Mécanique 3A MNB Automne

Corrigé de l'examen de TD du 10 Novembre 2021

Correction de l'exercice 1.

(1) Les différences divisées sont égales à $\{1, 1, -3, -1, 0\}$. On sait que le polynôme d'interpolation P, *a priori* de degré 4 est donné par

$$P = P[x_0] + P[x_0, x_1](x - x_0) + ... + P[x_0, x_1, ..., x_4](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_3), \tag{1}$$

qui vérifie

$$\forall i \in \{0, ..., 4\}, \quad P(x_i) = y_i. \tag{2}$$

On constate que la dernière différence divisée est nulle, ce qui signifie que le degré de P est égal en fait à 3.

(2) D'après (2) et puisque le degré de de P est égal à 3, on a donc trouvé ce polynôme.

(3) Il est défini par

$$P = P[x_0] + P[x_0, x_1](x - x_0) + ... + P[x_0, x_1, ..., x_3](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_2). \tag{3}$$

On admettra qu'il vaut

$$P(x) = -x^3 + 2\,x + 1. \tag{4}$$

Correction de l'exercice 2.

(1) (a) En utilisant le tableau A.3 (annexes du corrigé de TD), on détermine la valeur approchée avec la méthode élémentaire du trapèze :

$$I^T = \frac{25}{2} + 1/2\ \ln(3) + \ln(2) \tag{5}$$

soit

$$I^T = 13.74245332489400. \tag{6}$$

(b) On obtient les dérivées successives de f :

$$f'(x) = 2\,x + x^{-1}\,; \tag{7a}$$

$$f''(x) = 2 - x^{-2}. \tag{7b}$$

La fonction f'' est monotone et atteint son maximum en l'une des extrémités de l'intervalle d'étude. On en déduit

$$M_2 = \max_{x\in[3,4]} \left| f^{(2)}(x) \right|, \tag{8}$$

le maximum de la valeur absolue de la dérivée 2-ième de f sur l'intervalle d'étude, donné numériquement par

$$M_2 = 1.9375000000000. \tag{9}$$

On note

$$a = 3, \quad b = 4. \tag{10}$$

Le tableau A.5 (annexes du corrigé de TD) fournit l'expression de l'erreur commise avec la méthode élémentaire du trapèze :

$$\mathcal{E}^T = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta), \tag{11}$$

où η appartient à $]a, b[$. On vérifie que f est bien de classe $\mathcal{C}^2$. On majore la valeur absolue de $f''(\eta)$, par le maximum de la valeur absolue de la dérivée correspondant et la majoration de l'erreur commise est donc donnée par

$$\mathcal{E}^T \leq \frac{(b-a)^3}{12} M_2 \tag{12}$$

Grâce à (10) et (9), on déduit donc la majoration de l'erreur commise suivante :

$$\mathcal{E}^T \leq 0.1614583333. \tag{13}$$

(c) L'erreur réelle commise est égale à

$$\left|I^T - I\right| = |13.5826739118086 - 13.7424533248940| = 0.1597794130854$$

qui est inférieure à celle donnée par (13).

(2) (a) En utilisant le tableau A.4 (annexes du corrigé de TD), on détermine la valeur approchée avec la méthode composite des trapèzes avec $N = 3$:

$$I_3^T = \frac{667}{54} + 1/6 \ln(3) + 1/3 \ln(2) + 1/3 \ln(10/3) + 1/3 \ln(11/3) \tag{14}$$

soit

$$I_3^T = 13.60042155630192. \tag{15}$$

(b) On note maintenant

$$A = 3, \quad B = 4. \tag{16}$$

Le tableau A.6 (annexes du corrigé de TD) fournit l'expression de l'erreur commise avec la méthode composite des trapèzes :

$$\mathcal{E}_3^T = -h^2 \frac{B-A}{12} f''(\eta), \tag{17}$$

où η appartient à $[A, B]$ et

$$h = \frac{B-A}{N}, \tag{18}$$

soit

$$h = \frac{(4)-(3)}{3},$$

et donc

$$h = 0.3333333333333. \tag{19}$$

On peut donc écrire

$$\left|\mathcal{E}_3^T\right| \leq h^2 \frac{B-A}{12} M_2. \tag{20}$$

En utilisant de nouveau (9), on déduit donc la majoration de l'erreur commise suivante :

$$\mathcal{E}_3^T \leq 1.793981\, 10^{-2}. \tag{21}$$

(c) L'erreur réelle commise est égale à

$$\left|I_3^T - I\right| = |13.5826739118086 - 13.6004215563019| = 1.774764\, 10^{-2}$$

qui est inférieure à celle donnée par (21).

(3) Pour que

$$\left|\mathcal{E}_3^T\right| \leq \varepsilon,$$

il suffit, d'après (20) que l'on ait :

$$h^2 \frac{B-A}{12} M_2 \leq \varepsilon,$$

soit, d'après (18),

$$\left(\frac{B-A}{N}\right)^2 \frac{B-A}{12} M_2 \leq \varepsilon,$$

soit encore

$$\frac{(B-A)^3}{12\varepsilon} M_2 \leq N^2,$$

et donc

$$N \geq \sqrt{\frac{M_2 (B-A)^3}{12\varepsilon}}.$$

Il suffit donc de prendre

$$N = \left\lceil \sqrt{\frac{M_2 (B-A)^3}{12\varepsilon}} \right\rceil. \tag{22}$$

où pour tout réel X,

$$\lceil X \rceil \text{ est le plus petit entier supérieur ou égal à } X.$$

Numériquement, on a donc en utilisant de nouveau (9),

$$N = 4019. \tag{23}$$

Remarque 1. Avec cette valeur de N, on a

$$\mathcal{E}_{4019}^T = 13.582673921697037,$$

et l'erreur réelle

$$\left|\mathcal{E}_{4019}^T - I\right| = 9.8884705\,10^{-9},$$

quantité qui est inférieure à ε donné par l'équation (4) de l'énoncé.