Mécanique 3A MNB Automne 2014

Corrigé de l'examen de TD du 14 Janvier 2015

On pourra aussi consulter la fonction matlab qui a permis de calculer tous les éléments de ce corrigé, `examTDMNBA14.m`, présente sur le site à l'Url habituelle : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`
Pour avoir la correction du sujet *de votre groupe de TD*, vous taperez sous matlab :

examTDMNBA14 (2)

Correction de l'exercice 1.

(1) On calcule les différences divisées $f[a]$, $f[a,c]$ et $f[a,c,b]$ et on obtient

$$\begin{aligned}
f[a] &= f(a),\\
f[a,c] &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a},\\
f[a,c,b] &= \left(\frac{f(c)-f(b)}{1/2\,a-1/2\,b}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(-1/2\,a+1/2\,b)^{-1}.
\end{aligned}$$

On obtient alors les polynômes p_1 et p_2 donnés par

$$p_1(t) = \frac{(t-a)(f(b)-f(a))}{b-a}+f(a), \tag{1a}$$

$$p_2(t) = (t-a)\left((t-b)\left(\frac{f(c)-f(b)}{1/2\,a-1/2\,b}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(-1/2\,a+1/2\,b)^{-1}+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)+f(a). \tag{1b}$$

(2) On intègre alors le polynôme p_2 sur $[a,b]$ et on obtient

$$\int_a^b p_2(t)dt = -2/3\,af(c)-1/6\,f(b)\,a-1/6\,f(a)\,a+2/3\,bf(c)+1/6\,f(b)\,b+1/6\,f(a)\,b,$$

soit encore en simplifiant

$$\int_a^b p_2(t)dt = \frac{(b-a)}{6}\big(f(a)+4f(c)+f(b)\big),$$

qui constitue la formule d'intégration numérique de Simpson.

(3) On pose $h=(B-A)/N$ et pour $i\in\{0,\dots,N\}$, $x_i=A+hi$. La formule d'intégration composite de Simpson sur l'intervalle $[A,B]$ où $A=0$ et $B=1$ avec N sous-intervalle est donnée par

$$I\approx\frac{h}{6}\left(F(A)+F(B)+2\sum_{i=1}^{N-1}F(x_i)+4\sum_{i=0}^{N-1}F\left(x_i+\frac{h}{2}\right)\right).$$

(4) On obtient numériquement

$$I\approx 0.45969967.$$

La valeur exacte est donnée par

$$I = 1-\cos(1) = 0.45969769, \tag{2}$$

qui correspond à une erreur égale à

$$E_r = 1.977\,10^{-6}, \tag{3}$$

(5) L'erreur d'intégration était rappelée en fin d'énoncé :

$$E = -h^4 \frac{B-A}{2880} F^{(4)}(\eta),$$

dont on majore la valeur absolue par

$$\widetilde{E} = K h^{\alpha}(B-A) \sup_{t\in[A,B]} \left|F^{(\alpha)}(t)\right| = \frac{K(B-A)^{\alpha+1}}{N^{\alpha}} \sup_{t\in[A,b]} \left|F^{(\alpha)}(t)\right|$$

où

$$K = \frac{1}{2880}, \quad \alpha = 4.$$

Pour avoir une erreur inférieur à ε, il suffit donc que

$$\frac{K(B-A)^{\alpha+1}}{N^{\alpha}} \sup_{t\in[A,B]} \left|f^{(\alpha)}(t)\right| \leq \varepsilon$$

Vue la forme de F, toutes les dérivées de F sont majorées par 1 et il suffit donc que

$$\frac{K(B-A)^{\alpha+1}}{N^{\alpha}} \leq \varepsilon,$$

ce qui est équivalent à

$$N \geq \sqrt[\alpha]{\frac{K(B-A)^{\alpha+1}}{\varepsilon}},$$

soit numériquement

$$N = 14.$$

Correction de l'exercice 2.

(1) On procède comme dans l'exercice de TD 2.3. On renvoie aussi à [BM03, Correction de l'exercice 3.2 p. 119 et 260, et TP 2.F p. 67].

On sait que les formules des différences divisées se généralisent quand des points d'interpolation se confondent avec des formules de récurrence identiques à celle du cadre du cours et des expressions en fonction de la dérivée de la fonction quand des points sont doubles.

Pour passer du polynôme d'interpolation aux points d'abscisses a, a, $c = (a+b)/2$ et b, on utilise, p_2, le polynôme d'interpolation aux points d'abscisses a, $c = (a+b)/2$ et b, déjà déterminé en exercice 1, auquel on rajoute le polynôme $f[a,c,b,a](x-a)(x-c)(x-b)$.

On a, par ailleurs, d'après les calculs déjà faits en exercice 1,

$$\begin{aligned}
f[a,c,b,a] &= f[a,a,c,b],\\
&= \frac{f[a,c,b]-f[a,a,c]}{b-a},\\
&= \frac{1}{b-a}\left(\left(\frac{f\left(c\right)-f\left(b\right)}{1/2\,a-1/2\,b}-\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}\right)\left(-1/2\,a+1/2\,b\right)^{-1}-\frac{f[a,c]-f[a,a]}{c-a}\right),\\
&= \frac{1}{b-a}\left(\left(\frac{f\left(c\right)-f\left(b\right)}{1/2\,a-1/2\,b}-\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}\right)\left(-1/2\,a+1/2\,b\right)^{-1}-\frac{1}{(c-a)}(f(c)-f(a)-f'(a)(c-a))\right),
\end{aligned}$$

On a donc

$$f[a,c,b,a] = \frac{1}{b-a}\left(\left(\frac{f\left(c\right)-f\left(b\right)}{1/2\,a-1/2\,b}-\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}\right)\left(-1/2\,a+1/2\,b\right)^{-1}-\frac{1}{(c-a)}(f(c)-f(a)-f'(a)(c-a))\right), \tag{4}$$

et on obtient alors le polynôme p_3 donné par

$$p_3(t) = p_2(t) + f[a,c,b,a](x-a)(x-c)(x-b) \tag{5}$$

où $f[a,c,b,a]$est donné par (4) et p_2 est donné par (1).

(2) On sait que p_3 et f coïncident en valeur et en dérivée là où les points d'interpolation se dédoublent, c'est-à-dire en a. Avec un peu de courage, on peut déterminer à la main les résultats suivants

$$\begin{aligned}
f(a) &= p_3(a) = f\,(a)\,,\\
f(b) &= p_3(b) = f\,(b)\,,\\
f(c) &= p_3(c) = f\,(c)\,,\\
f'(a) &= p_3'(a) = \frac{d}{da} f\,(a)\,.
\end{aligned}$$

(3) Compte tenu de (5) et des résultats obtenus dans l'exercice 1, on a

$$\int_a^b p_3(t)dt = \frac{(b-a)}{6}\big(f(a) + 4f\,(c) + f(b)\big) + f[a,c,b,a]\int_a^b (t-a)(t-c)(t-b)dt,$$

ce qui fait apparaître une formule d'intégration numérique modifiée par rapport à celle de de Simpson. On remarque, après calculs, que

$$\int_a^b (t-a)(t-c)(t-b)dt = 0$$

et donc que la formule d'intégration numérique est identique à celle de l'exercice 1 !

(4) Cette question était un piège puisque les deux formules étaient identiques !

Références

[BM03] J. Bastien et J.-N. Martin. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4 ième étage). Paris : Dunod, 2003. 392 pages.