Corrigé de l'examen de TD du 12 Décembre 2017

Correction de l'exercice 1.

(1) Il est naturellement préférable d'utiliser la forme de Newton pour le calcul de l'interpolation, néanmoins, le calcul utilisant la forme de Lagrange est aussi présenté.

(a) Chacun des polynômes de Lagrange l_i (de degré 2) est donné par la formule :

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \tag{1}$$

On a donc successivement

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{(x - 1/2)\,(x - 3/2)}{(-1/2 - 1/2)\,(-1/2 - 3/2)}, \\ l_1(x) &= \frac{(x + 1/2)\,(x - 3/2)}{(1/2 + 1/2)\,(1/2 - 3/2)}, \\ l_2(x) &= \frac{(x + 1/2)\,(x - 1/2)}{(3/2 + 1/2)\,(3/2 - 1/2)}. \end{aligned}$$

soit encore après calculs :

$$l_0(x) = 1/2\,x^2 - x + 3/8, \tag{2a}$$
$$l_1(x) = -x^2 + x + 3/4, \tag{2b}$$
$$l_2(x) = 1/2\,x^2 - 1/8. \tag{2c}$$

Ensuite, le polynôme interpolateur de degré 2, $\Pi_2(g)$, est donné par la formule :

$$\Pi_2(g)(x) = \sum_{i=0}^{n} g(x_i) l_i(x). \tag{3}$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_2(g)(x) = g(x_0)l_0(x) + g(x_1)l_1(x) + g(x_2)l_2(x).$$

Après calculs, il vient :

$$\Pi_2(g)(x) = 3\,x^2 - 3\,x - 5/4. \tag{4}$$

(b)

Pour calculer le polynôme sous la forme de Newton, on détermine tout d'abord les différences divisées $g[x_i, ..., x_{i+k}]$ données dans le tableau 1. Ensuite, on n'utilise plus que les différences divisées qui sont encadrées et le polynôme interpolateur est donné par la formule :

$$\Pi_2(g)(x) = \sum_{i=0}^{n} g[x_0, ..., x_i](x - x_0)...(x - x_{i-1}). \tag{5}$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_2(g)(x) = g[x_0] + g[x_0, x_1](x - x_0) + g[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

$$
\begin{array}{l|ccc}
x_i \setminus k & 0 & 1 & 2 \\
\hline
x_0 = -1/2 & \boxed{1} & & \\
 & & \boxed{-3} & \\
x_1 = 1/2 & -2 & & \boxed{3} \\
 & & 3 & \\
x_2 = 3/2 & 1 & &
\end{array}
$$

TABLE 1. Différences divisées de g.

On a successivement

$$
\begin{aligned}
x - x_0 &= x + 1/2,\\
(x - x_0)(x - x_1) &= x^2 - 1/4.
\end{aligned}
$$

Après calculs, on retrouve donc bien le polynôme déterminé par la méthode de Lagrange (voir équation (4)).

(2) Pour $\alpha = 3/4$, on obtient alors :

$$\Pi_2(g)(\alpha) = -\frac{29}{16} \approx -1.812500,$$

ce qui constitue une valeur approchée de $g(\alpha)$.

Correction de l'exercice 2.

(1) Si on utilise la méthode du cours, avec la forme de Lagrange ou de Newton, en prenant bien en compte le fait qu'une somme vide est nulle et qu'un produit vide vaut 1, on obtient ce qui suit :

(a) Chacun des polynômes de Lagrange l_i (de degré 0) est donné par la formule :

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \tag{6}$$

On a donc

$$l_0(x) = 1. \tag{7}$$

Ensuite, le polynôme interpolateur de degré 0, $\Pi_0(g)$, est donné par la formule :

$$\Pi_0(g)(x) = \sum_{i=0}^{n} g(x_i) l_i(x). \tag{8}$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_0(g)(x) = g(x_0) l_0(x).$$

Il vient :

$$\Pi_0(g)(x) = -3. \tag{9}$$

(b)

Pour calculer le polynôme sous la forme de Newton, on détermine tout d'abord la différence divisée $g[x_0]$ donnée dans le tableau 2. Ensuite, le polynôme interpolateur est donné par la formule :

$$\Pi_0(g)(x) = \sum_{i=0}^{n} g[x_0, ..., x_i](x - x_0)...(x - x_{i-1}). \tag{10}$$

$x_i \setminus k$	0
$x_0 = 1$	-3

Table 2. Différences divisées de g.

