MNB - Examen 2019-2020

Ex ① $f(x) = \ln x - 2x + \frac{5}{2} = 0$

1) $f'(x) = \frac{1}{x} - 2$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

x	1		2
$f''(x)$		$-$	
$f'(x)$	-1	$\searrow$ $-$	$-3/2$
$f(x)$	$1/2$	$\searrow$ 0	$\ln(2) - \frac{3}{2}$ $-0{,}807$

$f(x)$ strictement décroissante sur $[1, 2]$

$f(1) > 0$, $f(2) < 0$

$\Rightarrow$ 1 seul zéro $r \in [1,2]$.

2) Méthode de Newton : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

C'est une méthode au moins quadratique (ordre 2)

C'est une méthode de point fixe particulière avec $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Or $e_{n+1} = g'(r)e_n + \frac{g''(r)}{2}e_n^2 + \frac{g'''(r)}{6}e_n^3 + \dots$

$$g'(x) = \frac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2} \quad \text{donc } g'(r) = 0 \text{ car } f(r) = 0.$$

D'où ici $e_{n+1} = \frac{g''(r)}{2}e_n^2$. avec $g''(r) = \frac{f''(r)}{2f'(r)}$

(calculé en cours)

Comme $f''(r) < 0$ donc $f''(r) \neq 0$ et $f'(r) \neq 0$,

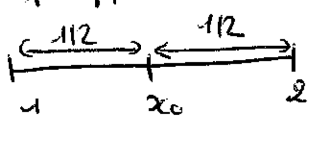
la méthode est d'ordre $\underline{2}$.

3) $x_0 = 1$, $x_1 = x_0 - \frac{\ln(x_0) - 2x_0 + 5/2}{1/x_0 - 2} = 3/2$.

$$x_2 = x_1 - \frac{\ln(x_1) - 2x_1 + 5/2}{1/x_1 - 2} = 1{,}4291$$

4) D'après 2), on a $C = \left|\frac{f''(r)}{2f'(r)}\right|$

$e_0 = |x_0 - r| \leq \frac{1}{2}$



$$e_1 \leq \frac{1}{2}(e_0)^2 = \frac{1}{8}$$

$$e_2 \leq \frac{1}{2} e_1^2 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{128}$$

$$e_3 \leq \frac{1}{2} e_2^2 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{128}\right)^2 = \frac{1}{32768}.$$

$$e_4 \leq \frac{1}{2} e_3^2 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{32768}\right)^2 \simeq 4{,}66 \cdot 10^{-10}.$$

Ex ② : $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt \simeq \frac{2}{3}\left[2g(-\frac{1}{2}) - g(0) + 2g(\frac{1}{2})\right] = I(g)$

1) Degré d'exactitude :

$I(1) = \frac{2}{3}[2-1+2] = 2.$ $\quad\int_{-1}^{1} 1\,dx = [x]_{-1}^{1} = 2.$

$I(x) = \frac{2}{3}\left[2\times(-\frac{1}{2}) - 1\times 0 + 2\times\frac{1}{2}\right] = 0$ $\quad\int_{-1}^{1} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0.$

$I(x^2) = \frac{2}{3}\left[2\times(-\frac{1}{2})^2 - 1\times 0^2 + 2\times(\frac{1}{2})^2\right] = \frac{2}{3}$ $\quad\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}.$

$I(x^3) = \frac{2}{3}\left[2\times(-\frac{1}{2})^3 - 0 + 2\times(\frac{1}{2})^3\right] = 0$ $\quad\int_{-1}^{1} x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 0$

$I(x^4) = \frac{2}{3}\left[2\times(-\frac{1}{2})^4 + 2\times(\frac{1}{2})^4\right] = \frac{1}{6} \neq \int_{-1}^{1} x^4\,dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}.$

$\boxed{r = 4.}$

2) $\int_{-1}^{1} x e^{-x}\,dx = 2\left[2\times(-\frac{1}{2})e^{+1/2} + 2\times(\frac{1}{2})e^{-1/2}\right] \simeq -0{,}695$

Rq : solution exacte : $-2e^{-1} \simeq -0{,}736$ primitive : $-(x+1)e^{-x}$

3) $\int_{1}^{3} x \ln x\,dx = \int_{-1}^{1} (X+2)\ln(X+2)\,dX$ avec $X = x-2$, $dX = dx$.

$$\simeq \frac{2}{3}\left[2\times(-\frac{1}{2}+2)\ln(-\frac{1}{2}+2) - 2\ln 2 + 2\times(\frac{1}{2}+2)\ln(\frac{1}{2}+2)\right] \simeq 2{,}961$$

Rq : Solution exacte : $-2 + \frac{9}{2}\ln 3 \simeq 2{,}944$ primitive : $\frac{x^2}{4}(2\ln x - 1)$

4) $\frac{E_{h=1}}{E_{h=0,5}} \simeq 15{,}86 \simeq 2^4$

ordre de convergence : 4.

