Mécanique 3A MNB — Automne 2013

Corrigé de l'examen de TD du 14 Janvier 2014

Correction de l'exercice 1.

(1) Les différences divisées sont égales à

$$\begin{aligned} &f[x_0] = 1,\\ &f[x_0, x_1] = 3,\\ &f[x_0, x_1, x_2] = 1. \end{aligned}$$

On en déduit alors le polynôme d'interpolation P

$$P(x) = x^2 + 2\,x + 1. \tag{1}$$

(2) Si on rajoute le point (x_3, y_3) on a

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 0,$$

et

$$P(x) = x^2 + 2\,x + 1,$$

identique au polynôme donné par (1).

(3) Si on rajoute le point (x_4, y_4) on a

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = 0,$$

et

$$P(x) = x^2 + 2\,x + 1,$$

identique au polynôme donné par (1).

(4) On rappelle que le polynôme d'interpolation passant par $n+1$ points. est de degré au plus n. Ici, les points (x_i, y_i) appartiennent déjà tous à une parabole et vérifient donc

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad y_i = p(x_i), \tag{2}$$

où p est un polynôme de degré 2.

Voir la figure 1 page suivante.

Ainsi, quelque que soit la valeur de n, le polynôme d'interpolation, est de degré 2 et est égal à p.

(5) *Question facultative*

Soit I est un sous ensemble de $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ de cardinal q supérieur ou égal à 4. Notons $I = \{i_1, ..., i_q\}$ et considérons Q, le polynôme passant par les points $(x_{i_j}, y_{i_j})_{1 \leq j \leq q}$. On sait que

$$Q(x) = f[x_{i_1}] + f[x_{i_1}, x_{i_1}](x - x_{i_1}) + ... + f[x_{i_1}, ..., x_{i_q}](x - x_{i_1})...(x - x_{i_{q-1}}). \tag{3}$$

On a vu, en question 4 que l'égalité (2) était vérifiée où p est un polynôme de degré 2. Par unicité du polynôme d'interpolation, on a donc $Q = p$, de degré 2. Puisque $q \geq 4$ est le coefficient dominant $f[x_{i_1}, ..., x_{i_q}]$, associé au terme $(x - x_{i_1})...(x - x_{i_{q-1}})$, de degré $q - 1$, ne peut être que nul.

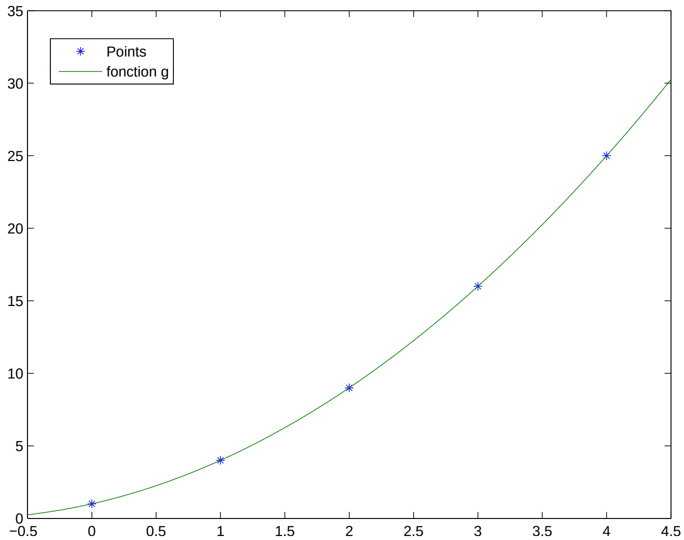

FIGURE 1. Les points (x_i, y_i) et la fonction polynomiale p.

Remarque 1. Cette méthode permet de vérifier que $n+1$ points de coordonnées (x_i, y_i) vérifient l'égalité (2) où p est un polynôme de degré $r \leq n-1$, sans utiliser de détermination de polynôme au sens des moindres carrés. En effet, en raisonnant de la même façon, on peut montrer que les $n+1$ points de coordonnées (x_i, y_i) vérifient l'égalité (2) où p est un polynôme de degré $r \leq n-1$ si et seulement si la différence divisée $f[x_0, x_1, ..., x_r]$ est non nulle et si toutes les différences divisées $f[x_0, x_1, ..., x_r, x_{r+1}]$, ..., $f[x_0, x_1, ..., x_r, x_{r+1}, ..., x_n]$ sont nulles.

Correction de l'exercice 2.

(1) La formule d'intégration (élémentaire) du point milieu sur l'intervalle $[a, b]$ est donnée par

$$\int_a^b f \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right). \tag{4}$$

(2) Cette formule est bien une formule de quadrature à $n+1=1$ point puisque du type

$$\int_a^b f \approx \sum_{i=0}^{n} W_i f(x_i), \tag{5}$$

où l'unique poids est $W_0 = b-a$ et l'unique point est $x_0 = (a+b)/2$.

(3) D'après le cours, elle est de degré (d'exactitude) 1.

(4) Pour déterminer son degré, on peut, comme en TD, déterminer le plus haut degré du polynôme exactement intégré par la formule de quadrature (4) et obtenir 1.

On peut aussi raisonner un peu plus efficacement et observer que la méthode du point milieu intègre au moins les polynômes de degré 0, puisque l'aire donnée par la formule (4) est celle d'un rectangle. On montre ensuite à la main que les polynômes de degré 1 sont intégrés exactement, mais pas ceux de degré 2.

On peut aussi raisonner encore plus efficacement et observer que l'erreur d'intégration est donnée par

$$\frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta), \tag{6}$$

où $\eta \in]a, b[$. Cette quantité est nulle si f est polynomiale d'ordre inférieur à 1. Si f est égale par exemple à x^2, alors $f''(\eta)$ est constant et est non nul !

(5) Cette méthode de quadrature à 1 point devrait logiquement être de degré 0. Tout se passe donc comme si le point milieu comptait double !

Cet apparente « duplication » de point est systématiquement utilisé dans les méthodes d'intégrations Gaussienne, qui sont à $n + 1$ points et de degré $2n + 1$, comme si chaque point comptait deux fois ! Pour plus de détails, lire par exemple [BM03, Section 3.3].

Références

[BM03] J. Bastien et J.-N. Martin. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4 ième étage). Paris : Dunod, 2003. 392 pages.