Mécanique 3A MNB

Automne

Corrigé de l'examen de TD du 15 octobre 2019

Correction de l'exercice 1.

(1) Il est naturellement préférable d'utiliser la forme de Newton pour le calcul de l'interpolation, néanmoins, le calcul utilisant la forme de Lagrange est aussi présenté.

(a) Chacun des polynômes de Lagrange l_i (de degré 2) est donné par la formule :

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \tag{1}$$

On a donc successivement

$$l_0(x) = \frac{(x-2)\,(x-3)}{(0-2)\,(0-3)},$$
$$l_1(x) = \frac{(x)\,(x-3)}{(2)\,(2-3)},$$
$$l_2(x) = \frac{(x)\,(x-2)}{(3)\,(3-2)}.$$

soit encore après calculs :

$$l_0(x) = 0.166667x^2 - 0.833333x + 1, \tag{2a}$$
$$l_1(x) = -0.500000x^2 + 1.500000x, \tag{2b}$$
$$l_2(x) = 0.333333x^2 - 0.666667x. \tag{2c}$$

Ensuite, le polynôme interpolateur de degré 2, $\Pi_2(g)$, est donné par la formule :

$$\Pi_2(g)(x) = \sum_{i=0}^{n} g(x_i) l_i(x). \tag{3}$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_2(g)(x) = g(x_0)l_0(x) + g(x_1)l_1(x) + g(x_2)l_2(x).$$

Après calculs, il vient :

$$\Pi_2(g)(x) = 0.705719x^2 - 2.028203x + 0.680231. \tag{4}$$

(b)

Pour calculer le polynôme sous la forme de Newton, on détermine tout d'abord les différences divisées $g[x_i, ..., x_{i+k}]$ données dans le tableau 1. Ensuite, on n'utilise plus que les différences divisées qui sont encadrées et le polynôme interpolateur est donné par la formule :

$$\Pi_2(g)(x) = \sum_{i=0}^{n} g[x_0, ..., x_i](x - x_0)...(x - x_{i-1}). \tag{5}$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_2(g)(x) = g[x_0] + g[x_0, x_1](x - x_0) + g[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

$x_i \setminus k$	0	1	2
$x_0 = 0$	$\boxed{0.680231}$		
		$\boxed{-0.616765}$	
$x_1 = 2$	-0.553299		$\boxed{0.705719}$
		1.500391	
$x_2 = 3$	0.947093		

TABLE 1. Différences divisées de g.

On a successivement

$$\begin{aligned} x - x_0 &= x, \\ (x - x_0)(x - x_1) &= x^2 - 2x. \end{aligned}$$

Après calculs, on retrouve donc bien le polynôme déterminé par la méthode de Lagrange (voir équation (4)).

(2) Pour $\alpha = 1$, on obtient alors :

$$\Pi_2(g)(\alpha) = -0.642253,$$

ce qui constitue une valeur approchée de $g(\alpha)$.

Correction de l'exercice 2.

(1) (a) En utilisant le tableau A.3 (annexes du corrigé de TD), on détermine la valeur approchée avec la méthode élémentaire du trapèze :

$$I^T = 1/2 \sin(1/5) \tag{6}$$

soit

$$I^T = 0.09933466539753. \tag{7}$$

(b) On obtient les dérivées successives de f :

$$f'(x) = 2/5 \cos\left(1/5\, x^2\right) x\,; \tag{8a}$$

$$f''(x) = -\frac{4}{25} \sin\left(1/5\, x^2\right) x^2 + 2/5 \cos\left(1/5\, x^2\right). \tag{8b}$$

Si on dérive de nouveau la fonction f'', on obtient

$$f^{(3)}(x) = -\frac{8}{125} \cos\left(1/5\, x^2\right) x^3 - \frac{12}{25} \sin\left(1/5\, x^2\right) x.$$

Chacune des deux fonctions $g_1(x) = \frac{12}{25} \sin\left(1/5\, x^2\right) x$ et $g_2(x) = \frac{8}{125} \cos\left(1/5\, x^2\right) x^3$ est positive. En effet, pour tout $x \in [0,1]$, $x^2/5$ appartient à $[0, 1/5] \subset [0, \pi/2]$. Les fonctions sinus et cosinus sont positives sur $[0, \pi/2]$, ainsi que chacune des fonctions x et x^3. La somme des deux fonctions g_1 et g_2 est donc positive et $f^{(3)}$ est donc négative sur $[0,1]$. Ainsi, f'' est monotone et le maximum de $|f''|$ est atteint en 0 ou en 1. On calcule $f''(0)$ et $f''(1)$. On obtient :

$$\begin{aligned} f''(0) &= 2/5 \approx 0.400000, \\ f''(1) &= -\frac{4}{25} \sin(1/5) + 2/5 \cos(1/5) \approx 0.360240. \end{aligned}$$

