

Corrigé de l'examen du 23 Janvier 2018
Correction de l'exercice 1.

Voir feuille manuscrite, en fin de corrigé.

Correction de l'exercice 2.

Voir feuille manuscrite, en fin de corrigé.

Correction de l'exercice 3.

Voir feuille manuscrite, en fin de corrigé.

Correction de l'exercice 4.

Cet exercice est inspiré de [BM03, Exercice 2.3 p. 53 et 239].

- (1) (a) Il est naturellement préférable d'utiliser la forme de Newton pour le calcul de l'interpolation, néanmoins, le calcul utilisant la forme de Lagrange est aussi présenté.

- (i) Chacun des polynômes de Lagrange l_i (de degré 2) est donné par la formule :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (1)$$

On a donc successivement

$$l_0(x) = \frac{(x - 6001)(x - 6002)}{(6000 - 6001)(6000 - 6002)},$$

$$l_1(x) = \frac{(x - 6000)(x - 6002)}{(6001 - 6000)(6001 - 6002)},$$

$$l_2(x) = \frac{(x - 6000)(x - 6001)}{(6002 - 6000)(6002 - 6001)}.$$

soit encore après calculs :

$$l_0(x) = 1/2 x^2 - \frac{12003}{2} x + 18009001, \quad (2a)$$

$$l_1(x) = -x^2 + 12002 x - 36012000, \quad (2b)$$

$$l_2(x) = 1/2 x^2 - \frac{12001}{2} x + 18003000. \quad (2c)$$

 Ensuite, le polynôme interpolateur de degré 2, p_2 , est donné par la formule :

$$p_2(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x). \quad (3)$$

Ici, on a donc :

$$p_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x).$$

Après calculs, il vient :

$$p_2(x) = 5/6 x^2 - \frac{60011}{6} x + \frac{90033001}{3}. \quad (4)$$

$x_i \setminus k$	0	1	2
$x_0 = 6000$	$\boxed{1/3}$		
$x_1 = 6001$	$-2/3$	$\boxed{-1}$	
$x_2 = 6002$	0	$2/3$	$\boxed{5/6}$

TABLE 1. Différences divisées de g .

(ii)

Pour calculer le polynôme sous la forme de Newton, on détermine tout d'abord les différences divisées $g[x_i, \dots, x_{i+k}]$ données dans le tableau 1. Ensuite, on n'utilise plus que les différences divisées qui sont encadrées et le polynôme interpolateur est donné par la formule :

$$p_2(x) = \sum_{i=0}^n g[x_0, \dots, x_i](x - x_0) \dots (x - x_{i-1}). \quad (5)$$

Ici, on a donc :

$$p_2(x) = g[x_0] + g[x_0, x_1](x - x_0) + g[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

On a successivement

$$\begin{aligned} x - x_0 &= x - 6000, \\ (x - x_0)(x - x_1) &= x^2 - 12001x + 36006000. \end{aligned}$$

Après calculs, on retrouve donc bien le polynôme déterminé par la méthode de Lagrange (voir équation (4)).

- (b) Les calculs présentés en question 1a ont été faits sous forme de fraction donc exactement. Si on utilise 7 chiffres significatifs, on obtient alors grâce à l'équation (4) :

$$p_2 = 8.333332 \cdot 10^{-1}x^2 - 1.000183 \cdot 10^4x + 3.001100 \cdot 10^7. \quad (6)$$

Remarque 1. Il était aussi possible de faire les calculs de la question 1a en utilisant directement 7 chiffres significatifs, comme le montrent les calculs suivants :

- (i) Chacun des polynômes de Lagrange l_i (de degré 2) est donné par la formule (1). On a donc successivement

$$l_0(x) = \frac{(x - 6001)(x - 6002)}{(6000 - 6001)(6000 - 6002)},$$

$$l_1(x) = \frac{(x - 6000)(x - 6002)}{(6001 - 6000)(6001 - 6002)},$$

$$l_2(x) = \frac{(x - 6000)(x - 6001)}{(6002 - 6000)(6002 - 6001)}.$$

soit encore après calculs :

$$l_0(x) = 5 \cdot 10^{-1}x^2 - 6.001500 \cdot 10^3x + 1.800899 \cdot 10^7, \quad (7a)$$

$$l_1(x) = -x^2 + 1.200199 \cdot 10^4x - 3.601200 \cdot 10^7, \quad (7b)$$

$$l_2(x) = 5 \cdot 10^{-1}x^2 - 6.000500 \cdot 10^3x + 1.800300 \cdot 10^7. \quad (7c)$$

Ensuite, le polynôme interpolateur de degré 2, p_2 , est donné par la formule (3). Ici, on a donc :

$$p_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x).$$

Après calculs, il vient :

$$p_2(x) = 8.333333 \cdot 10^{-1} x^2 - 1.000182 \cdot 10^4 x + 3.001100 \cdot 10^7. \quad (8)$$

(ii)

$x_i \setminus k$	0	1	2
$x_0 = 6000$	3.333333 10^{-1}		
		-1	
$x_1 = 6001$	$-6.666667 \cdot 10^{-1}$		8.333334 10^{-1}
		$6.666667 \cdot 10^{-1}$	
$x_2 = 6002$	0		

TABLE 2. Différences divisées de g .

Pour calculer le polynôme sous la forme de Newton, on détermine tout d'abord les différences divisées $g[x_i, \dots, x_{i+k}]$ données dans le tableau 2. Ensuite, on n'utilise plus que les différences divisées qui sont encadrées et le polynôme interpolateur est donné par la formule (5). Ici, on a donc :

$$p_2(x) = g[x_0] + g[x_0, x_1](x - x_0) + g[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

On a successivement

$$\begin{aligned} x - x_0 &= x - 6 \cdot 10^3, \\ (x - x_0)(x - x_1) &= x^2 - 1.200099 \cdot 10^4 x + 3.600600 \cdot 10^7. \end{aligned}$$

Après calculs, on retrouve donc bien le polynôme déterminé par la méthode de Lagrange (voir équation (8)).

(c) Grâce à la forme donnée par (6), on obtient

$$p_2(x_0) \approx -2. ; \quad (9a)$$

$$p_2(x_1) \approx -2. ; \quad (9b)$$

$$p_2(x_2) \approx 0. \quad (9c)$$

Le premier chiffre significatifs des y_i est donc faux !

Si on calcule

$$E_2 = \max_{0 \leq i \leq 2} |p_2(x_i) - y_i|,$$

qui doit être nul en théorie, on obtient alors

$$E_2 = 2.333333, \quad (10)$$

qui est loin d'être nul !

Remarque 2. Si on fait les calculs sous matlab avec 16 chiffres significatifs, on obtient alors

$$p_2(x_0) \approx 3.333333395421505 \cdot 10^{-1}; \quad (11a)$$

$$p_2(x_1) \approx -6.666666641831398 \cdot 10^{-1}; \quad (11b)$$

$$p_2(x_2) \approx 3.725290298461914 \cdot 10^{-9}, \quad (11c)$$

ce qui est mieux que (9). Cette fois-ci, c'est le huitième chiffre significatif qui est faux, avec 16 chiffres significatifs de calcul ! On a aussi

$$E_2 = 6.208817182606907 \cdot 10^{-9}.$$

Remarque 3. Si on fait les calculs sous matlab cette fois-ci en symbolique, on obtient alors

$$p_2(x_0) = 1/3; \quad (12a)$$

$$p_2(x_1) = -2/3; \quad (12b)$$

$$p_2(x_2) = 0, \quad (12c)$$

ce qui est impeccable ! On a aussi

$$E_2 = 0,$$

donc nulle !