Ici, on a donc :

$$\Pi_0(g)(x) = g[x_0].$$

On retrouve donc bien le polynôme déterminé par la méthode de Lagrange (voir équation (9)).

(2) Il était en fait évident de trouver un polynôme constant, de degré 0, comme indiqué ci-dessous, valant l'unique valeur de $g(x_0)$ donnée !

Correction de l'exercice 3.

(1) Avec les notations habituelles, l'approximation de l'intégrale par la méthode du point milieu composite est

$$I_N = h \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i + h/2)$$

Pour $N = 6$, on obtient

$$I_6 = \frac{\pi \ \left(\cos\left(\frac{\pi}{32}\right) + \cos\left(\frac{3\,\pi}{32}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{96}\right) + \cos\left(\frac{5\,\pi}{96}\right) + \cos\left(\frac{7\,\pi}{96}\right) + \cos\left(\frac{11\,\pi}{96}\right)\right)}{24},$$

soit

$$I_6 = 0.76550349.$$

(2) D'après les formules rappelées, l'erreur commise est

$$E_h = h^2 \frac{B - A}{24} g''(\eta) \text{ avec } \eta \in [A, B].$$

On majore $|g''|$ par 1. On a donc une erreur majorée par

$$E \leq \frac{B - A}{24} h^2,$$

soit numériquement une erreur majorée par

$$E \leq 5.607327234\, 10^{-4}. \tag{11}$$

On pouvait aussi majorer $|g''|$ par $1/4$. On a donc dans ce cas une erreur majorée

$$E \leq 1.401831808\, 10^{-4}. \tag{12}$$

Remarque 1. On peut vérifier *a posteriori* que l'erreur donnée par (12) est correcte en calculant l'erreur réellement commise !

$$\begin{aligned} \left| I_6 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt \right| &= |0.76550349 - 1|, \\ &= 1.366249289\, 10^{-4}, \\ &\leq 5.607327234\, 10^{-4}. \end{aligned}$$

Si on utilise (12), on a donc

$$\left| I_6 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt \right| = |0.76550349 - 1| ,$$
$$= 1.366249289\, 10^{-4},$$
$$\leq 1.401831808\, 10^{-4}.$$

(3) D'après les formules rappelées dans l'énoncé, l'erreur correspondant à la méthode de Simpson composite fait intervenir la dérivée d'ordre 4. La fonction à intégrer est un polynôme de degré 3, dont la dérivée 4-ième est nulle ! Ainsi, quelque soit le nombre de sous-intervalles, l'erreur est nulle et donc inférieure à tout nombre strictement positif et il suffit d'appliquer la formule composite avec un seul sous-intervalle, soit

$$I_1 = \frac{B-A}{6} \left(f(A) + 4f((A+B)/2) + f(B)\right)$$

Ici, on obtient

$$I_1 = \frac{\pi \left(\frac{3\,\pi}{4} + \frac{\pi^2}{8} + \frac{3\,\pi^3}{64}\right)}{24},$$

soit encore

$$I_1 = \frac{\pi^2 \left(8\,\pi + 3\,\pi^2 + 48\right)}{1536}, \tag{13}$$

soit encore numériquement

$$I_1 = 0.66016829.$$

Remarque 2. Si on calcule l'intégrale exacte, on a

$$I_1 = \frac{\pi^2 \left(8\,\pi + 3\,\pi^2 + 48\right)}{1536},$$

ce qui est bien la même expression que (13).