Mécanique 3A MNBif Automne 2016

Corrigé de l'examen de TD du 13 Décembre 2016

Correction de l'exercice 1.

(1) Les différences divisées sont égales à $\{1, 1, -3, -1, 0\}$. On sait que le polynôme d'interpolation P, *a priori* de degré 4 est donné par

$$P = P[x_0] + P[x_0, x_1](x - x_0) + ... + P[x_0, x_1, ..., x_4](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_3), \tag{1}$$

qui vérifie

$$\forall i \in \{0, ..., 4\}, \quad P(x_i) = y_i. \tag{2}$$

On constate que la dernière différence divisée est nulle, ce qui signifie que le degré de P est égal en fait à 3.

(2) D'après (2) et puisque le degré de de P est égal à 3, on a donc trouvé ce polynôme.

(3) Il est défini par

$$P = P[x_0] + P[x_0, x_1](x - x_0) + ... + P[x_0, x_1, ..., x_3](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_2). \tag{3}$$

On admettra qu'il vaut

$$P(x) = -x^3 + 2\,x + 1. \tag{4}$$

Correction de l'exercice 2.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[a, b] = [-1, 1]$ par

$$\forall x, \quad f(x) = \sin(x) + 3.$$

(1) (a) En utilisant la méthode composite des trapèze avec un nombre d'intervalles dans $\{1, 2, 3, 4\}$, on obtient respectivement les 4 valeurs approchées suivantes

$$I_1 \approx 6.0000000000,$$
$$I_3 \approx 6.0000000000,$$
$$I_3 \approx 6.0000000000,$$
$$I_4 \approx 6.0000000000.$$

(b) On constate que f est la somme d'une fonction impaire, d'intégrale nulle sur $[-1, 1]$ et d'une fonction constante c. On a donc la valeur exacte de $I = (b - a)c$:

$$I = 6.$$

On constate que la méthode de trapèze prend aussi en compte cette symétrie dans la sommation, où tous les termes disparaissent deux à deux par imparité !

(2) En utilisant la méthode composite de Simpson avec un nombre d'intervalles dans $\{1, 2\}$, on obtient respectivement les 2 valeurs approchées suivantes

$$I_1 \approx 6.0000000000,$$
$$I_2 \approx 6.0000000000.$$

Elle prend aussi en compte cette symétrie dans la sommation, où tous les termes disparaissent deux à deux par imparité !

(3) (a) En utilisant la méthode élémentaire de Simpson on obtient la valeur approchée suivante

$$J \approx 3.7500000000.$$

Après intégration manuelle, on obtient la valeur exacte suivante

$$J = 3.7500000000.$$

(b) Ici, ce n'est plus la symétrie de l'intervalle d'intégration qui permet d'expliquer cela, mais tout simplement le fait que le polynôme que l'on intégre est de degré 3 et que l'erreur de Simpson élémentaire, égale à $-\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta)$, est donc nulle ici !

Correction de l'exercice 3.

Le polynôme dont on cherche une racine est de degré 3 donc on sait qu'il admet au moins au racine sur $\mathbb{R}$. On cherche a b tels qu'il y ait un changement de signe. En partant de 0 et en incrémentant de ± 1, on trouve $a = 0$ et $b = 2$. On sait qua la méthode de dichotomie converge, puisque le polynôme est continu.

Si on veut une erreur inférieure à $\varepsilon > 0$, il est nécessaire que le nombre d'itérations n vérifie :

$$\frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon$$

soit

$$n \geq \frac{1}{\ln 2} \ln \left(\frac{b-a}{\varepsilon} \right)$$

Par exemple, pour avoir $\varepsilon = 1.0\,10^{-10}$, on obtient $n = 35$. On obtient alors au bout de 35 itérations,

$$x \approx 1.61803398869233$$

et on vérifie que

$$P(x) \approx 0.00000000033698 \approx 0.$$