Remarque 4. Avec votre calculatrice, il se peut aussi que vous ayez obtenu des valeurs encore différentes de celles données dans ce corrigé, tout aussi loin des y_i !

- (2) (a) Les différences divisées relatives aux polynômes p_2 figurent déjà dans le tableau 1 ! Pour ceux qui avait utilisé la forme de Lagrange, il fallait alors déterminer la forme de Newton ! Si on utilise 7 chiffres significatifs, on obtient alors les valeurs données dans le tableau 2.

- (b) Si l'on développe le polynôme donné par

$$q_2(x) = g[x_0] + (x - x_0)(g[x_0, x_1] + (x - x_1)g[x_0, x_1, x_2]), \quad (13)$$

on obtient bien le le polynôme d'interpolation p_2 , donné dans la base canonique par (5).

- (c) La forme donnée par (13) *sans la réécrire sur la base canonique*, avec 7 chiffres significatifs est donnée par

$$p_2(x) \approx 3.333333 \cdot 10^{-1} + (x - 6000)(-1. + (x - 6001)(8.333333 \cdot 10^{-1})). \quad (14)$$

On obtient alors

$$p_2(x_0) = 3.333333 \cdot 10^{-1}; \quad (15a)$$

$$p_2(x_1) = -6.666666 \cdot 10^{-1}; \quad (15b)$$

$$p_2(x_2) = 8.940696 \cdot 10^{-8}. \quad (15c)$$

Ces valeurs sont plus précises que celles données par (9). Si on calcule numériquement l'erreur E_2 , on obtient alors

$$E_2 = 8.940697 \cdot 10^{-8}, \quad (16)$$

ce qui est plus précis que (10).

Remarque 5. Cette façon de faire revient à utiliser l'algorithme d'évaluation d'Horner (voir équations (20) page 6.).

Remarque 6. Si on fait les calculs sous matlab avec 16 chiffres significatifs, on obtient alors

$$p_2(x_0) = 3.33333333333333 \cdot 10^{-1}; \quad (17a)$$

$$p_2(x_1) = -6.66666666666667 \cdot 10^{-1}; \quad (17b)$$

$$p_2(x_2) = -1.665334536937735 \cdot 10^{-16}, \quad (17c)$$

ce qui est mieux que ceux obtenus en remarque 2. On a aussi

$$E_2 = 1.665334536937735 \cdot 10^{-16}.$$

Remarque 7. Si on fait les calculs sous matlab cette fois-ci en symbolique, on obtient alors

$$p_2(x_0) = 1/3;$$

$$p_2(x_1) = -2/3;$$

$$p_2(x_2) = 0;$$

ce qui est de nouveau impeccable ! On a aussi

$$E_2 = 0,$$

donc encore nulle !

Remarque 8. Ce petit exercice avait pour but de vous montrer la supériorité de la forme de Newton, associée à l'évaluation de Horner, sans utiliser la base canonique, "trop" utilisée en analyse numérique. "Loin" de l'origine, la base canonique n'est pas pratique. Bien entendu, en TD, pour des valeurs de x raisonnables et de faibles degrés, cette base continuera d'être utilisée. Il faudra tout de même se méfier de cela pour des calculs numériques pour des valeurs de n plus grande.

Dans le cas des calculs symboliques, rigoureusement exacts, mais longs, rien n'est à craindre cette fois ! Voir aussi la remarque 9.

Remarque 9. Dans l'exercice de TD 1.3, on a montré que l'erreur d'interpolation entre f et son polynôme d'interpolation p_n , défini par $n + 1$ points équirépartis est donnée par

$$\forall x \in [a, b], \quad |E_n(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{b-a}{n} \right)^{n+1} \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|,$$

dans le cas général et par

$$\forall x \in [a, b], \quad |E_n(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)(3n)^{n+1}},$$

dans le cas particulier étudié, c'est-à-dire pour f et g données par

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = \sin(x/3), \quad (18a)$$

$$\forall x \in [6000, 6001], \quad g(x) = \sin((x - 6000)/3). \quad (18b)$$

Ainsi, cette erreur tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Attention, ce résultat n'est vrai qu'en théorie ; en pratique, du fait des arrondis de calculs, l'erreur d'interpolation entre f et p_n ne tend pas vers zéro quand n grandit.

De plus, dans [BM03, Exercice 2.3 p. 53 et 239 et TP 2.D p. 65], nous avons mis en avant le fait que l'on peut évaluer numériquement le polynôme p_n de trois façons :

(1) en utilisant la forme de Newton donnée par

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f[x_0, \dots, x_i] (x - x_0) \dots (x - x_{i-1}), \quad (19)$$

et l'algorithme d'évaluation de Horner ¹

(2) en utilisant sa forme canonique ²

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i ; \quad (21)$$

(3) en utilisant son écriture dans la base des polynômes de Lagrange l_i

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x), \quad (22)$$

où

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (23)$$

L'erreur est intrinsèquement liée à l'utilisation d'un calculateur par le cumul d'imprécisions liées aux arrondis. Cependant, les trois méthodes n'ont pas la même sensibilité numérique. Nous donnons maintenant deux simulations numériques mettant cela en évidence sur les fonctions f et g définies par (18).

Pour f et g données par (18), on calcule le polynôme p_n correspondant aux points équirépartis x_i de $[a, b]$ (c'est-à-dire vérifiant $p_n(x_i) = f(x_i)$) par l'une des trois méthodes données en page 5.

Voir la figure 1 pour laquelle les trois méthodes de calculs se déroulent bien : f et p_n sont indiscernables graphiquement.

Pour n plus grand, la méthode utilisant la forme canonique n'est plus efficace, alors que les deux autres le sont encore ! Voir la figure 2.

Pour n encore plus grand, la méthode utilisant les polynômes de Lagrange commence à n'être plus efficace, alors que la méthode avec Newton avec évaluation d'Horner l'est encore. Ensuite, au delà d'une certaine valeur de n cette méthode-ci ne marche plus ! Voir la figure 3.

Enfin, on peut aussi tracer le logarithme en base 10 de l'erreur entre f et son interpolé en fonction de n comme le montre la figure 4. On constate que celle-ci est minimale autour de la valeur $n_0 = 9$ et que les trois méthodes coïncident rigoureusement jusqu'à n_0 . Ensuite, de $n_0 + 1$ à $n_1 = 25$, les deux méthodes Newton et canonique voient leur erreur légèrement remonter, en contradiction avec la théorie, à cause des arrondis de calculs. Il en est de même pour celle correspondant à la base Lagrange, avec une erreur un peu moins petite. Ensuite, au-delà de n_1 , l'erreur en canonique augmente plus rapidement que les deux autres méthodes, qui se comportent mieux. Notons aussi la légère supériorité en terme d'erreur de la forme de Newton, qui sera donc à privilégier tout le temps, compte tenu de sa simplicité algorithmique.

