Mécanique 3A MNB Automne 2018

Corrigé de l'examen du 16 Janvier 2019

Correction de l'exercice 1.

(1) Il est naturellement préférable d'utiliser la forme de Newton pour le calcul de l'interpolation, néanmoins, le calcul utilisant la forme de Lagrange est aussi présenté.

(a) Chacun des polynômes de Lagrange l_i (de degré 2) est donné par la formule :

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \tag{1}$$

On a donc successivement

$$l_0(x) = \frac{(x-2)\,(x-3)}{(0-2)\,(0-3)},$$
$$l_1(x) = \frac{(x)\,(x-3)}{(2)\,(2-3)},$$
$$l_2(x) = \frac{(x)\,(x-2)}{(3)\,(3-2)}.$$

soit encore après calculs :

$$l_0(x) = 1/6\,x^2 - 5/6\,x + 1, \tag{2a}$$
$$l_1(x) = -1/2\,x^2 + 3/2\,x, \tag{2b}$$
$$l_2(x) = 1/3\,x^2 - 2/3\,x. \tag{2c}$$

Ensuite, le polynôme interpolateur de degré 2, $\Pi_2(g)$, est donné par la formule :

$$\Pi_2(g)(x) = \sum_{i=0}^{n} g(x_i) l_i(x). \tag{3}$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_2(g)(x) = g(x_0)l_0(x) + g(x_1)l_1(x) + g(x_2)l_2(x).$$

Après calculs, il vient :

$$\Pi_2(g)(x) = -5/2\,x^2 + 13/2\,x - 1. \tag{4}$$

(b)

Pour calculer le polynôme sous la forme de Newton, on détermine tout d'abord les différences divisées $g[x_i, ..., x_{i+k}]$ données dans le tableau 1. Ensuite, on n'utilise plus que les différences divisées qui sont encadrées et le polynôme interpolateur est donné par la formule :

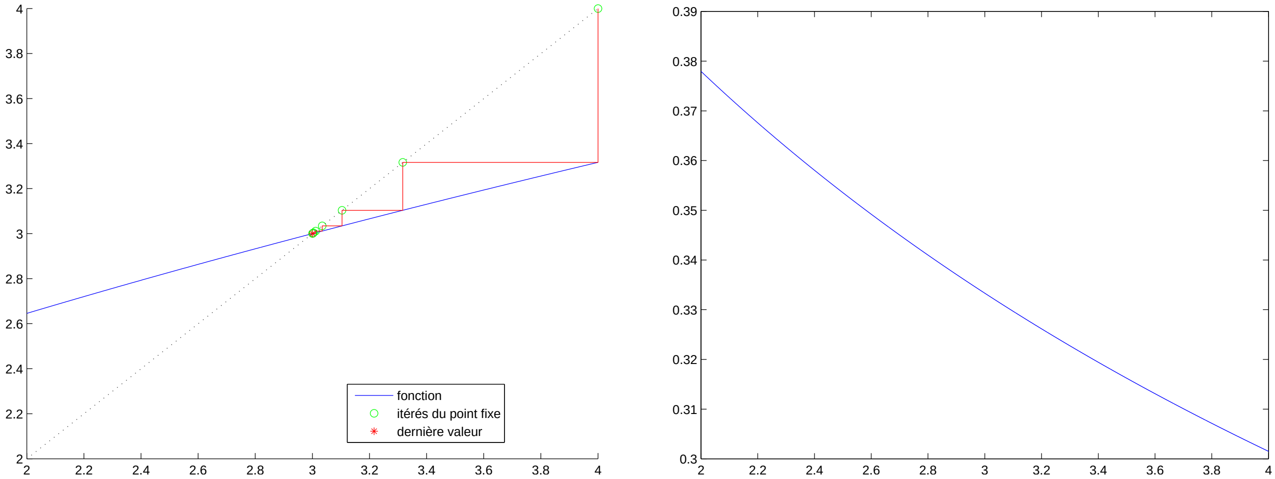
$$\Pi_2(g)(x) = \sum_{i=0}^{n} g[x_0, ..., x_i](x - x_0)...(x - x_{i-1}). \tag{5}$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_2(g)(x) = g[x_0] + g[x_0, x_1](x - x_0) + g[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

$x_i \setminus k$	0	1	2
$x_0 = 0$	$\boxed{-1}$		
		$\boxed{3/2}$	
$x_1 = 2$	2		$\boxed{-5/2}$
		-6	
$x_2 = 3$	-4		

TABLE 1. Différences divisées de g.



