Mécanique 3A MNB — Automne 2016

Corrigé de l'examen du 24 Janvier 2017

Correction de l'exercice 1.

(1) On interpole la fonction f donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt, \tag{1}$$

dont on dispose des valeurs aux points $\{x_0, ..., x_2\}$.

(2) La dérivée de f vaut naturellement

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{2}$$

On peut aussi calculer les dérivées secondes et troisièmes :

$$f^{(2)} = -\frac{x\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{2\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}},$$

$$f^{(3)} = \frac{\sqrt{2}\,\left(x^2-1\right)}{2\,\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}}.$$

(3) Posons

$$\alpha = 1.050. \tag{3}$$

L'idée de cet exercice est de choisir de façon optimale le degré n du polynôme et les points x_i parmi les points donnés $\{x_0, ..., x_2\}$, notés $z_0, ..., z_n$, puis le polynôme d'interpolation $\Pi_n(f)$ de f, déterminé grâce aux points $z_0, ..., z_n$ de telle sorte que l'erreur d'interpolation soit la plus petite possible au point α. Pour simplifier, nous supposerons que $n \geq 1$. Cette erreur est donnée par

$$E_n(f)(\alpha) = |\Pi_n(f)(\alpha) - f(\alpha)| = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^{n} (\alpha - z_i) \right|, \tag{4}$$

où ξ est un réel inconnu. Il est clair que cette erreur est la plus petite si les z_i se suivent et si α est dans l'intervalle $[z_0, ..., z_n]$. Dans ce cas, on sait que ξ appartient à $[z_0, z_n]$. Une fois ces points déterminés, on a alors de façon classique une approximation de $f(\alpha)$ fournie par

$$\begin{aligned} f(\alpha) \approx \Pi_n(f)(\alpha) = f[z_0] + f[z_0, z_1](\alpha - z_0) + f[z_0, z_1, z_2](\alpha - z_0)(\alpha - z_1) + ... \\ + f[z_0, z_1, z_2, ..., z_n](\alpha - z_0)(\alpha - z_1)...(\alpha - z_{n-1}). \end{aligned} \tag{5}$$

– Pour $n = 1$, l'unique polynôme possible correspond au choix de $z_0 = x_0$ et $z_1 = x_1$. D'après le tableau de l'énoncé et (5), on a

$$\begin{aligned} |E_1(f)(\alpha)| \leq \frac{1}{2} \max_{\xi \in [x_0, x_1]} |f''(\xi)|\, |\alpha - x_0||\alpha - x_1| = \frac{1}{2} \times 0.2419707 \times |\alpha - x_0||\alpha - x_1| \\ \approx 3.2463\,10^{-4} > 6.0\,10^{-6}, \end{aligned}$$

et donc cette interpolation ne convient pas.

– Pour $n=2$, l'unique polynôme possible correspond au choix de $z_0=x_0$, $z_1=x_1$, $z_2=x_2$. D'après le tableau de l'énoncé et (5), on a

$$|E_1(f)(\alpha)| \leq \frac{1}{3!}\max_{\xi\in[x_0,x_2]}\left|f^{(3)}(\xi)\right| |\alpha-x_0||\alpha-x_1||\alpha-x_2|$$
$$= \frac{1}{3!}\times\max\left(0.0457490, 0.0854419\right)\times|\alpha-x_0||\alpha-x_1||\alpha-x_2| \approx 5.34011\,10^{-6}\leq 6.0\,10^{-6},$$

et donc cette interpolation convient.

– Finalement, le meilleur résultat correspond au degré $n=2$ en choisissant les points x_i d'indices $i\in\{0,1,2\}$. Les différences divisées valent alors

$$(0.8413447461, 0.2298919299, -0.1196401130)\,,$$

tandis que la valeur approchée vaut

$$f(\alpha)\approx 0.8531384428. \tag{6}$$

L'erreur est majorée par

$$5.34011\,10^{-6}. \tag{7}$$

Notons que la vraie valeur est donnée par

$$f(\alpha)=0.8531409436, \tag{8}$$

et que l'erreur est donc égale à

$$2.50077\,10^{-6}, \tag{9}$$

plus petite que celle donnée par (7).