Dans un second temps, on peut aussi refaire les mêmes calculs portant cette fois-ci sur la fonction g définie par (18), on obtient un comportement similaire de l'erreur.

1. qui consiste en fait à évaluer $p_n(x)$ de la façon suivante : si on note $a_0 = f[x_0]$, $a_1 = f[x_0, x_1]$, $a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$, ..., $a_n = f[x_0, \dots, x_n]$, alors on calcule p_n défini par (19) de la façon suivante (dans cet ordre, sans exprimer ce qui suit dans la base canonique) :

$$p_1(x) = a_0 + (x - x_0)a_1, \quad (20a)$$

si $n = 1$,

$$p_2(x) = a_0 + (x - x_0)(a_1 + (x - x_1)a_2), \quad (20b)$$

si $n = 2$ et de façon plus générale :

$$p_n(x) = a_0 + (x - x_0)(a_1 + (x - x_1)(a_2 + (x - x_2)(a_3 + (x - x_3)(\dots(a_{n-2} + (x - x_{n-2})(a_{n-1} + (x - x_{n-1})a_n))))), \quad (20c)$$

de façon, entre autres, à diminuer le nombre d'opérations à effectuer, notamment le calcul des produits $(x - x_0)\dots(x - x_i)$. (voir [BM03, Algorithme 2.1 d'Horner p. 38 et TP 2.A p. 61])

2. que l'on obtient grâce à la forme de Newton et par exemple [BM03, Exercice 2.7 p. 56, Algorithme 6.1 p. 246].

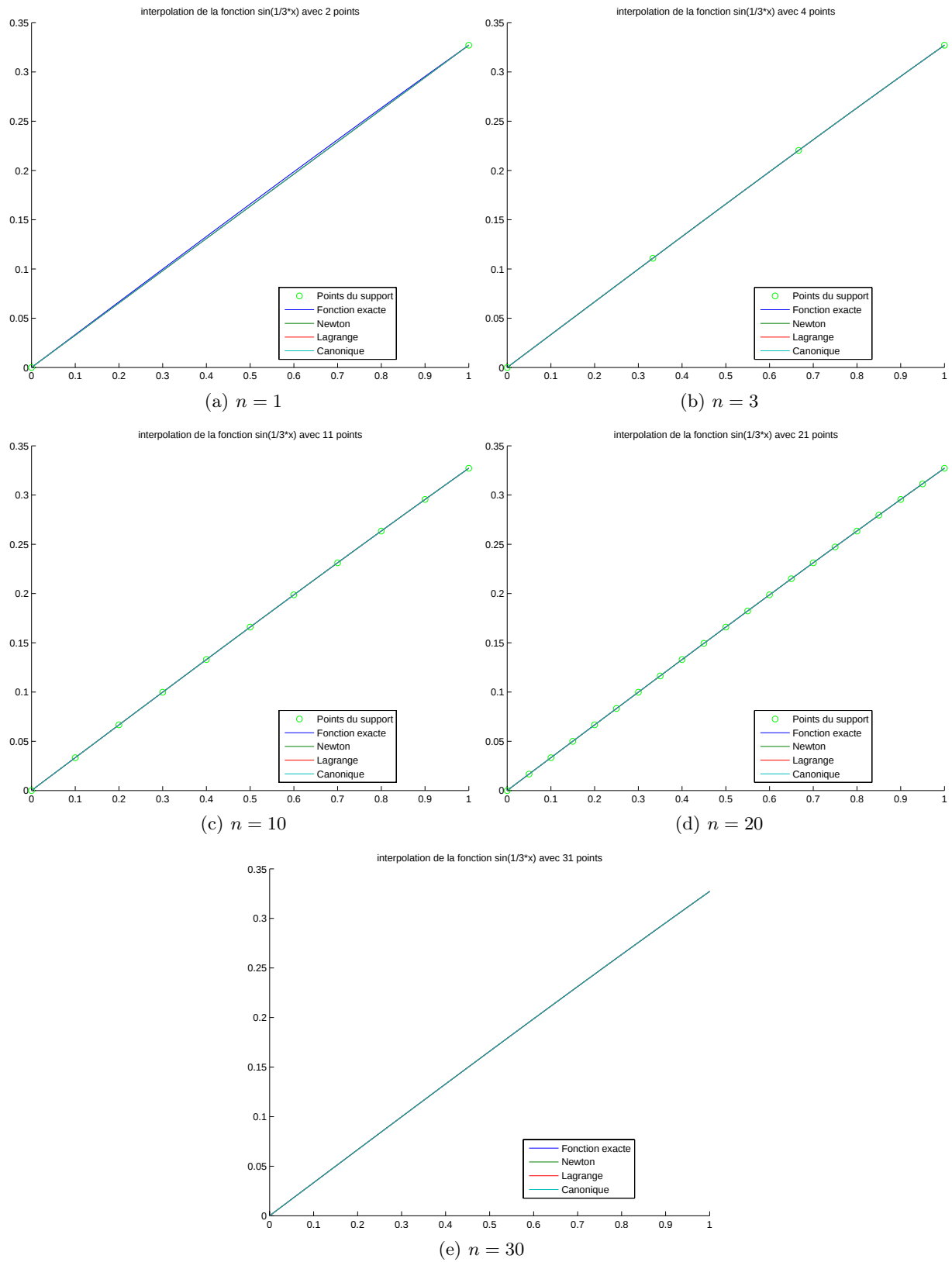


FIGURE 1. La fonction f et son polynôme interpolateur p_n calculés de trois façons différentes.

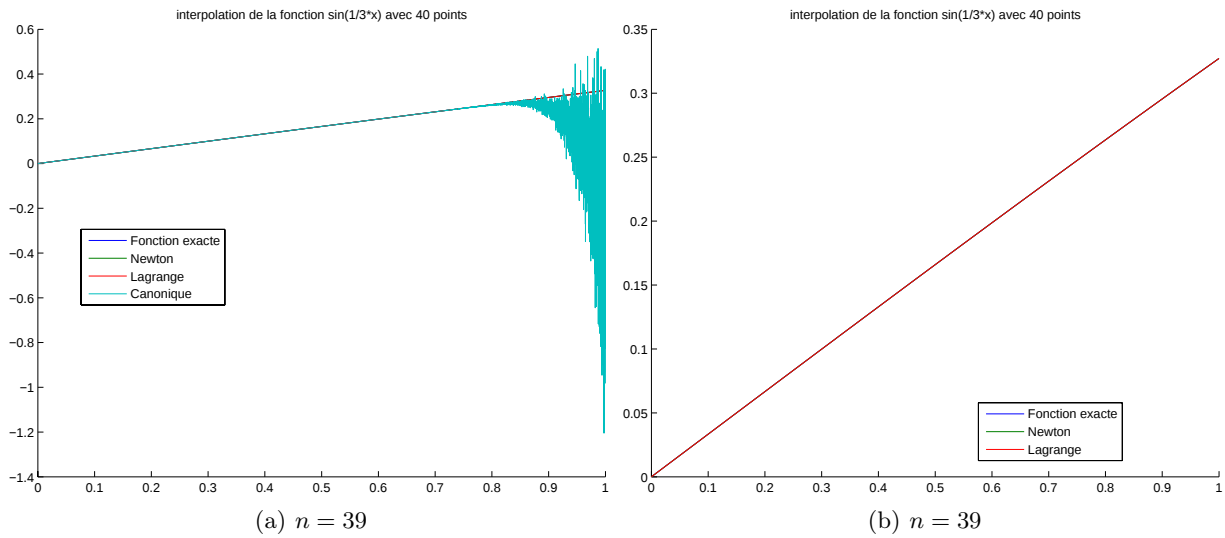


FIGURE 2. La fonction f et son polynôme interpolateur p_n calculés de deux façons différentes.

