Mécanique 3A MNB — Automne 2018

Corrigé de l'examen de TD du 9 Octobre 2018

Correction de l'exercice 1.

(1)

$x_i \setminus k$	0	1	2
$x_0 = 1$	$\boxed{1}$		
		$\boxed{-1}$	
$x_1 = 2$	0		$\boxed{1/2}$
		0	
$x_2 = 3$	0		

Table 1. Différences divisées de f.

Pour calculer le polynôme sous la forme de Newton, on détermine tout d'abord les différences divisées $f[x_i, ..., x_{i+k}]$ données dans le tableau 1. Ensuite, on n'utilise plus que les différences divisées qui sont encadrées et le polynôme interpolateur de degré 2, $\Pi_2 f^0$, est donné par la formule :

$$\Pi_2 f^0(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, ..., x_i](x - x_0)...(x - x_{i-1}). \tag{1}$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_2 f^0(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

On a successivement

$$\begin{aligned} x - x_0 &= x - 1, \\ (x - x_0)(x - x_1) &= x^2 - 3\,x + 2. \end{aligned}$$

Après calculs, il vient :

$$\Pi_2 f^0(x) = 1/2\,x^2 - 5/2\,x + 3. \tag{2}$$

(2) On peut aussi écrire le polynôme $\Pi_2 f^0$ sous forme factorisée. Si on rappelle ce qui a été admis dans l'énoncé, on a donc

$$\begin{aligned} \Pi_2 f^0(x) &= 1/2\,(x - 2)\,(x - 3)\,, \\ \Pi_2 f^1(x) &= -\,(x - 1)\,(x - 3)\,, \\ \Pi_2 f^2(x) &= 1/2\,(x - 1)\,(x - 2)\,. \end{aligned}$$

On reconnaît alors les différents polynômes de Lagrange l_i donnés par

$$l_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}.$$

Cela est tout à fait normal, car on a imposé à chaque polynôme $\Pi_2 f^i$ d'être de degré au plus $n = 2$ et de valoir 1 en x_i et 0 ailleurs, ce qui est exactement la caractéristique de chacun des l_i !

(3) On trouve après calculs
$$\Pi_2 f^0(3/2) = 3/8.$$

Correction de l'exercice 2.
Voir [**jbjnmdunod03**].