Voir la figure 1.

Remarque 1. Donnons le texte complet de l'exercice intialement prévu, plus difficile !

On a calculé les probabilités pour différentes valeurs de x, au moyen de méthodes d'intégration numérique

i	x_i	$P(X\leq x_i)$
0	1.000000000	0.841344746
1	1.100000000	0.864333939
2	1.200000000	0.884930330
3	1.300000000	0.903199515
4	1.400000000	0.919243341

Table 1. Les valeurs de x_i et de $P(X\leq x_i)$ pour $i\in\{0,...,4\}$

très précises et les résultats sont reportés dans le tableau 1. Obtenir $P(X\leq 1.0500)$ avec une erreur absolue inférieure à $\varepsilon=1.0\,10^{-6}$. Dans le tableau 2 ont été affichés les maximums des dérivées $f^{(i)}$ pour $i\in\{2,...,5\}$, sur différents intervalles.

Comme précédemment, on peut aussi calculer les dérivées quatrième et cinquième de f :

$$f^{(4)}=-\frac{\sqrt{2}\,x\,\left(x^2-3\right)}{2\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}},$$
$$f^{(5)}=\frac{\sqrt{2}\,\left(x^4-6\,x^2+3\right)}{2\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}}.$$

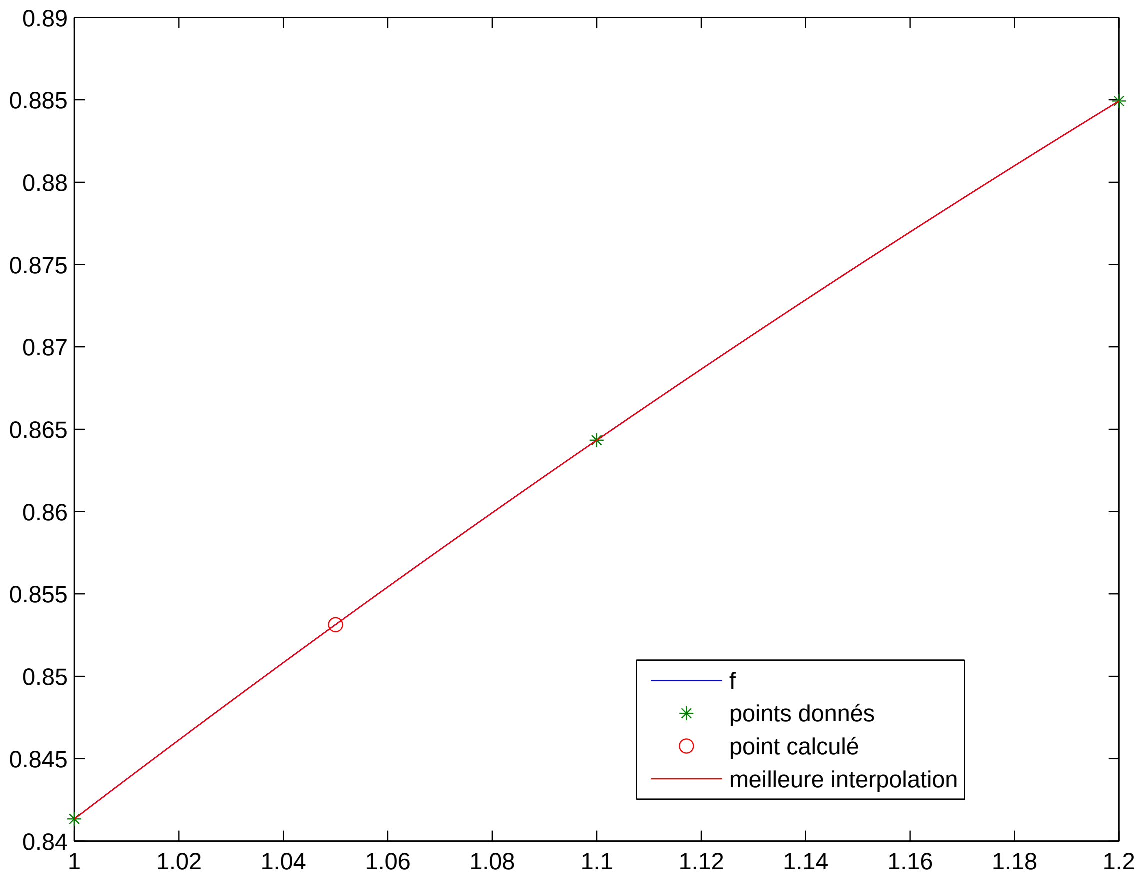

FIGURE 1. Les données et la fonction f.