Ici, on constate que la méthode de la forme canonique se comporte beaucoup plus mal que dans le cas précédent. Voir la figure 5. Dès la valeur de $n_0 = 5$, elle commence à ne plus fonctionner, alors que les deux autres se comportent bien ! Ensuite, les méthodes fondées sur Newton et Lagrange donnent encore de bons résultats, du même ordre, Newton se comportant un peu mieux que Lagrange.

On peut aussi tracer le logarithme en base 10 de l'erreur entre g et son interpolé en fonction de n comme le montre la figure 6. Le comportement de l'erreur est identique à celui de la figure 4, mis à part le fait que la méthode Lagrange a une erreur numérique qui apparaît pour des valeurs de n beaucoup plus petite que précédemment.

Finalement, retenons que la forme de Newton et l'évaluation par l'algorithme de Horner évoqués dans le point 1 page 5 est largement supérieure aux deux autres méthodes (Lagrange et base canonique) tant sur le plan algorithmique que numérique.

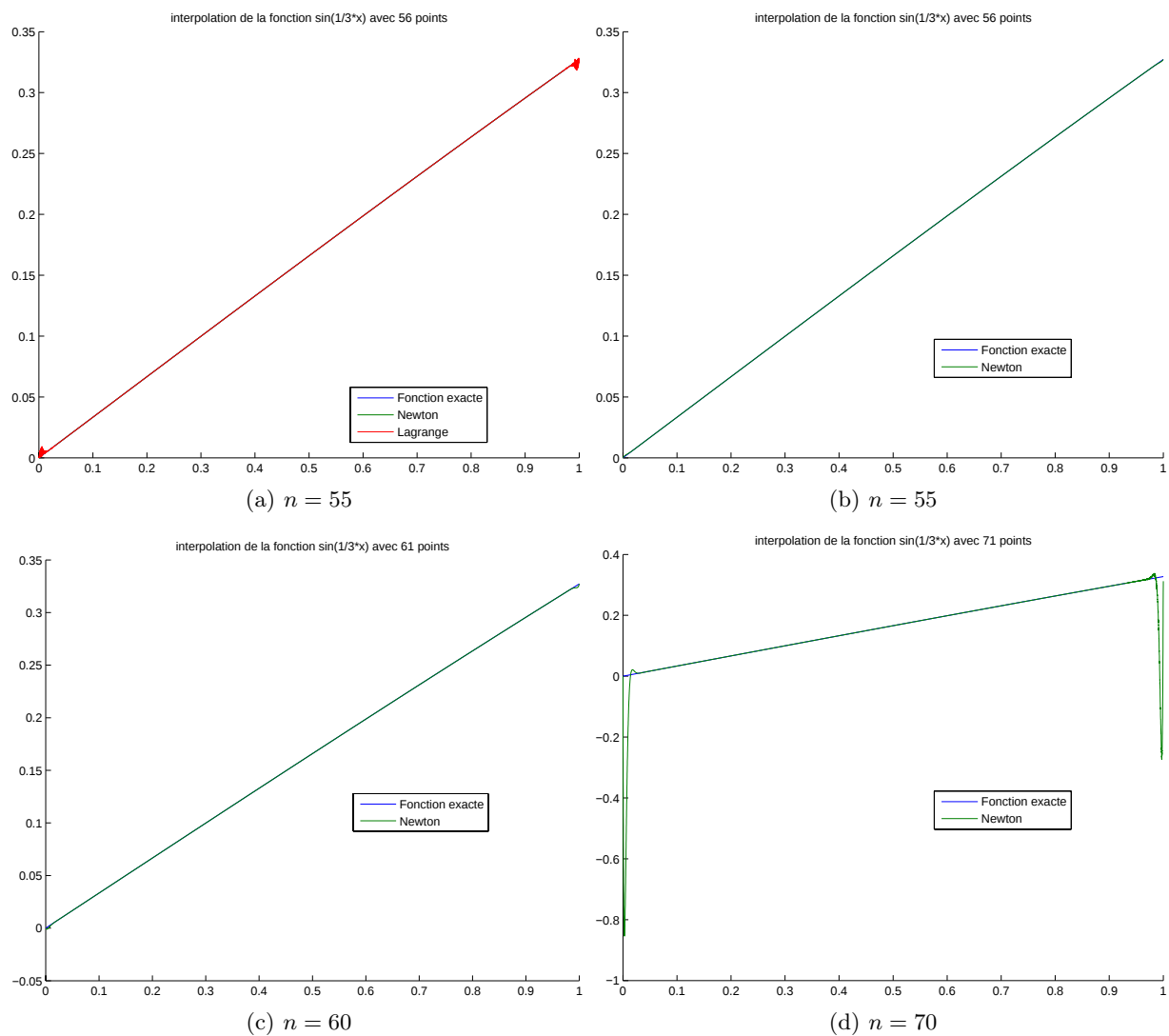


FIGURE 3. La fonction f et son polynôme interpolateur p_n calculés de une ou deux façons différentes.

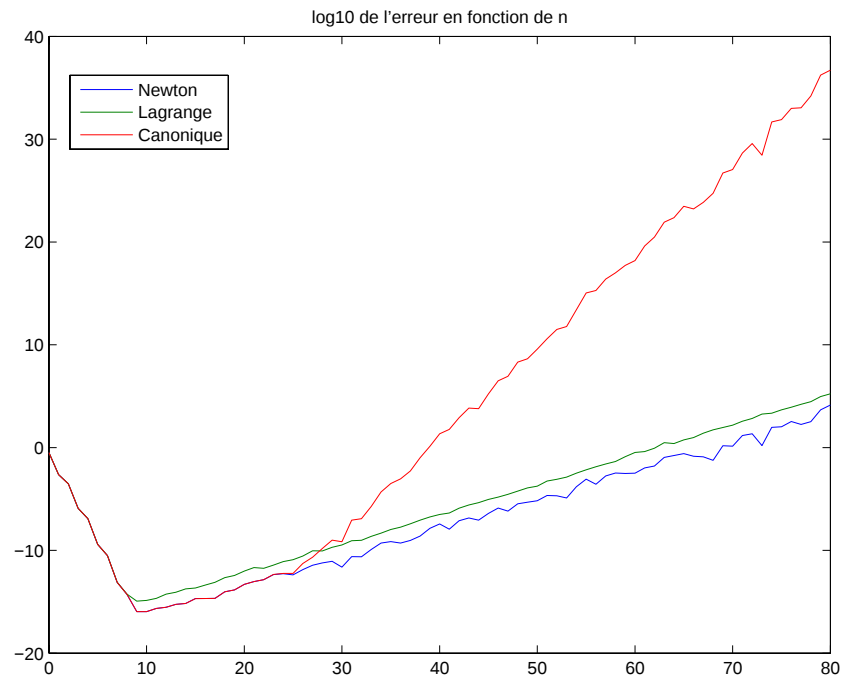


FIGURE 4. Logarithme de l'erreur en base 10 entre f et son interpolée p_n .