(a) Le graphe de la fonction g et les premières valeurs de la suite x_n.

(b) Le graphe de la fonction $|g'|$.

FIGURE 1. Les graphes des fonctions g et $|g'|$.

On a successivement

$$x - x_0 = x,$$
$$(x - x_0)(x - x_1) = x^2 - 2\,x.$$

Après calculs, on retrouve donc bien le polynôme déterminé par la méthode de Lagrange (voir équation (4)).

(2) Pour $\alpha = 1$, on obtient alors :

$$\Pi_2(g)(\alpha) = 3 \approx 3,$$

ce qui constitue une valeur approchée de $g(\alpha)$.

Correction de l'exercice 2.

Non rédigé

Correction de l'exercice 3.

(1) (a) (i) On a

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,x+3}}. \tag{6}$$

(ii) Sur la figure 1(a), on constate que la fonction g semble avoir un point fixe, correspondant à la valeur

$$r = 3.$$

(iii) Sur la figure 1(b), on constate que les valeurs de la fonction $|g'|$ sont inférieures à 0.377964.

Démontrons cela rigoureusement. La dérivée de la fonction g est monotone et g' prend donc ses valeurs entre $g'(a)$ et $g'(b)$. Sa valeur maximale est donc donnée par

$$\alpha = 0.3779644730092$$

(iv) Sur la figure 1(a), on constate que l'intervalle $[a, b]$ est g-stable.

Démontrons cela rigoureusement. La fonction g est croissante ; ainsi, sur l'intervalle $[a, b]$, elle prend les valeurs $[g(a), g(b)]$. On vérifie que $g(a) = 2.6457513110646$ et $g(b) = 3.3166247903554$ sont bien dans l'intervalle $[a, b]$.

(b) D'après les points 1(a)iii et 1(a)iv, les deux hypothèses du théorème A.13 (annexes du corrigé de TD) sont vérifiées et donc g admet un point fixe unique r dans $I = [a, b]$ et, pour tout x_0 de I, la suite (x_n) est définie et converge vers r. Cette valeur est nécessairement celle donnée dans l'énoncé, par unicité de celle-ci !

(2) Appliquons le résutat de la proposition A.15 (annexes du corrigé de TD) ; on choisit n définit par (A.21) (annexes du corrigé de TD), où la valeur de k a été donnée plus haut, ce qui donne numériquement

$$n = 8. \tag{7}$$

(3) On obtient alors progressivement :

$$\begin{aligned}
&x_0 = 4\,;\\
&x_1 = g(x_0) = 3.3166247903554\,;\\
&x_2 = g(x_1) = 3.1037476670488\,;\\
&x_3 = g(x_2) = 3.0343854953017\,;\\
&x_4 = g(x_3) = 3.0114400194265\,;\\
&x_5 = g(x_4) = 3.0038109192912\,;\\
&x_6 = g(x_5) = 3.0012700375978\,;\\
&x_7 = g(x_6) = 3.0004233159999\,;\\
&x_8 = g(x_7) = 3.0001411020150.
\end{aligned}$$

Remarque 1. Si on calcule l'erreur réellement commise, en utilisant la valeur de x_n déterminée ci-dessous et la valeur de r donnée dans l'énoncé, on a

$$|x_n - r| = |3.0001411020150 - 3| = 0.0001411020150,$$

ce qui est bien inférieur à la valeur de ε donnée dans l'énoncé.

Remarque 2. Si on utilise la majoration donnée par (D.13) (annexes du corrigé de TD), on obtient

$$|x_n - r| \leq 0.0001714803342,$$

qui est bien inférieur à la valeur de ε donnée dans l'énoncé.

Correction de l'exercice 4.

Non rédigé

Correction de l'exercice 5.
On obtient la matrice triangulaire supérieure suivante

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec un second membre égal à

$$c = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La résolution du système triangulaire supérieur fournit donc la solution,

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

où l'on a opéré la permutation des colonnes données par $\{3, 2, 1\}$. Après permutation des colonnes, on a donc la solution

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que

$$AX = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix} = B.$$