	$[x_0, x_1]$	$[x_1, x_2]$	$[x_2, x_3]$	$[x_3, x_4]$
$\left\|f^{(2)}\right\|$	0.241971	0.239637	0.233023	0.222779
$\left\|f^{(3)}\right\|$	0.045749	0.085442	0.118244	0.143738
$\left\|f^{(4)}\right\|$	0.483941	0.428951	0.363516	0.291841
$\left\|f^{(5)}\right\|$	0.609093	0.692545	0.734126	0.739986

TABLE 2. Les maximas des valeurs absolue des dérivées $\left|f^{(j)}\right|$ sur les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$.

On peut alors remplir les tableaux 2 et 1.
On fait comme précédemment. Le meilleur résultat correspond au degré $n = 4$ en choisissant les points x_i d'indices $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Les différences divisées valent alors

$$(0.8413447461, 0.2298919299, -0.1196401130, 0.0109328620, 0.0151031802),$$

tandis que la valeur approchée vaut

$$f(\alpha) \approx 0.8531411267. \tag{10}$$

L'erreur est majorée par

$$2.2340\,10^{-7}. \tag{11}$$

Notons que la vraie valeur est donnée par

$$f(\alpha) = 0.8531409436, \tag{12}$$

et que l'erreur est donc égale à

$$1.83120\,10^{-7}, \tag{13}$$

plus petite que celle donnée par (11).