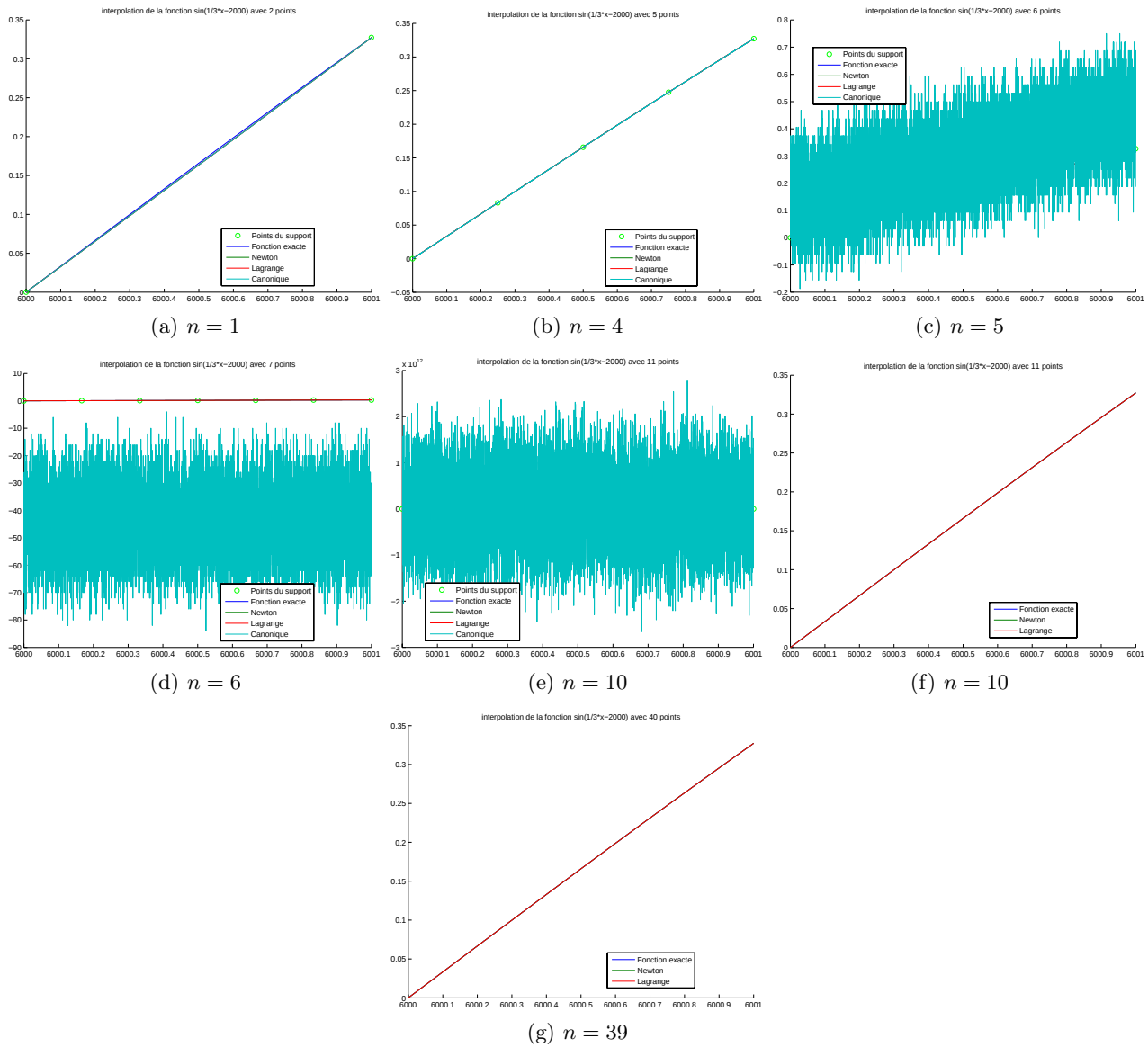


FIGURE 5. La fonction g et son polynôme interpolateur p_n calculés de trois façons différentes.

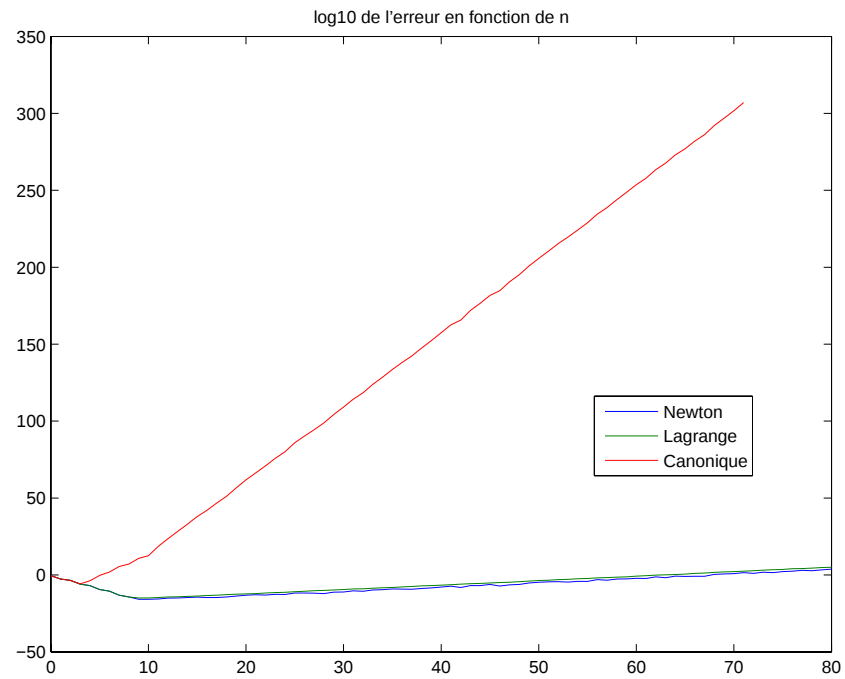


FIGURE 6. Logarithme de l'erreur en base 10 entre g et son interpolée p_n .

Correction de l'exercice 5.

On renverra aussi à l'exercice de TD 2.2 proche de cet exercice !

Pour toute la suite, les nœuds interpolant sont notés $x_0, \dots, x_n$.

- (1) (a) Par linéarité des fonctions $f \mapsto I(f)$ et $f \mapsto Q(f)$, l'exactitude de la formule de quadrature sur l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur à 2, de dimension 3, est équivalente à l'exactitude de la formule de quadrature pour les vecteurs de la base canonique de cet espace vectoriel, c'est-à-dire pour les fonctions définies par

$$e_0(x) = 1, \quad e_1(x) = x, \quad e_2(x) = x^2.$$

Cela donne le système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

où C est le vecteur des coefficients W_i recherchés. On peut le résoudre à la main ou matriciellement pour obtenir :

$$C = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 2/3 \\ 1/6 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Remarque 10.

