(b-a)^5}{2880} p^{(4)}(\eta),$$

qui sont toutes nulles, puisque p est de degré 3.

Correction de l'exercice 3.

(1) La dérivée de la fonction $F : \xi \mapsto \xi - 1/2 \cos(\xi)$ est égale à $\xi \mapsto 1 - (-1/2 \sin(\xi))$ qui est strictement positive sur \mathbb{R} . La fonction F est donc strictement croissante sur \mathbb{R} . De plus,

$$\begin{aligned} F(0) &= -1/2 < 0, \\ F(1/2 \pi) &= 1/2 \pi > 0 \end{aligned}$$

Puisque F est continue, elle donc réalise une bijection de $I = [0, 1/2 \pi]$ sur $[-1/2, 1/2 \pi]$. Ainsi, l'équation (4) de l'énoncé n'a donc qu'une seule racine r sur I . Cette racine est même à l'intérieur de I .

- (2) La dérivée de la fonction g du point fixe vaut $-1/2 \sin(\xi)$ qui est majorée en valeur absolue par $1/2 < 1$. On a donc

$$\forall \xi \in I, \quad |g'(\xi)| \leq \frac{1}{2}. \quad (26)$$

De plus g envoie I dans $[0, 1/2]$, intervalle inclus dans I , soit

$$g(I) \subset I. \quad (27)$$

D'après le cours, la méthode du point fixe converge vers la racine r pour n'importe quel point d'initialisation $\xi^{(0)} \in I$.

Remarque 5. Le résultat du cours prévoit aussi dans ce cas que la solution du point fixe existe et est unique et l'on aurait pu se passer de la question 1 !

La fonction $-1/2 \sin(\xi)$ est strictement négative et en valeur absolue strictement inférieure à 1 sur $]0, 1/2 \pi[$. D'après question 1 (qui est donc utile finalement !), la racine r est dans cet intervalle. On a donc $|g'(r)| < 1$ et $g'(r) \neq 0$ et d'après le cours, l'ordre de convergence est 1.

- (3)

n	0	1	$1/4 \pi$	$1/2 \pi$
0	0.000000000	1.000000000	0.785398163	1.570796327
1	0.500000000	0.270151153	0.353553391	0.000000000
2	0.438791281	0.481865284	0.469074168	0.500000000

TABLE 1. Les premiers itérés ξ_n pour différentes valeurs de ξ_0

Voir le tableau 1 qui donne les *deux* premiers itérés générés par cette méthode, selon plusieurs point d'initialisation.

- (4) Soit $k \in \mathbb{N}$. On applique la méthode proposée par exemple dans [BM03, p.149-150] : on applique le théorème des accroissements finis à la fonction g sur l'intervalle $J = [\xi_k, r]$ ou $J = [r, \xi_k]$, ce qui est légitime. En effet, d'après (27), ξ_k appartient à I . On a donc

$$|g(\xi_k) - g(r)| = |g'(\xi)| |\xi_k - r|,$$

où $\xi \in J \subset I$. D'après (26), il vient donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |\xi_{k+1} - r| \leq C |\xi_k - r|, \quad (28)$$

où

$$C = \frac{1}{2}. \quad (29)$$

Par une récurrence immédiate, on vérifie que (30) implique

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |\xi_k - r| \leq C^k |\xi_0 - r|. \quad (30)$$

Dans le cas où on choisirait $\xi^{(0)} = 1/4 \pi$, on a $|\xi_0 - r| \leq 1/4 \pi$ et donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |\xi_k - r| \leq DC^k. \quad (31)$$

où

$$D = 1/4 \pi. \quad (32)$$

Pour avoir une erreur d'au plus ε , c'est-à-dire

$$|\xi_k - r| \leq \varepsilon, \quad (33)$$

il suffit donc que

$$DC^k \leq \varepsilon.$$

En prenant, le logarithme, on constate que c'est équivalent à (attention, à $\ln(C) < 0$)

$$k \geq \frac{\ln(\varepsilon/D)}{\ln C}. \quad (34)$$

Numériquement, on a donc

$$k = 20. \quad (35)$$

On peut obtenir une valeur de r en tapant par exemple

```
[xvect , xdif , fx , nit]=fixepoint (pi/4,1e-10,1000,@(x)cos(x)/2);
rexa=fzero(@(xi) xi-1/2*cos(xi),xvect(end));
```

ou

```
rexa=fzero(@(xi) xi-1/2*cos(xi),0);
```

voire

```
rexa=fzero(@(xi) xi-1/2*cos(xi),[0,pi/2]);
```

On obtient

$$r \approx 0.45018361129. \quad (36)$$

On peut calculer ξ_{20} en tapant

```
[xvect , xdif , fx , nit]=fixepoint (pi/4,0,20,@(x)cos(x)/2);
```

On obtient

$$\xi_{20} = 0.45018361129. \quad (37)$$

Si on calcule, $|\xi_{20} - r|$, on obtient donc,

$$|\xi_{20} - r| = 2.2926 \cdot 10^{-14}, \quad (38)$$

et on vérifie *a posteriori* que (33) a lieu.