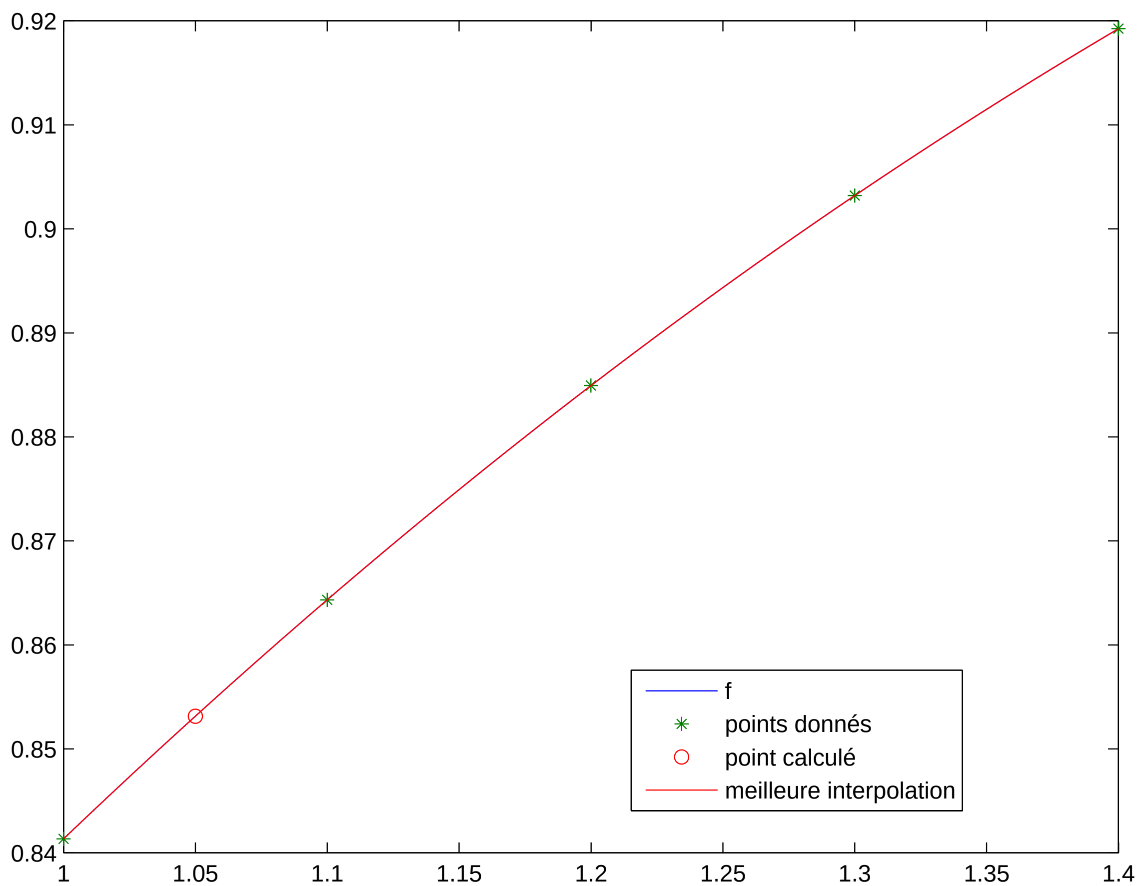

FIGURE 2. Les données et la fonction f.

Voir la figure 2.

Remarque 2. Notons que cet exercice est intéressant, puisqu'ici, il est plus facile de calculer explicitement les dérivées de f, que la fonction f, qui est une primitive !

Remarque 3. Puisqu'il est plus facile de calculer les dérivées de f que la fonction, une autre méthode consiste à utiliser la théorie de l'interpolation d'Hermite, qui généralise celle de Lagrange et qui correspond à des choix de points z_i qui se confondent. Par exemple, on choisit un polynôme de degré $n = 3$ avec les points z_i égaux à x_0, x_0, x_1, x_1. Dans ce cas, on peut utiliser de nouveau les algorithmes et les formules d'erreurs vue en cours. Voir [BM03, exercice 2.8]. Les points à considérer sont alors $\{x_0, x_0, x_1, x_1\}$ et les 4 différences divisées valent

$\{f(x_0), f'(x_0), f(x_1), f'(x_1)\}$, où f' est donnée par (2). La formule d'erreur (4) est encore valable et donne donc avec $z_0 = z_1 = x_0$ et $z_2 = z_3 = x_1$:

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left|\prod_{i=0}^{n}(\alpha - z_i)\right| = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}|x_0-\alpha|^2|x_1-\alpha|^2,$$

soit numériquement, en utilisant le tableau 2 :

$$\eta = 1.260\,10^{-7}.$$

La formule (5) donne alors

$$f(\alpha) \approx 0.853140824405.$$

L'erreur réelle commise est alors égale à

$$\eta = 1.191\,10^{-7}.$$

Remarque 4. En fait, grâce à matlab, il est très facile de calculer la fonction f grâce à la fonction `erf`, qui renvoie la valeur de

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt.$$

Un petit calcul simple nous montre que

$$f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}.$$

Correction de l'exercice 2.
En notant

$$I = \int_A^B x\,\sin(x)\,dx,$$

où $A = 1$ et $B = 2$, on obtient respectivement pour la méthode du point milieu :

$$I \approx 1.4464806070,$$

pour la méthode des trapèzes :

$$I \approx 1.4283211280,$$

pour la méthode de Simpson :

$$I \approx 1.4404274473.$$

On peut comparer ces valeurs à la valeur exacte de l'intégrale donnée par

$$\begin{aligned} I &= \cos(1) - 2\,\cos(2) - \sin(1) + \sin(2)\,, \\ &\approx 1.4404224210. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3.
Voir partie manuscrite, en fin de document.