La matrice intervenant dans le système linéaire (24) est en fait la matrice de Vandermonde suivante, correspondant aux points x_i donnés par

$$h = (b - a)/n, \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad x_i = a + ih, \quad (26)$$

avec, ici $n = 2$ et $a = 0, b = 1$:

$$D_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \dots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Notons que cette matrice peut s'inverser en théorie en utilisant les polynômes de Lagrange ! Voir [BM03, Exercice 2.5 p. 55]. Notons que dans le cas $n = 2$, l'inverse explicite a été calculé dans cet exercice :

$$D_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} & -\frac{x_1 + x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} & \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \\ \frac{x_0 x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} & -\frac{x_0 + x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} & \frac{1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\ \frac{x_0 x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} & -\frac{x_0 + x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} & \frac{1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{pmatrix},$$

où les x_i sont donnés par (26). Ici, on a explicitement

$$D_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Si on veut l'inverser directement, on notera que cette matrice est sensible à l'inversion numérique (car elle a un conditionnement important quand n grandit). Il est préférable d'utiliser la méthode de la question 1b pour la calculer pour n grand.

- (b) (i) Pour calculer $\Pi_2(f)$, le polynôme d'interpolation de f aux nœuds 0, 1/2, 1 en fonction de $f(0)$, $f(1/2)$, $f(1)$, on utilise la forme de Newton, en prenant bien soin de laisser les valeurs de $f(0)$, $f(1/2)$, $f(1)$ générique, comme le montre la suite.

$x_i \setminus k$	0	1	2
$x_0 = 0$	$f(0)$		
		$2f(1/2) - 2f(0)$	
$x_1 = 1/2$	$f(1/2)$		$2f(1) - 4f(1/2) + 2f(0)$
		$2f(1) - 2f(1/2)$	
$x_2 = 1$	$f(1)$		

TABLE 3. Différences divisées de f .

Pour calculer le polynôme sous la forme de Newton, on détermine tout d'abord les différences divisées $f[x_i, \dots, x_{i+k}]$ données dans le tableau 3. Ensuite, on n'utilise plus que les différences divisées qui sont encadrées et le polynôme interpolateur de degré 2, $\Pi_2(f)$, est donné par la formule :

$$\Pi_2(f)(x) = \sum_{i=0}^n f[x_0, \dots, x_i](x - x_0) \dots (x - x_{i-1}). \quad (29)$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_2(f)(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

On a successivement

$$\begin{aligned} x - x_0 &= x, \\ (x - x_0)(x - x_1) &= x^2 - 1/2 x. \end{aligned}$$

Après calculs, il vient :

$$\Pi_2(f)(x) = 2x^2 f(1) - 4x^2 f(1/2) + 2x^2 f(0) + 4xf(1/2) - 3xf(0) - xf(1) + f(0). \quad (30)$$

- (ii) L'intégrale $\mathcal{I}(\Pi_2(f))$ définie par

$$\mathcal{I}(\Pi_2(f)) = \int_0^1 \Pi_2(f)(x) dx, \quad (31)$$

s'obtient en intégrant le polynôme $\Pi_2(f)$ qui vient d'être déterminé. En intégrant les fonctions 1, x et x^2 , sur $[0, 1]$, on obtient donc finalement

$$\mathcal{I}(\Pi_2(f)) = 1/6 f(1) + 2/3 f(1/2) + 1/6 f(0). \quad (32)$$

- (iii) On cherche à trouver les coefficients W_i de telle sorte que la formule de quadrature intègre exactement les polynômes jusqu'au degré 2. Cela est donc équivalent à ce qu'elle soit exacte pour $\Pi_2(f)$, pour toute fonction f , puisque $\Pi_2(f)$ est un polynôme de degré au plus 2. C'est donc équivalent à l'égalité de $Q(\Pi_2(f))$ et de $\mathcal{I}(\Pi_2(f))$. Dans cette dernière égalité, chacune des valeurs de $\Pi_2(f)(x_i)$ est remplacée par définition par $f(x_i)$. D'après (32), on voit donc apparaître les coefficients W_i qui correspondent bien à ceux donnés par (25).

(2) Pour déterminer le degré d'exactitude (que l'on appelle aussi l'ordre) de la méthode, nous avons deux méthodes.

(a) Soit, on remarque que, en posant $a = 0$ et $b = 1$, la formule de quadrature établie (32) est équivalente à

$$Q(f) = \frac{1}{6}(b-a)(f(a) + 4f((a+b)/2) + f(b)),$$

et on reconnaît la méthode de Simpson, dont on connaît l'erreur, d'après les formules rappelées dans l'énoncé. Voir tableau 4. Ainsi, ici l'erreur est proportionnelle à $f^{(4)}(\eta)$, et donc nulle pour les

méthode	erreur
rectangle	$\frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta)$
milieu	$\frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta)$
trapèze	$-\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)$
Simpson	$-\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta)$

TABLE 4. Erreurs pour les méthodes élémentaires sur $[a, b]$; η appartient à $]a, b[$.

polynômes de degrés au plus trois, et non nulle, par exemple, pour le polynôme x^4 . Ainsi, le degré d'exactitude (appelé aussi l'ordre) de la méthode, qui correspond au plus haut degré du polynôme exactement intégré par la formule de quadrature, vaut donc 3.

(b) Si on ne reconnaît pas la méthode vue en cours, il suffit de vérifier que le plus haut degré du polynôme exactement intégré par la formule de quadrature vaut 3. Ainsi, le degré d'exactitude (que l'on appelle aussi l'ordre) de la méthode est 3.

(3) (a) Pour donner une approximation numérique de l'intégrale, on utilise la formule de quadrature déterminée; on a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \begin{pmatrix} 1/6 \\ 2/3 \\ 1/6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-1/4} \\ e^{-1} \end{pmatrix}, \\ &= 1/6 + 2/3 e^{-1/4} + 1/6 e^{-1}, \\ &\approx 0.747180428909510. \end{aligned}$$

(b) On a ici $a = 0$ et $b = 1$. D'après le tableau donné dans l'énoncé (voir tableau 4), l'erreur de la méthode de quadrature est donnée par

$$E(f) = \beta f^{(4)}(\xi), \text{ où } \xi \in [0, 1], \quad (33)$$

avec, ici,

$$\beta = -\frac{1}{2880}. \quad (34)$$

On détermine alors la dérivée à l'ordre exigé :

$$f^{(4)}(x) = 4e^{-x^2} (3 - 12x^2 + 4x^4).$$

On majore la valeur absolue de cette fonction sur $[0, 1]$ par M donné par

$$M = 12 \approx 12. \quad (35)$$

Ici, cette valeur a été obtenue grâce à la fonction fournie `maxabsfun`. Compte tenu de (33), (34) et (35), on a donc une erreur finalement majorée par

$$\varepsilon = \frac{1}{240} \approx 4.166667 \cdot 10^{-3}. \quad (36)$$

On peut aussi déterminer la valeur exacte (par une approximation très précise !) : on obtient

$$\mathcal{I} = 0.746824132812427,$$

et donc une erreur réellement commise de

$$E = 3.562961 \cdot 10^{-4},$$

qui est bien inférieure à celle donnée par (36).

Remarque 11.

La façon de déterminer les coefficients de la forme de quadrature de la question 1b est la plus efficace. C'est cette méthode qui permet à la fois de déterminer les méthodes élémentaires usuelles (rectangles, trapèzes, ...) mais aussi l'erreur de convergence associée. Voir par exemple [BM03, Chapitre 3, p. à 81 à 89].