$\frac{E_{h=0,5}}{E_{h=0,25}} \simeq 15{,}93 \simeq 2^4$

Ex 3 : $\begin{cases} y'(t) = -e^t y^2(t) \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\quad f(t,u) = -e^t u^2$.

1) a) $h = 0{,}1$. EULER PROGRESSIF : $u_{n+1} = u_n + h f(t_n, u_n)$.

$u_0 = \frac{1}{2}$ $\quad t_0 = 0$

- $u_1 = u_0 + h f(t_0, u_0) = \frac{1}{2} + 0{,}1 \times (-e^0 u_0^2) = 0{,}475$.

  $t_1 = t_0 + h = 0{,}1$

- $u_2 = u_1 + h f(t_1, u_1) = 0{,}475 + 0{,}1(-e^{0,1} \times (0{,}475^2)) \simeq 0{,}4051$

  $t_2 = 0{,}2$ $\quad$ Donc $\boxed{y(0{,}2) \simeq 0{,}4051}$

b) Ordre 1. Il faut choisir h suffisamment petit pour que le schéma soit stable car le schema d'euler progressif présente des conditions de stabilité.

$\begin{cases} M z'' + B z' |z'| + k z = 0 \\ z(0) = 0, \; z'(0) = 1 \end{cases}$ $\quad M = 10, \; B = 50, \; k = 200$.

2) a) $\begin{cases} z_1 = z \\ z_2 = z' \end{cases}$ donc $\begin{cases} z'_1 = z_2 \\ 10 z'_2 + 50 z_2 |z_2| + 200 z_1 = 0 \end{cases}$.

$\Rightarrow \begin{cases} z'_1 = z_2 \\ z'_2 = -5 z_2 |z_2| - 20 z_1 \\ z_1(0) = 0 \\ z_2(0) = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{aligned} f_1(t, z_1, z_2) &= z_2. \\ f_2(t, z_1, z_2) &= -5 z_2 |z_2| - 20 z_1. \end{aligned}$

b) $t_0 = 0$; $u_{1,0} = 0$, $u_{2,0} = 1$, $h = 0{,}1$

- $u_{1,1} = u_{1,0} + h f_1(t_0, u_{1,0}, u_{2,0}) = 0 + 0{,}1 \times u_{2,0} = 0{,}1$.
- $u_{2,1} = u_{2,0} + h f_2(t_0, u_{1,0}, u_{2,0}) = 1 + 0{,}1 \times (-5 u_{2,0} \cdot |u_{2,0}| - 20 u_{1,0})$
  $= 1 + 0{,}1 \times (-5) = 0{,}5$.
- $t_1 = t_0 + h = 0{,}1$.

$z(0{,}1) = z_1(0{,}1) \simeq u_{1,1} = 1{,}1$.

Ex (4) : $Ax = b$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & 8 \\ 2 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 21 \end{pmatrix}$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

1) Gauss avec pivotage global.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 7 \\ -2 & 0 & 8 & 6 \\ 2 & \boxed{9} & 1 & 21 \end{array}\right) \quad l_1 \leftrightarrow l_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \boxed{9} & 1 & 21 \\ -2 & 0 & 8 & 6 \\ 1 & 0 & 6 & 7 \end{array}\right) \quad c_1 \leftrightarrow c_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{9} & 2 & 1 & 21 \\ 0 & -2 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \end{array}\right) \quad \vec{o} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

9 est pivot $\qquad c_2 \leftrightarrow c_3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 1 & 2 & 21 \\ 0 & \boxed{8} & -2 & 6 \\ 0 & 6 & 1 & 7 \end{array}\right) \quad \vec{o} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

8 est pivot

$l_3 \leftarrow l_3 - \frac{6}{8} l_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 1 & 2 & 21 \\ 0 & 8 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5/2 & 5/2 \end{array}\right) \quad \vec{o} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$7 - \frac{6}{8} \cdot 6 = 7 - \frac{36}{8} = 7 - \frac{9}{2} = \frac{5}{2}$.

$1 - \frac{6}{8} \times (-2) = 1 + \frac{12}{8} = \frac{5}{2}$.

2) Résolution par remontée :

$\frac{5}{2} x_1 = \frac{5}{2} \Rightarrow x_1 = 1$.

$8x_3 - 2x_1 = 6 \Rightarrow 8x_3 = 8 \Rightarrow x_3 = 1$.

$9x_2 + x_3 + 2x_1 = 21 \Rightarrow 9x_2 = 21 - 1 - 2 = 18$.

$\Rightarrow x_2 = 2$.

donc $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$