

**Corrigé de l'examen de TD du 18
 Novembre 2020**
Correction de l'exercice 1.

(1) Les valeurs de p aux points $(x_i)_{0 \leq i \leq 2}$ sont donc données par $(y_i)_{0 \leq i \leq 2}$ avec

$$y_0 = 1, \quad y_1 = 3, \quad y_2 = 11. \quad (1)$$

(2) Il est naturellement préférable d'utiliser la forme de Newton pour le calcul de l'interpolation, néanmoins, le calcul utilisant la forme de Lagrange est aussi présenté.

(a) Chacun des polynômes de Lagrange l_i (de degré 2) est donné par la formule :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (2)$$

On a donc successivement

$$l_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)},$$

$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)},$$

$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}.$$

soit encore après calculs :

$$l_0(x) = 1/2 x^2 - 5/2 x + 3, \quad (3a)$$

$$l_1(x) = -x^2 + 4x - 3, \quad (3b)$$

$$l_2(x) = 1/2 x^2 - 3/2 x + 1. \quad (3c)$$

Ensuite, le polynôme interpolateur de degré 2, $\Pi_2(p)$, est donné par la formule :

$$\Pi_2(p)(x) = \sum_{i=0}^n p(x_i) l_i(x). \quad (4)$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_2(p)(x) = p(x_0)l_0(x) + p(x_1)l_1(x) + p(x_2)l_2(x).$$

Après calculs, il vient :

$$\Pi_2(p)(x) = 3x^2 - 7x + 5. \quad (5)$$

(b)

Pour calculer le polynôme sous la forme de Newton, on détermine tout d'abord les différences divisées $p[x_i, \dots, x_{i+k}]$ données dans le tableau 1. Ensuite, on n'utilise plus que les différences divisées qui sont encadrées et le polynôme interpolateur est donné par la formule :

$$\Pi_2(p)(x) = \sum_{i=0}^n p[x_0, \dots, x_i](x-x_0)\dots(x-x_{i-1}). \quad (6)$$

$x_i \setminus k$	0	1	2
$x_0 = 1$	1		
$x_1 = 2$	3	2	
$x_2 = 3$	11	8	3

TABLE 1. Différences divisées de p .

Ici, on a donc :

$$\Pi_2(p)(x) = p[x_0] + p[x_0, x_1](x - x_0) + p[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

On a successivement

$$\begin{aligned} x - x_0 &= x - 1, \\ (x - x_0)(x - x_1) &= x^2 - 3x + 2. \end{aligned}$$

Après calculs, on retrouve donc bien le polynôme déterminé par la méthode de Lagrange (voir équation (5)).

Correction de l'exercice 2.

- (1) (a) En utilisant le tableau A.3 (annexes du corrigé de TD), on détermine la valeur approchée avec la méthode élémentaire du trapèze :

$$I^T = 3 + \cos(1) \tag{7}$$

soit

$$I^T = 3.54030230586814. \tag{8}$$

- (b) On obtient les dérivées successives de f :

$$f'(x) = 1 + 2x - 2 \sin(x) ; \tag{9a}$$

$$f''(x) = 2 - 2 \cos(x). \tag{9b}$$

La fonction $f''(x)$ est croissante sur l'intervalle $[0, 1]$; elle est donc monotone et les extréma de f'' sont ses valeurs en 0 et en 1. On en déduit

$$M_2 = \max_{x \in [0, 1]} |f^{(2)}(x)|, \tag{10}$$

le maximum de la valeur absolue de la dérivée 2-ième de f sur l'intervalle d'étude, donné numériquement par

$$M_2 = 0.9193953882637. \tag{11}$$

On note

$$a = 0, \quad b = 1. \tag{12}$$

Le tableau A.5 (annexes du corrigé de TD) fournit l'expression de l'erreur commise avec la méthode élémentaire du trapèze :

$$\mathcal{E}^T = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta), \tag{13}$$

où η appartient à $]a, b[$. On vérifie que f est bien de classe \mathcal{C}^2 . On majore la valeur absolue de $f''(\eta)$, par le maximum de la valeur absolue de la dérivée correspondant et la majoration de l'erreur commise est donc donnée par

$$\mathcal{E}^T \leq \frac{(b-a)^3}{12} M_2 \quad (14)$$

Grâce à (12) et (11), on déduit donc la majoration de l'erreur commise suivante :

$$\mathcal{E}^T \leq 0.0766162824. \quad (15)$$

(c) (i) On obtient

$$I = \frac{11}{6} + 2 \sin(1). \quad (16)$$

(ii) L'erreur réelle commise est égale à

$$|I^T - I| = |3.5162753029491 - 3.5403023058681| = 0.0240270029190$$

qui est inférieure à celle donnée par (15).

(2) (a) En utilisant le tableau A.4 (annexes du corrigé de TD), on détermine la valeur approchée avec la méthode composite des trapèzes avec $N = 3$:

$$I_3^T = \frac{59}{27} + 1/3 \cos(1) + 2/3 \cos(1/3) + 2/3 \cos(2/3) \quad (17)$$

soit

$$I_3^T = 3.51918209186902. \quad (18)$$

(b) On note maintenant

$$A = 0, \quad B = 1. \quad (19)$$

Le tableau A.6 (annexes du corrigé de TD) fournit l'expression de l'erreur commise avec la méthode composite des trapèzes :

$$\mathcal{E}_3^T = -h^2 \frac{B-A}{12} f''(\eta), \quad (20)$$

où η appartient à $[A, B]$ et

$$h = \frac{B-A}{N}, \quad (21)$$

soit

$$h = \frac{(1) - (0)}{3},$$

et donc

$$h = 0.33333333333333. \quad (22)$$

On peut donc écrire

$$|\mathcal{E}_3^T| \leq h^2 \frac{B-A}{12} M_2. \quad (23)$$

En utilisant de nouveau (11), on déduit donc la majoration de l'erreur commise suivante :

$$\mathcal{E}_3^T \leq 8.512919 \cdot 10^{-3}. \quad (24)$$

(c) L'erreur réelle commise est égale à

$$|I_3^T - I| = |3.5162753029491 - 3.5191820918690| = 2.906788 \cdot 10^{-3}$$

qui est inférieure à celle donnée par (24).

(3) Pour que

$$|\mathcal{E}_3^T| \leq \varepsilon,$$

il suffit, d'après (23) que l'on ait :

$$h^2 \frac{B-A}{12} M_2 \leq \varepsilon,$$

soit, d'après (21),

$$\left(\frac{B-A}{N}\right)^2 \frac{B-A}{12} M_2 \leq \varepsilon,$$

soit encore

$$\frac{(B-A)^3}{12\varepsilon} M_2 \leq N^2,$$

et donc

$$N \geq \sqrt{\frac{M_2(B-A)^3}{12\varepsilon}}.$$

Il suffit donc de prendre

$$N = \left\lceil \sqrt{\frac{M_2(B-A)^3}{12\varepsilon}} \right\rceil. \quad (25)$$

où pour tout réel X ,

$\lceil X \rceil$ est le plus petit entier supérieur ou égal à X .

Numériquement, on a donc en utilisant de nouveau (11),

$$N = 2768. \quad (26)$$

Remarque 1. Avec cette valeur de N , on a

$$\mathcal{E}_{2768}^T = 3.516275306397593,$$

et l'erreur réelle

$$|\mathcal{E}_{2768}^T - I| = 3.4484667 \cdot 10^{-9},$$

quantité qui est inférieure à ε donné par l'équation (4) de l'énoncé.