Remarque 12.

En raisonnant comme dans la remarque 10, une autre façon de déterminer les poids W_i est de remarquer que, pour un polynôme p de degré au plus $n = 2$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 p(x) dx &= \int_0^1 \sum_{i=0}^2 p(x_i) l_i(x) dx, \\ &= \sum_{i=0}^2 p(x_i) \int_0^1 l_i(x) dx, \end{aligned}$$

où les l_i sont les polynômes de Lagrange, et donc

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad W_i = \int_0^1 l_i(x) dx.$$

Par exemple, on a

$$\begin{aligned} W_0 &= \int_0^1 2x^2 - 3x + 1 dx, \\ &= 1/6, \end{aligned}$$

ce qui est le premier coefficient déjà déterminé.

Remarque 13.

De façon plus générale, la méthode de quadrature étudiée, pour n quelconque est appelée la méthode de Newton-Cotes fermée. On peut calculer les coefficients sur tout intervalle $[a, b]$. Les coefficients et les ordres pour les premières valeurs de n sont donnés dans le tableau 5. Pour obtenir les coefficients sur un autre intervalle $[a, b]$ quelconque, il suffit de multiplier chacun de ces coefficients par $b - a$. Les points x_i correspondant sont naturellement donnés par $x_0 = 0$ si $n = 0$ et sinon

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad x_i = a + ih \text{ où } h = (b - a)/n.$$

En pratique, on choisit des valeurs de n pas trop élevées et souvent la méthode de Simpson suffira largement. De plus, au delà, d'une certaine valeur de n_0 de n (pour $n_0 = 8$) les coefficients changent de signe ce qui favorise les propagations d'erreur d'arrondis.

valeurs de n	nom	coefficients	ordre
0	rectangle	1	0
1	trapèze	1/2, 1/2	1
2	Simpson	1/6, 2/3, 1/6	3
3	Simpson 3/8	1/8, 3/8, 3/8, 1/8	3
4	Boole-Villarceau	$\frac{7}{90}, \frac{16}{45}, 2/15, \frac{16}{45}, \frac{7}{90}$	5
5		$\frac{19}{288}, \frac{25}{96}, \frac{25}{144}, \frac{25}{144}, \frac{25}{96}, \frac{19}{288}$	5
6	Weddle-Hardy	$\frac{41}{840}, \frac{9}{35}, \frac{9}{280}, \frac{34}{105}, \frac{9}{280}, \frac{9}{35}, \frac{41}{840}$	7
7		$\frac{751}{17280}, \frac{3577}{17280}, \frac{49}{640}, \frac{2989}{17280}, \frac{2989}{17280}, \frac{49}{640}, \frac{3577}{17280}, \frac{751}{17280}$	7
8		$\frac{989}{28350}, \frac{2944}{14175}, -\frac{464}{14175}, \frac{5248}{14175}, -\frac{454}{2835}, \frac{5248}{14175}, -\frac{464}{14175}, \frac{2944}{14175}, \frac{989}{28350}$	9
9		$\frac{2857}{89600}, \frac{15741}{89600}, \frac{27}{2240}, \frac{1209}{5600}, \frac{2889}{44800}, \frac{2889}{44800}, \frac{1209}{5600}, \frac{27}{2240}, \frac{15741}{89600}, \frac{2857}{89600}$	9

TABLE 5. Noms, coefficients et ordres des 10 premières méthodes (sur l'intervalle $[0, 1]$).

Remarque 14.

On peut montrer que toute méthode de Newton-Cotes fermée à $n + 1$ (avec n non nul) points de support est d'ordre n si n est impair et d'ordre $n + 1$ si n est pair. Cela généralise les propriétés vues en cours (voir par exemple [BM03, remarque 3.20]) : la méthode du trapèze ($n = 1$) est d'ordre 1, celle de Simpson ($n = 2$) est d'ordre 3. On peut aussi montrer que comme pour les méthodes déjà vues en cours (comme dans le tableau 4) une méthode de Newton-Cotes d'ordre m et à $n + 1$ points possède une erreur $E_n(f)$ qui vérifie : il existe $\alpha_n > 0$ tel que, pour tout a, b , pour toute fonction $f \in C^{m+1}([a, b])$,

$$E_n(f) = \alpha_n(b - a)^{m+2} f^{(m+1)}(\xi), \text{ où } \xi \in [a, b]. \quad (37)$$

Plus précisément, $m = n$ si n est impair et $m = n + 1$ si n est pair, c'est-à-dire : si n est pair (non nul) il existe $\alpha_n > 0$ tel que, pour tout a, b , pour toute fonction $f \in C^{n+2}([a, b])$,

$$E_n(f) = \alpha_n(b - a)^{n+3} f^{(n+2)}(\xi), \text{ où } \xi \in [a, b], \quad (38)$$

et si n est impair, il existe $\alpha_n > 0$ tel que, pour tout a, b , pour toute fonction $f \in C^{n+1}([a, b])$,

$$E_n(f) = \alpha_n(b - a)^{n+2} f^{(n+1)}(\xi), \text{ où } \xi \in [a, b]. \quad (39)$$

Par exemple, d'après le tableau 4, pour $n = 1$, on a $\alpha_1 = -1/12$ et pour $n = 2$, on a $\alpha_2 = -1/2880$. De façon plus générale, on peut calculer les constantes α_n en remarquant que l'erreur commise pour le polynôme x^{m+1} (si m est l'ordre de la formule et n le degré non nul) vaut

$$\tilde{E}_n = \int_a^b x^{m+1} dx - \sum_{i=0}^n W_i x_i^{m+1}, \quad (40)$$

cette erreur non nulle pouvant être calculée informatiquement. En utilisant (37), cette erreur vaut aussi

$$\tilde{E}_n = \alpha_n(b - a)^{m+2} (m + 1)!. \quad (41)$$

Bref, grâce à (41), on a l'expression explicite et algébrique de α_n , pour n non nul :

$$\alpha_n = \frac{\tilde{E}_n}{(b - a)^{m+2} (m + 1)!}, \quad (42)$$

où $\tilde{E}_n$ est déterminée de façon informatique grâce à (40). Si $n = 0$, on obtient α_0 grâce au tableau 4. Voir par exemple le tableau 6.

valeurs de n	α_n
0	$1/2$
1	$-1/12$
2	$-\frac{1}{2880}$
3	$-\frac{1}{6480}$
4	$-\frac{1}{1935360}$
5	$-\frac{1}{37800000}$
6	$-\frac{1}{1567641600}$
7	$-\frac{167}{426924691200}$
8	$-\frac{37}{62783697715200}$
9	$-\frac{173}{458209960750080}$

TABLE 6. Coefficients α_n des 10 premières méthodes.

Remarque 15.

