Mécanique 3A MNB Automne 2015

Corrigé de l'examen du 25 Janvier 2016

Correction de l'exercice 1.

Voir [BM03, Correction de l'exercice 3.3 p. 119].

Attention, à l'erreur présente p. 263 : remplacer les équations (6.81) et la précédente par : ... il vient

$$p_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12.$$

On en déduit donc

$$f^{(4)}(x) = 4\left(4x^4 - 12x^2 + 3\right)e^{-x^2}. \tag{1}$$

Correction de l'exercice 2.

(1) La dérivée $f'(x) = 1 - \tanh^2(x - \pi)$ est toujours positive puisque la fonction tanh est bornée par -1 et 1. Ainsi, la fonction $f(x)$ est monotone et croissante, donc sa racine r est unique.

(2) En appliquant la formule de Newton-Raphson :

$$x_{k+1} = xk - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad \epsilon_k = |x_k - r|$$

on obtient :

n	x_k	ϵ_k
1	4.17422049296	0.0266783314467
2	4.20035235808	0.000546466334082
3	4.20089858998	$2.34428080503e-07$

(3) D'après le tableau précédent, on observe que l'erreur varie comme $\epsilon_{k+1} \approx C\epsilon_k^2$, donc le schéma est d'ordre 2, ce qui correspond bien à la converge quadratique obtenu théoriquement.

(4) Dans le cas où la dérivée f' tend vers 0, la méthode de Newton- Raphson précédente mène à une divergence. Par exemple, en prenant la condition initiale $x_0 = 10$, on a $f'(x_0) \approx 4.10^{-6}$ et donc $x_1 \approx 5.10^5$. En ce nouveau point x_1, la valeur de la dérivée est inférieure à n'importe quelle précision machine et le schéma diverge.

Correction de l'exercice 3.

(1) On réécrit l'équation à résoudre sous la forme :

$$y''(t) = -\alpha y'(t) - \omega^2 y(t)$$

En effectuant le changement de variable suivant :

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

l'équation à résoudre prend alors la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(t) \\ -\alpha v(t) - \omega^2 u(t) \end{pmatrix}$$

qui est un système de deux équations différentielles du premier ordre.

(2) Le système précédent peut se réécrire sous la forme matricelle :

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

(3) (a) En appliquant la méthode d'Euler au système précédent, on obtient :

$$\begin{pmatrix} u^{n+1} \\ v^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^n \\ v^n \end{pmatrix} + \delta t \begin{pmatrix} v^n \\ -\alpha v^n - \omega^2 u^n \end{pmatrix}$$

(b) Ce schéma est explicite, il est donc soumis à une condition de stabilité. D'après la question précédente, on a

$$v^{n+1} = v^n + \delta t(-\alpha v^n - \omega^2 u^n)$$

avec

$$u^n \propto dt v^n$$

ce qui donne :

$$v^{n+1} = v^n - \delta t(\alpha + \omega^2 \delta t)v^n = (1 - \delta t(\alpha + \omega^2 \delta t))v^n$$

La condition de stabilité s'écrit donc :

$$|1 - \delta t(\alpha + \omega^2 \delta t)| < 1$$

ou encore

$$\delta t(\alpha + \omega^2 \delta t) < 2$$

(c) On les calcule les itérés suivants :

n	u_k	v_k
1	1.	-0.25
2	0.9975	-0.4975
3	0.992525	-0.7419

(4) (a) On réécrit le problème discrétisé suivant la méthode d'Euler rétrograde :

$$\begin{pmatrix} u^{n+1} \\ v^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^n \\ v^n \end{pmatrix} + \delta t \begin{pmatrix} v^{n+1} \\ -\alpha v^{n+1} - \omega^2 u^{n+1} \end{pmatrix}$$

que l'on peut réécrire matriciellement comme :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\delta t \\ \delta t \omega^2 & 1 + \alpha \delta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{n+1} \\ v^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^n \\ v^n \end{pmatrix}$$

(b) La matrice C s'écrit alors $C = Id - dtA$ avec Id la matrice identité et A la matrice définie à la question 1. Ce schéma est implicite et donc théoriquement inconditionnellement stable. Par un raisonnement similaire à la question 3b, on obtient :

$$\frac{1}{|1 + \delta t(\alpha + \omega^2 \delta t)|} < 1$$

qui est vérifié quel que soit δt dès lors que $\alpha > 0$.

(c) La matrice C étant de petite taille, on privilégiera ici une méthode directe plutôt qu'une méthode itérative. De plus, une méthode itérative de type Jacobi ou Gauss-Seidel nécessite que la matrice soit à diagonnale dominante, ce qui impliquerait une condition de similaire à celle de la question 3b malgré le fait que le schéma soit implicite.

Références

[BM03] J. Bastien et J.-N. Martin. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4 ième étage). Paris : Dunod, 2003. 392 pages.