Mécanique 3A MNB — Automne 2021

Corrigé de l'examen du 24 Janvier 2022

Ce corrigé présente uniquement les résultats, tous obtenus à partir de Matlab. On consultera le corrigé manuscrit complet, disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MNB/examcormanuMNBA21.pdf`*.* *Tous les scripts nécessaires sont disponibles dans* `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MNB/fichiers_matlab/examcorMNBA21.zip`*. En dézippant ce fichier, vous obtiendrez cinq répertoires de nom* `exercicej` *pour* $j \in \{1, ..., 5\}$*, chacun d'eux contenant un scritp de nom* `exoj` *à faire tourner. Ces scripts utilisent certaines fonctions annexes de [o1], disponibles sur internet à l'adresse suivante :*
`https://www.dunod.com/sciences-techniques/introduction-analyse-numerique-applications-sous-matlab`.

Correction de l'exercice 1.

(1) On utilise les données, où la viscosité ν joue le rôle d'abscisse et la température T joue le rôle d'ordonnée. On obtient

$$T = 20.37037.$$

(2) On utilise les données, où la viscosité ν joue le rôle d'ordonnée et la température T joue le rôle d'abscisse. On obtient

$$\nu = 0.89400.$$

Correction de l'exercice 2.

Itération i	a_i	b_i	n_i	s_i
0	0.0000000	3.0000000	3.0000000	0.0000000
1	1.5000000	3.0000000	2.2962963	3.0000000
2	1.5000000	2.2500000	2.0365874	0.8888889
3	1.8750000	2.2500000	2.0006534	1.4747275
4	1.8750000	2.0625000	2.0000002	2.5956210

Table 1. Les résultats obtenus pour les méthode de bisssection (a_i et b_i), de Newton (n_i) et de la sécante (s_i)

Voir les différents résultats dans le tableau 1.

Correction de l'exercice 3.

(1)

Voir le tableau 2 page suivante.

(2)

Voir le tableau 3 page suivante. Les erreurs les plus faibles correspondent à la méthode d'Euler modifiée (d'ordre 2) tandis que la méthode d'Euler progressif est d'ordre 1.

Itération i	Temps t	Euler progressif	Euler modifié (RK2)	Valeurs exactes
0	0.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
1	0.6000000	1.0000000	1.1800000	1.1488116
2	1.2000000	1.3600000	1.5364000	1.5011942

Table 2. Les résultats obtenus pour les méthodes d'Euler progressif et modifiée (RK2)

Itération i	Euler progressif	Euler modifié (RK2)
0	0.00000	0.00000
1	0.14881	0.03119
2	0.14119	0.03521

Table 3. Les erreurs obtenues pour les méthodes d'Euler progressif et modifiée (RK2)

(3)

De façon générale, on obtient le développement limité suivant :

$$y(t_{n+1}) = G(h, t_n, y(t_n)),$$

avec

$$G(h,t,y) = y + hf(t,y) + 1/2\, h^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} f(t,y) + \left(\frac{\partial}{\partial y} f(t,y)\right) f(t,y)\right).$$

Dans le cas où $f(t,y) = 1 + t - y$, on obtient :

$$G(h,t,y) = y + h\,(1 + t - y) + 1/2\, h^2 \,(-t + y)\,.$$

Si on remplace $y(t_n)$ par son approximation y_n, on obtient donc le schéma numérique suivant :

$$y_{n+1} = y_n + h\,(1 + t_n - y_n) + 1/2\, h^2 \,(-t_n + y_n)\,.$$

Pour ce calcul, on pourra consulter par exemple [o1, section 5.2 p. 197, exercice 5.2 p. 213, et TP 5.C p. 219].

(4)

Itération i	temps t	Valeurs
0	0.0000000	1.0000000
1	0.6000000	1.1800000
2	1.2000000	1.5364000

Table 4. Les résultats obtenus avec la méthode de Taylor

Voir le tableau 4.

(5)

En comparant les tableaux 2 et 4, on constate que la méthode de Taylor coïncide avec la méthode d'Euler modifiée, *ce qui est vrai en fait uniquement dans certains cas particuliers*, ici pour des expressions simples de f.

Correction de l'exercice 4.

(1) On obtient
$$I \approx \frac{32}{15} = 2.1333333.$$
(2) On obtient
$$I \approx \frac{148}{65} = 2.2769231.$$

Remarque 1. La valeur exacte de l'intégrale est donnée par
$$I = 2\ \arctan(2) = 2.2142974.$$
On obtient donc les erreurs suivantes :
$$E = 0.081,$$
$$E = 0.063.$$

Correction de l'exercice 5.
À la fin de l'algorithme, on obtient la matrice triangulaire supérieure (augmentée) suivante :
$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\ 0 & 2 & -1/2 & 3/2 & 8 \\ 0 & 0 & 5/2 & 9/2 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -2/5 & -4/5 \end{pmatrix},$$
et la résolution fournit
$$x = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Références

[o1] J. Bastien et J.-N. Martin. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4 ième étage). Voir `https://www.dunod.com/sciences-techniques/introduction-analyse-numerique-applications-sous-matlab`. Paris : Dunod, 2003. 392 pages.