Pour plus de détails sur les formules de Newton-Cotes, on pourra consulter [CM84] et plus particulièrement le chapitre 2 et l'exercice 2.3 ou encore

http://fr.wikipedia.org/wiki/Formule_de_Newton-Cotes

http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/mt40/medianMT40_A03.zip

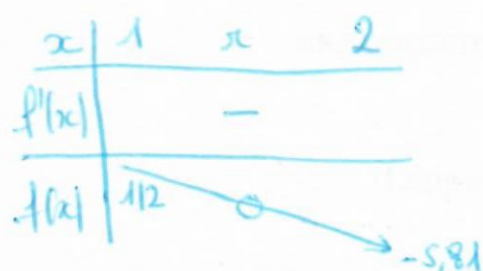
http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/mt40/mediancorrigeMT40_A03.zip

Références

- [BM03] J. BASTIEN et J.-N. MARTIN. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4 ième étage). Voir <https://www.dunod.com/sciences-techniques/introduction-analy>. Paris : Dunod, 2003. 392 pages.
- [CM84] M. CROUZEIX et A. L. MIGNOT. *Analyse numérique des équations différentielles*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1984, pages viii+171.

Exercice 0: $f(x) = \ln x - 2x + \frac{5}{2} = 0$. $I = [1, 2]$.

1) $f'(x) = \frac{1}{x} - 2 < 0 \quad \forall x \in [1, 2]$.



$\rightarrow$ 1 seule racine α dans I

2) Initialisation: x_0 et ε donnés.

Iterations: Par $n = 0, 1, 2, \dots$ $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\ln(x_n) - 2x_n + \frac{5}{2}}{\frac{1}{x_n} - 2}$

Test d'arrêt: fin si $\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} \right| < \varepsilon$.

Ordre de convergence: $\left| \begin{array}{l} \text{Si } f'(\alpha) \neq 0 \rightarrow \text{convergence au moins quadratique} \\ \text{Si } f'(\alpha) \neq 0 \text{ et } f''(\alpha) \neq 0 \rightarrow \text{convergence quadratique} \end{array} \right.$

$f'(x) = ? \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \forall x \in [1, 2]$.

$\Rightarrow f'(x)$ décroissante et $< 0 \Rightarrow f'(x) \neq 0$

$f''(x) = ? \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3} > 0 \quad \forall x \in [1, 2]$.

$\Rightarrow f''(x)$ croissante et $< 0 \Rightarrow f''(x) \neq 0$.

donc cette méthode est d'ordre 2 (convergence quadratique).

3) $x_0 = 3/2 \quad x_1 = x_0 + \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \approx 1,4291 \quad x_2 = x_1 + \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 1,4282$.

4) On a vu: $e_{n+1} = g'(x) e_n + \frac{g''(x)}{2} e_n^2 + \frac{g'''(x)}{6} e_n^3 + \dots$

avec $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha \quad e_n = x_n - \alpha$ par la méthode du point fixe

Ici $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ (cas particulier de la méthode de Newton)

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

$g'(\alpha) = \frac{f(\alpha)f''(\alpha)}{f'(\alpha)^2}$ or α racine $\Rightarrow f(\alpha) = 0$
donc $\boxed{g'(\alpha) = 0}$

$\Rightarrow x_{n+1} - \alpha = \frac{g''(\alpha)}{2} (x_n - \alpha)^2 + \dots \Rightarrow |x_{n+1} - \alpha| \leq C |x_n - \alpha|^2$
avec $C \rightarrow \left| \frac{g''(\alpha)}{2} \right| \approx 0,39$

$$\text{Donc } e_{n+1} \leq C e_n^2$$

$$\Rightarrow e_1 \leq C e_0^2$$

$$e_2 \leq C e_1^2 \leq C (C e_0^2)^2 = C^3 e_0^4 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 9,76 \cdot 10^{-4}$$

Erreur de l'ordre de 10^{-3} .

Exercice 2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ 1) $\begin{cases} L_{11}=2 \\ L_{21}=3 \\ L_{31}=4 \end{cases} \quad \begin{cases} U_{12}=\frac{1}{2} \\ U_{13}=-\frac{4}{2}=-2 \end{cases}$

$$\begin{cases} L_{22} = 3 - 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ L_{32} = 5 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right) = 3 \end{cases} \quad U_{23} = \frac{-5 - 3 \times (-2)}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$L_{33} = -2 - 4 \times (-2) - 3 \times \frac{2}{3} = 4.$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1/2 & -2 \\ 3 & 3/2 & 2/3 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3/2 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ et } U = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -2 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2) AX=b \Rightarrow LUX=b \Rightarrow \begin{cases} UX=y \\ LY=b \end{cases} \text{ avec } b = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

• Calcul de y par descente: $\begin{cases} 2y_1 = 6 \Rightarrow y_1 = 3 \\ 3y_1 - \frac{3}{2}y_2 = 8 \Rightarrow y_2 = -\frac{2}{3} \\ 4y_1 + 3y_2 + 4y_3 = 6 \Rightarrow y_3 = -1 \end{cases}$

$$y = \begin{bmatrix} 3 \\ -2/3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

• Calcul de x par remontée:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_3 = -1 \\ x_2 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3} \Rightarrow x_2 = 0 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 2x_3 = 3 \Rightarrow x_1 = 1 \end{cases}$$

Exercice ③

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad y(0) = 1$$

Solution exacte: $y(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

$y \in \text{Euler}$ pour $y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$ avec $f(x_n, y_n) = \frac{x_n}{y_n}$.

• $h=0,1$: $y_0=1, x_0=0,$

$$n=0 \rightarrow y_1 = y_0 + h \frac{x_0}{y_0} = 1 + 0,1 \times \frac{0}{1} = 1.$$

$$x_1 = 0,1$$

$$n=1 \rightarrow y_2 = y_1 + h \frac{x_1}{y_1} = 1 + 0,1 \times \frac{0,1}{1} = 1,01.$$

$$x_2 = 0,2$$

$$\text{donc } \boxed{y(0,2) \approx 1,01}$$

• $h=0,2$: $y_0=1, x_0=0.$

$$n=0 \rightarrow y_1 = y_0 + h \frac{x_0}{y_0} = 1 + 0,2 \times 0 = 1.$$

$$x_1 = 0,2.$$

$$\text{donc } \boxed{y(0,2) \approx 1}$$

$$\text{Erreur relative pour } h=0,1: \text{Err} = \frac{1,01 - 1,0198}{1,0198} \times 100 = 0,9644\%$$

$$h=0,2: \text{Err} = \frac{1 - 1,0198}{1,0198} \times 100 = 1,9419\%.$$

Erreur divisée par 2 qd h est divisé par 2 $\rightarrow$ ordre 1.

2) RK4 - $h=0,2$. $x_1 = x_0 + h = 0,2.$

$$x_{1/2} = x_0 + h/2 = 0,1.$$

$$k_1 = h f(x_0, y_0) = 0,2 \times \frac{x_0}{y_0} = 0.$$

$$k_2 = h f(x_{1/2}, y_0) = 0,2 \times \frac{x_{1/2}}{y_0} = 0,02.$$

$$k_3 = h f(x_{1/2}, y_0 + \frac{k_2}{2}) = 0,2 \times \frac{x_{1/2}}{y_0 + \frac{k_2}{2}} = 0,019802.$$

$$k_4 = h f(x_1, y_0 + k_3) = 0,2 \times \frac{x_1}{y_0 + k_3} = 0,039223.$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1,0198045.$$

$$\boxed{y(0,2) \approx 1,0198045.}$$

$$\text{Erreur} \approx 6 \cdot 10^{-5} \%$$

Résultat beaucoup plus précis.