Correction de l'exercice 4.
Voir partie manuscrite, en fin de document.

Correction de l'exercice 5.
On obtient la matrice triangulaire supérieure suivante

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

avec un second membre égal à

$$c = \begin{pmatrix} 13 \\ \frac{14}{3} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

La résolution du système triangulaire supérieur fournit donc la solution,

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où l'on a opéré la permutation des colonnes données par $\{3, 1, 2\}$. Après permutation des colonnes, on a donc la solution

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que

$$AX = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} = B.$$

Exercice (3) : $f(x) = 4e^{x/4} - 6$ sur $[0,4]$.

(1) BISSECTION : a) $f(a) = f(0) = -6 < 0$.

$f(b) = f(4) = 4e - 6 = 4,8731 > 0$

$n=1$: $c_1 = \frac{a_0+b_0}{2} = 2 \rightarrow f(c_1) = f(2) = 4e^{1/2} - 6 \simeq 0,5949 > 0$

$\Rightarrow \alpha \in [0,2]$. (1ère itération). $a_1 = 0$, $b_1 = 2$.

$n=2$: $c_2 = \frac{a_1+b_1}{2} = 1 \rightarrow f(1) = 4e^{1/4} - 6 \simeq -0,8639 < 0$.

$\Rightarrow \alpha \in [1,2]$ (2ème itération) $a_2 = 1$, $b_2 = 2$

b) $\epsilon = 10^{-6}$. $\frac{L}{2^n} < \epsilon \rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{L} \rightarrow 2^n > \frac{L}{\epsilon}$

$\rightarrow n \ln 2 > \ln\left(\frac{L}{\epsilon}\right) \rightarrow n > \frac{\ln \frac{L}{\epsilon}}{\ln 2}$.

$$n > \frac{\ln\left(\frac{4}{10^{-6}}\right)}{\ln 2} = 21,93.$$

Il faut 22 itération

(2). POINT FIXE $g(x) = x - \frac{e^{x/4}}{16} + \frac{3}{32}$.

a) Convergence : $g'(x) = 1 - \frac{e^{x/4}}{4 \times 16} = 1 - \frac{e^{x/4}}{64}$ sur $[0,4]$.

$g''(x) = -\frac{e^{x/4}}{64 \times 4} < 0$.

donc $g'(x)$ décroissante $g'(0) = 1 - \frac{1}{64} > 0$

$g'(4) = 0,9575 > 0$. donc $g'(x) > 0 \; \forall x \in [0,4]$.

donc $g(x)$ croissante $g(0) = \frac{1}{32}$

$g(4) = 3,9239$.

donc $g(x) \in I = [0,4] \; \forall x \in [0,4]$.

g continue sur I. et $|g'(x)| < 1$. $\forall x \in [0,4]$.

Donc tous les points x_0 de $I=(0,4)$ permettent la convergence vers l'unique point fixe de $g(x)$ dans I.

Ordre de convergence :

$$e_{n+1} = g'(\alpha)\, e_n + \frac{g''(\alpha)}{2} e_n^2 + \frac{g'''(\alpha)}{6} e_n^3 + \dots$$

On a vu que $g'(x) > 0 \quad \forall x \in I$ donc $g'(\alpha) \neq 0$.

