Mécanique 3A MNB Automne

Corrigé de l'examen de TD du 10 Novembre 2021

Correction de l'exercice 1.

(1) Les différences divisées sont égales à $\{1,-1,2,1,0\}$. On sait que le polynôme d'interpolation P, *a priori* de degré 4 est donné par

$$P = P[x_0] + P[x_0,x_1](x-x_0) + ... + P[x_0,x_1,...,x_4](x-x_0)(x-x_1)...(x-x_3), \tag{1}$$

qui vérifie

$$\forall i \in \{0,...,4\}, \quad P(x_i) = y_i. \tag{2}$$

On constate que la dernière différence divisée est nulle, ce qui signifie que le degré de P est égal en fait à 3.

(2) D'après (2) et puisque le degré de de P est égal à 3, on a donc trouvé ce polynôme.

(3) Il est défini par

$$P = P[x_0] + P[x_0,x_1](x-x_0) + ... + P[x_0,x_1,...,x_3](x-x_0)(x-x_1)...(x-x_2). \tag{3}$$

On admettra qu'il vaut

$$P(x) = x^3 + 2\,x^2. \tag{4}$$

Correction de l'exercice 2.

(1) (a) En utilisant le tableau A.3 (annexes du corrigé de TD), on détermine la valeur approchée avec la méthode élémentaire de Simpson :

$$I^S = 5/2 + 1/6 \,\ln(2) + 1/6\,\ln(3) + 2/3\,\ln(5/2) \tag{5}$$

soit

$$I^S = 3.40948706612078. \tag{6}$$

(b) On obtient les dérivées successives de f :

$$f'(x) = 1 + x^{-1}\,; \tag{7a}$$

$$f''(x) = -x^{-2}\,; \tag{7b}$$

$$f^{(3)}(x) = 2\,x^{-3}\,; \tag{7c}$$

$$f^{(4)}(x) = -6\,x^{-4}. \tag{7d}$$

La fonction f^4 est monotone et atteint son maximum en l'une des extrémités de l'intervalle d'étude. On en déduit

$$M_4 = \max_{x\in[2,3]} \left|f^{(4)}(x)\right|, \tag{8}$$

le maximum de la valeur absolue de la dérivée 4-ième de f sur l'intervalle d'étude, donné numériquement par

$$M_4 = 0.3750000000000. \tag{9}$$

On note

$$a = 2, \quad b = 3. \tag{10}$$

Le tableau A.5 (annexes du corrigé de TD) fournit l'expression de l'erreur commise avec la méthode élémentaire de Simpson :

$$\mathcal{E}^S = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta), \tag{11}$$

où η appartient à $]a, b[$. On vérifie que f est bien de classe $\mathcal{C}^4$. On majore la valeur absolue de $f^{(4)}(\eta)$, par le maximum de la valeur absolue de la dérivée correspondant et la majoration de l'erreur commise est donc donnée par

$$\mathcal{E}^S \leq \frac{(b-a)^5}{2880} M_4 \tag{12}$$

Grâce à (10) et (9), on déduit donc la majoration de l'erreur commise suivante :

$$\mathcal{E}^S \leq 0.0001302083. \tag{13}$$

(c) L'erreur réelle commise est égale à

$$\left|I^S - I\right| = |3.4095425048844 - 3.4094870661208| = 0.0000554387637$$

qui est inférieure à celle donnée par (13).

(2) (a) En utilisant le tableau A.4 (annexes du corrigé de TD), on détermine la valeur approchée avec la méthode composite de Simpson avec $N = 2$:

$$I_2^S = 5/2 + 1/12 \ln(2) + 1/12 \ln(3) + 1/6 \ln(5/2) + 1/3 \ln(9/4) + 1/3 \ln(11/4) \tag{14}$$

soit

$$I_2^S = 3.40953878704630. \tag{15}$$

(b) On note maintenant

$$A = 2, \quad B = 3. \tag{16}$$

Le tableau A.6 (annexes du corrigé de TD) fournit l'expression de l'erreur commise avec la méthode composite de Simpson :

$$\mathcal{E}_2^S = -h^4 \frac{B-A}{2880} f^{(4)}(\eta), \tag{17}$$

où η appartient à $[A, B]$ et

$$h = \frac{B-A}{N}, \tag{18}$$

soit

$$h = \frac{(3)-(2)}{2},$$

et donc

$$h = 0.5000000000000. \tag{19}$$

On peut donc écrire

$$\left|\mathcal{E}_2^S\right| \leq h^4 \frac{B-A}{2880} M_4. \tag{20}$$

En utilisant de nouveau (9), on déduit donc la majoration de l'erreur commise suivante :

$$\mathcal{E}_2^S \leq 8.138021\,10^{-6}. \tag{21}$$

(c) L'erreur réelle commise est égale à

$$\left|I_2^S - I\right| = |3.4095425048844 - 3.4095387870463| = 3.717838\,10^{-6}$$

qui est inférieure à celle donnée par (21).

(3) Pour que

$$\left|\mathcal{E}_2^S\right| \leq \varepsilon,$$

il suffit, d'après (20) que l'on ait :

$$h^4 \frac{B-A}{2880} M_4 \leq \varepsilon,$$

soit, d'après (18),

$$\left(\frac{B-A}{N}\right)^4 \frac{B-A}{2880} M_4 \leq \varepsilon,$$

soit encore

$$\frac{(B-A)^5}{2880\varepsilon} M_4 \leq N^4,$$

et donc

$$N \geq \sqrt[4]{\frac{M_4 (B-A)^5}{2880\varepsilon}}.$$

Il suffit donc de prendre

$$N = \left\lceil \sqrt[4]{\frac{M_4 (B-A)^5}{2880\varepsilon}} \right\rceil. \tag{22}$$

où pour tout réel X,

$$\lceil X \rceil \text{ est le plus petit entier supérieur ou égal à } X.$$

Numériquement, on a donc en utilisant de nouveau (9),

$$N = 190. \tag{23}$$

Remarque 1. Avec cette valeur de N, on a

$$\mathcal{E}_{190}^S = 3.409542504884391,$$

et l'erreur réelle

$$\left|\mathcal{E}_{190}^S - I\right| = 4.7073456\,10^{-14},$$

quantité qui est inférieure à ε donné par l'équation (4) de l'énoncé.