Informatique 3A MNB — Automne

# Corrigé de l'examen de TD du 18 Novembre 2020

## Correction de l'exercice 1.

(1) Les valeurs de $p$ aux points $(x_i)_{0\le i\le 2}$ sont donc données par $(y_i)_{0\le i\le 2}$ avec

$$y_0 = 4, \quad y_1 = 5, \quad y_2 = 10. \tag{1}$$

(2) Il est naturellement préférable d'utiliser la forme de Newton pour le calcul de l'interpolation, néanmoins, le calcul utilisant la forme de Lagrange est aussi présenté.

(a) Chacun des polynômes de Lagrange $l_i$ (de degré 2) est donné par la formule :

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \tag{2}$$

On a donc successivement

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{(x-2)\,(x-3)}{(1-2)\,(1-3)},\\ l_1(x) &= \frac{(x-1)\,(x-3)}{(2-1)\,(2-3)},\\ l_2(x) &= \frac{(x-1)\,(x-2)}{(3-1)\,(3-2)}. \end{aligned}$$

soit encore après calculs :

$$l_0(x) = 1/2\,x^2 - 5/2\,x + 3, \tag{3a}$$

$$l_1(x) = -x^2 + 4\,x - 3, \tag{3b}$$

$$l_2(x) = 1/2\,x^2 - 3/2\,x + 1. \tag{3c}$$

Ensuite, le polynôme interpolateur de degré 2, $\Pi_2(p)$, est donné par la formule :

$$\Pi_2(p)(x) = \sum_{i=0}^{n} p(x_i) l_i(x). \tag{4}$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_2(p)(x) = p(x_0)l_0(x) + p(x_1)l_1(x) + p(x_2)l_2(x).$$

Après calculs, il vient :

$$\Pi_2(p)(x) = 2\,x^2 - 5\,x + 7. \tag{5}$$

(b)

Pour calculer le polynôme sous la forme de Newton, on détermine tout d'abord les différences divisées $p[x_i, ..., x_{i+k}]$ données dans le tableau 1. Ensuite, on n'utilise plus que les différences divisées qui sont encadrées et le polynôme interpolateur est donné par la formule :

$$\Pi_2(p)(x) = \sum_{i=0}^{n} p[x_0, ..., x_i](x - x_0)...(x - x_{i-1}). \tag{6}$$

| $x_i \setminus k$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $x_0 = 1$ | $\boxed{4}$ | | |
| | | $\boxed{1}$ | |
| $x_1 = 2$ | 5 | | $\boxed{2}$ |
| | | 5 | |
| $x_2 = 3$ | 10 | | |

TABLE 1. Différences divisées de $p$.

Ici, on a donc :

$$\Pi_2(p)(x) = p[x_0] + p[x_0, x_1](x - x_0) + p[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

On a successivement

$$x - x_0 = x - 1,$$
$$(x - x_0)(x - x_1) = x^2 - 3\,x + 2.$$

Après calculs, on retrouve donc bien le polynôme déterminé par la méthode de Lagrange (voir équation (5)).

**Correction de l'exercice 2.**

(1) (a) En utilisant le tableau A.3 (annexes du corrigé de TD), on détermine la valeur approchée avec la méthode élémentaire du trapèze :

$$I^T = 11/2 + 3/2\,\cos(1) \tag{7}$$

soit

$$I^T = 6.31045345880221. \tag{8}$$

(b) On obtient les dérivées successives de $f$ :

$$f'(x) = 2 + 8\,x - 3\,\sin(x)\ ; \tag{9a}$$
$$f''(x) = 8 - 3\,\cos(x)\,. \tag{9b}$$