On en déduit

$$M_2 = \max_{x \in [0,1]} \left| f^{(2)}(x) \right|, \tag{9}$$

le maximum de la valeur absolue de la dérivée 2-ième de f sur l'intervalle d'étude, donné numériquement par

$$M_2 = 0.4000000000000. \tag{10}$$

On note

$$a = 0, \quad b = 1. \tag{11}$$

Le tableau A.5 (annexes du corrigé de TD) fournit l'expression de l'erreur commise avec la méthode élémentaire du trapèze :

$$\mathcal{E}^T = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta), \tag{12}$$

où η appartient à $]a, b[$. On vérifie que f est bien de classe $\mathcal{C}^2$. On majore la valeur absolue de $f''(\eta)$, par le maximum de la valeur absolue de la dérivée correspondant et la majoration de l'erreur commise est donc donnée par

$$\mathcal{E}^T \leq \frac{(b-a)^3}{12} M_2 \tag{13}$$

Grâce à (11) et (10), on déduit donc la majoration de l'erreur commise suivante :

$$\mathcal{E}^T \leq 0.0333333333. \tag{14}$$

(c) L'erreur réelle commise est égale à

$$\left|I^T - I\right| = |0.0664764327312 - 0.0993346653975| = 0.0328582326663$$

qui est inférieure à celle donnée par (14).

(2) (a) En utilisant le tableau A.4 (annexes du corrigé de TD), on détermine la valeur approchée avec la méthode composite des trapèzes avec $N = 3$:

$$I_3^T = 1/6 \, \sin(1/5) + 1/3 \, \sin(1/45) + 1/3 \, \sin\left(\frac{4}{45}\right) \tag{15}$$

soit

$$I_3^T = 0.07010897949092. \tag{16}$$

(b) On note maintenant

$$A = 0, \quad B = 1. \tag{17}$$

Le tableau A.6 (annexes du corrigé de TD) fournit l'expression de l'erreur commise avec la méthode composite des trapèzes :

$$\mathcal{E}_3^T = -h^2 \frac{B-A}{12} f''(\eta), \tag{18}$$

où η appartient à $[A, B]$ et

$$h = \frac{B-A}{N}, \tag{19}$$

soit

$$h = \frac{(1)-(0)}{3},$$

et donc

$$h = 0.3333333333333. \tag{20}$$

On peut donc écrire

$$\left|\mathcal{E}_3^T\right| \leq h^2 \frac{B-A}{12} M_2. \tag{21}$$

En utilisant de nouveau (10), on déduit donc la majoration de l'erreur commise suivante :

$$\mathcal{E}_3^T \leq 3.703704 \, 10^{-3}. \tag{22}$$

(c) L'erreur réelle commise est égale à

$$\left|I_3^T - I\right| = |0.0664764327312 - 0.0701089794909| = 3.632547\,10^{-3}$$

qui est inférieure à celle donnée par (22).

(3) Pour que

$$\left|\mathcal{E}_3^T\right| \leq \varepsilon,$$

il suffit, d'après (21) que l'on ait :

$$h^2 \frac{B-A}{12} M_2 \leq \varepsilon,$$

soit, d'après (19),

$$\left(\frac{B-A}{N}\right)^2 \frac{B-A}{12} M_2 \leq \varepsilon,$$

soit encore

$$\frac{(B-A)^3}{12\varepsilon} M_2 \leq N^2,$$

et donc

$$N \geq \sqrt{\frac{M_2 (B-A)^3}{12\varepsilon}}.$$

Il suffit donc de prendre

$$N = \left\lceil \sqrt{\frac{M_2 (B-A)^3}{12\varepsilon}} \right\rceil. \tag{23}$$

où pour tout réel X,

$$\lceil X \rceil \text{ est le plus petit entier supérieur ou égal à } X.$$

Numériquement, on a donc en utilisant de nouveau (10),

$$N = 1826. \tag{24}$$

Remarque 1. Avec cette valeur de N, on a

$$\mathcal{E}_{1826}^T = 0.066476442529090,$$

et l'erreur réelle

$$\left|\mathcal{E}_{1826}^T - I\right| = 9.7978948\,10^{-9},$$

quantité qui est inférieure à ε donné par l'équation (3) de l'énoncé.