$\hookrightarrow$ ordre 1.

b)

x_0	2	0	4	1
x_1	1,9907	1/32	3,9239	1,0135
x_2	1,9816	0,0620	3,8509	1,0267

solution exacte $\alpha = 4 \ln \frac{3}{2} \simeq 1,6219$.

c) Nb d'itérations $\varepsilon = 10^{-6}$

On a $|e_{n+1}| = |g'(\alpha)|\,|e_n|$ ordre 1.

$$|e_n| = |g'(\alpha)|\cdot|e_{n-1}| \leq \max_{x\in(0,4)} g'(x) \cdot |e_{n-1}|$$

Or on a vu que $g'(x)$ decroissante sur $(0,4)$

de $g'(0) \simeq 1 - \frac{1}{64} \simeq 0,9844$

à $g'(4) \simeq 0,9575$

donc $|e_n| \leq c\,|e_{n-1}|$ avec $c = 1 - \frac{1}{64}$.

$$|e_n| < c\,|e_{n-1}| \leq c^2 |e_{n-2}| \leq c^3 |e_{n-3}| \leq \dots \leq c^n |e_0|$$

avec $|e_0| = |x_0 - \alpha| < 2$.

On veut $|e_n| \leq 10^{-6} \Rightarrow c^n |e_0| \leq 10^{-6} \Rightarrow c^n \leq \frac{10^{-6}}{2}$.

$$n \ln c \leq \ln\left(\frac{10^{-6}}{2}\right) \Rightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{10^{-6}}{2}\right)}{\ln c} \simeq 921,28.$$

Soit $\boxed{n_{min} = 922}$

Exercice ④:

$$y''(t) = -\frac{a}{4k^2}\left[(1-k^2)\,y(t) + 2k^2 y^3(t)\right].$$

$a = 4$
$k = 5.$

$y(0) = 0$
$y'(0) = 0{,}04.$

1) On pose $y_1(t) = y(t)$
$y_2(t) = y'(t).$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1'(t) = y_2(t). \\ y_2'(t) = -\frac{4}{100}\left[(1-25)\,y_1(t) + 50\,y_1^3(t)\right] = \frac{24}{25}\,y_1(t) - 2y_1(t)^3. \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 0{,}04 \end{cases}$$

2) POINT MILIEU

$f_1(t_n, u_{1,n}, u_{2,n}) = u_{2,n}.$
$f_2(t_n, u_{1,n}, u_{2,n}) = \frac{24}{25}u_{1,n} - 2u_{1,n}^3$

$h = 0{,}1.\quad t_0 = 0\quad u_{1,0} = 0\quad u_{2,0} = 0{,}04.\quad N = 1.$

- $\underline{n=0}$: $k_{1,1} = h f_1(t_0, u_{1,0}, u_{2,0}) = 0{,}1 \times u_{2,0} = 0{,}004.$

$k_{2,1} = h f_2(t_0, u_{1,0}, u_{2,0}) = 0{,}1 \times \left(\frac{24}{25}\times 0 - 2\times 0^3\right) = 0.$

$$u_{1,1} = u_{1,0} + h f_1\left(t_0 + \frac{h}{2},\ u_{1,0} + \frac{k_{1,1}}{2},\ u_{2,0} + \frac{k_{2,1}}{2}\right)$$
$$= 0 + 0{,}1\times\left(0{,}04 + \frac{0}{2}\right) = 0{,}004.$$

$$u_{2,1} = u_{2,0} + h f_2\left(t_0 + \frac{h}{2},\ u_{1,0} + \frac{k_{11}}{2},\ u_{2,0} + \frac{k_{2,1}}{2}\right)$$
$$= 0{,}04 + 0{,}1\times\left(\frac{24}{25}\left(\underbrace{u_{1,0}}_{0} + \frac{k_{1,1}}{2}\right) - 2\times\left(\underbrace{u_{1,0}}_{0} + \frac{k_{1,1}}{2}\right)^3\right)$$
$$= 0{,}04 + 0{,}1\times\left(\frac{24}{25}\times 0{,}002 - 2\times(0{,}002)^3\right)$$
$$\simeq 0{,}040192.$$

$t_1 = t_0 + h = 0{,}1$

donc $y(0{,}1) \simeq u_{1,1} = 0{,}004.$

3) Methode d'ordre 2 $\Rightarrow$ h divisé par 10 donc $\frac{E}{10^2}$
l'erreur est divisée par 100.