La fonction $f''(x)$ est croissante sur l'intervalle $[0, 1]$ ; elle est donc monotone et les extréma de $f''$ sont ses valeurs en 0 et en 1. On en déduit

$$M_2 = \max_{x\in[0,1]} \left| f^{(2)}(x) \right|, \tag{10}$$

le maximum de la valeur absolue de la dérivée 2-ième de $f$ sur l'intervalle d'étude, donné numériquement par

$$M_2 = 6.3790930823956. \tag{11}$$

On note

$$a = 0, \quad b = 1. \tag{12}$$

Le tableau A.5 (annexes du corrigé de TD) fournit l'expression de l'erreur commise avec la méthode élémentaire du trapèze :

$$\mathcal{E}^T = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta), \tag{13}$$

où $\eta$ appartient à $]a,b[$. On vérifie que $f$ est bien de classe $\mathcal{C}^2$. On majore la valeur absolue de $f''(\eta)$, par le maximum de la valeur absolue de la dérivée correspondant et la majoration de l'erreur commise est donc donnée par

$$\mathcal{E}^T \leq \frac{(b-a)^3}{12} M_2 \tag{14}$$

Grâce à (12) et (11), on déduit donc la majoration de l'erreur commise suivante :

$$\mathcal{E}^T \leq 0.5315910902. \tag{15}$$

(c) (i) On obtient

$$I = 10/3 + 3\,\sin(1)\,. \tag{16}$$

(ii) L'erreur réelle commise est égale à

$$\left|I^T - I\right| = |5.8577462877570 - 6.3104534588022| = 0.4527071710452$$

qui est inférieure à celle donnée par (15).

(2) (a) En utilisant le tableau A.4 (annexes du corrigé de TD), on détermine la valeur approchée avec la méthode composite des trapèzes avec $N = 3$ :

$$I_3^T = \frac{211}{54} + 1/2\,\cos(1) + \cos(1/3) + \cos(2/3) \tag{17}$$

soit

$$I_3^T = 5.90840276743316. \tag{18}$$

(b) On note maintenant

$$A = 0, \quad B = 1. \tag{19}$$

Le tableau A.6 (annexes du corrigé de TD) fournit l'expression de l'erreur commise avec la méthode composite des trapèzes :

$$\mathcal{E}_3^T = -h^2 \frac{B-A}{12} f''(\eta), \tag{20}$$

où $\eta$ appartient à $[A,B]$ et

$$h = \frac{B-A}{N}, \tag{21}$$

soit

$$h = \frac{(1)-(0)}{3},$$

et donc

$$h = 0.3333333333333. \tag{22}$$

On peut donc écrire

$$\left|\mathcal{E}_3^T\right| \leq h^2 \frac{B-A}{12} M_2. \tag{23}$$

En utilisant de nouveau (11), on déduit donc la majoration de l'erreur commise suivante :

$$\mathcal{E}_3^T \leq 5.906568\,10^{-2}. \tag{24}$$

(c) L'erreur réelle commise est égale à

$$\left|I_3^T - I\right| = |5.8577462877570 - 5.9084027674332| = 5.065648\,10^{-2}$$

qui est inférieure à celle donnée par (24).

(3) Pour que

$$\left|\mathcal{E}_3^T\right| \leq \varepsilon,$$

il suffit, d'après (23) que l'on ait :

$$h^2 \frac{B-A}{12} M_2 \leq \varepsilon,$$

soit, d'après (21),

$$\left(\frac{B-A}{N}\right)^2 \frac{B-A}{12} M_2 \leq \varepsilon,$$

soit encore

$$\frac{(B-A)^3}{12\varepsilon} M_2 \leq N^2,$$

et donc

$$N \geq \sqrt{\frac{M_2 (B-A)^3}{12\varepsilon}}.$$

Il suffit donc de prendre

$$N = \left\lceil \sqrt{\frac{M_2 (B-A)^3}{12\varepsilon}} \right\rceil. \tag{25}$$

où pour tout réel $X$,

$\lceil X \rceil$ est le plus petit entier supérieur ou égal à $X$.

Numériquement, on a donc en utilisant de nouveau (11),

$$N = 7292. \tag{26}$$

*Remarque* 1. Avec cette valeur de $N$, on a

$$\mathcal{E}_{7292}^T = 5.857746296338394,$$

et l'erreur réelle

$$\left|\mathcal{E}_{7292}^T - I\right| = 8.5813711\, 10^{-9},$$

quantité qui est inférieure à $\varepsilon$ donné par l'équation (4) de l'énoncé.