Correction de l'exercice 4.

(1) On part de la condition initiale donnée. On obtient numériquement pour $t = 0.20$

$$u_1 = 0.8720000000,$$

puis pour $t = 0.40$

$$u_2 = 0.8635328000.$$

On peut comparer ces valeurs aux valeurs exactes (voir remarque 6 page suivante). On obtient numériquement pour $t = 0.20$

$$y(t_1) = y(h) = 0.8712440900,$$

puis pour $t = 0.40$

$$y(t_2) = y(2h) = 0.8625655999.$$

(2) En passant de la première à la seconde ligne du tableau, on constate que le pas h est multiplié par

$$\frac{0.250}{0.125} = 2.000. \quad (39)$$

Pour la méthode 1, l'erreur correspondante est multipliée par

$$\frac{2.9821 \cdot 10^{-3}}{8.2288 \cdot 10^{-4}} = 3.624 \approx 4 = 2.000^2. \quad (40)$$

Pour la méthode 2, l'erreur correspondante est multipliée par

$$\frac{4.5557 \cdot 10^{-1}}{2.4215 \cdot 10^{-1}} = 1.881 \approx 2 = 2.000^1. \quad (41)$$

En comparant (39), (40) et (41), on constate donc que la méthode 1 est d'ordre 2 et que la méthode 2 est d'ordre 1. Or, on sait que la méthode d'Euler est d'ordre 1 tandis que celle de d'Euler modifiée est d'ordre 2. C'est donc la colonne 1 qui correspond à la méthode d'Euler modifiée.

Remarque 6. Notons que la solution exacte de l'équation différentielle (5) de l'énoncé est donnée par

$$y(t) = \left(-1/2 e^{-t^2+t} + 1/4 \sqrt{\pi} e^{1/4} \operatorname{erf}(t - 1/2) + 3/2 + 1/4 \sqrt{\pi} e^{1/4} \operatorname{erf}(1/2) \right) e^{t(t-1)},$$

où la fonction erf est donnée par

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt,$$

et est connue sous matlab (voir la fonction erf).

Correction de l'exercice 5.

La résolution de $Ax = b$ fournit finalement

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Références

- [Bas07] J. BASTIEN. *Applications de l'algèbre et de l'analyse à la géométrie*. Notes de cours de l'UV MT25 de l'UTBM, disponible sur le web : <http://utbmjb.cher-alice.fr/UTBM/index.html>, rubrique MT25. 2007. 180 pages.
- [BM03] J. BASTIEN et J.-N. MARTIN. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4 ième étage). Paris : Dunod, 2003. 392 pages.
- [bre] J. BASTIEN. "Circuit apte à guider un véhicule miniature". Brevet 12 54413. UNIVERSITÉ LYON I. Brevet publié sur le site de l'INPI http://fr.espacenet.com/publicationDetails/biblio?FT=D&date=20131122&DB=fr.espacenet.com&locale=fr_FR&CC=FR&NR=2990627A1&KC=A1 Voir aussi [pct]. 15 mai 2012.
- [CM84] M. CROUZEIX et A. L. MIGNOT. *Analyse numérique des équations différentielles*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1984, pages viii+171.
- [HM13] F. HOLWECK et J.-N. MARTIN. *Géométries pour l'ingénieur*. Paris : Ellipses, 2013.
- [pct] J. BASTIEN. "Circuit suitable for guiding a miniature vehicle [Circuit apte à guider un véhicule miniature]". Brevet PCT/EP2013/059836. UNIVERSITÉ LYON I. Demande internationale publiée en vertu du traité de coopération en matière de brevets (PCT). Voir http://fr.espacenet.com/publicationDetails/biblio?CC=WO&NR=2013171170A1&KC=A1&FT=D&date=20131121&DB=fr.espacenet.com&locale=fr_FR. 13 mai 2013.