

CALCUL DU MAXIMUM DE LA VALEUR ABSOLUE D'UNE FONCTION RÉELLE

1. Recherche sur un intervalle borné

On se donne f , continue sur un intervalle borné $[a, b]$, et on cherche

$$M = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|. \quad (1.1)$$

Ce maximum existe puisque f est continue sur $[a, b]$. Si f est supposée de plus dérivable sur $]a, b[$, l'étude classique du tableau de variation de f permet de déterminer (souvent de façon analytique dans les cas donnés) la valeur de M .

Pour automatiser cette recherche, souvent utile dans le cas de majoration d'erreur en interpolation ou intégration, il est plus rapide de vérifier la chose suivante :

On suppose que f' a un nombre fini de zéros $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans $]a, b[$. Dans ce cas, f atteint ses extrêmes nécessairement en l'un des x_i , ou en a ou en b . Le maximum de $|f|$ est alors nécessairement donné par

$$M = \max(|f(a)|, |f(b)|, \max_{1 \leq i \leq n} |f(x_i)|). \quad (1.2)$$

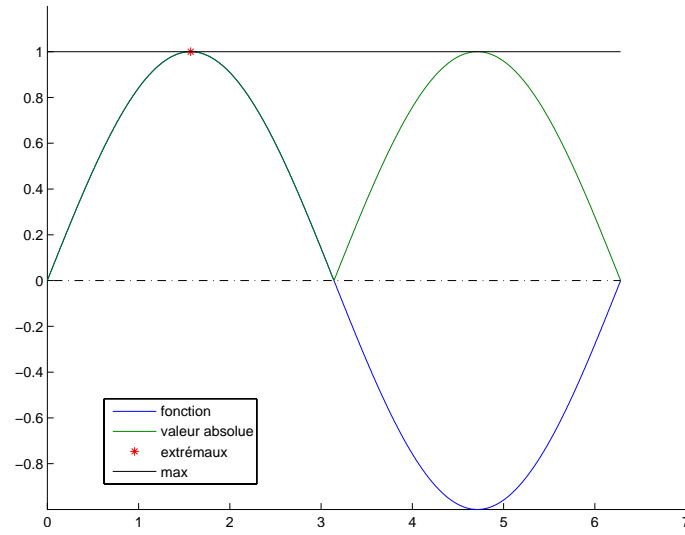
On peut confier à matlab, la recherche des zéros de f' , grâce à la fonction `solve`. Si celle-ci échoue, on utilise alors la fonction `fminbnd` pour déterminer les extrêmes de f sur $[a, b]$.

Voir la fonction fournie `maxabsfun`.

2. Exemples

Donnons quelques exemples.

•

FIGURE 1. Extréma de la fonction f définie par (2.1).

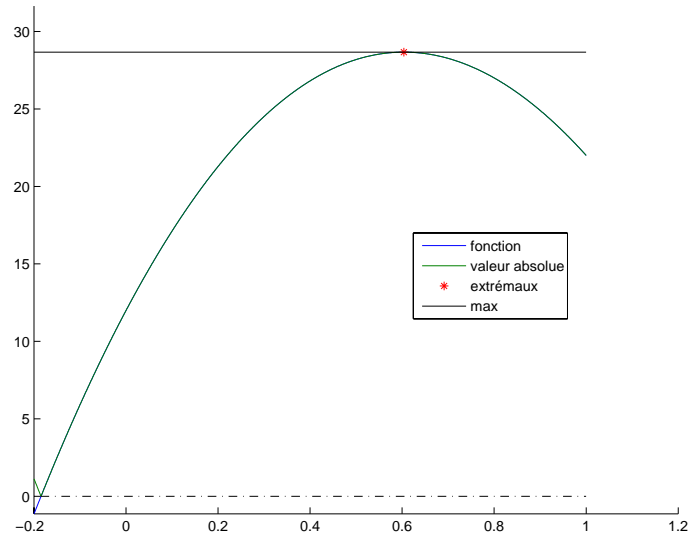
Pour

$$f(x) = \sin(x) \text{ sur } [0, 2\pi] \quad (2.1)$$

on a obtenu

$$M = 1.000000000. \quad (2.2)$$

Voir figure 1.

FIGURE 2. Extréma de la fonction f définie par (2.3).

Pour

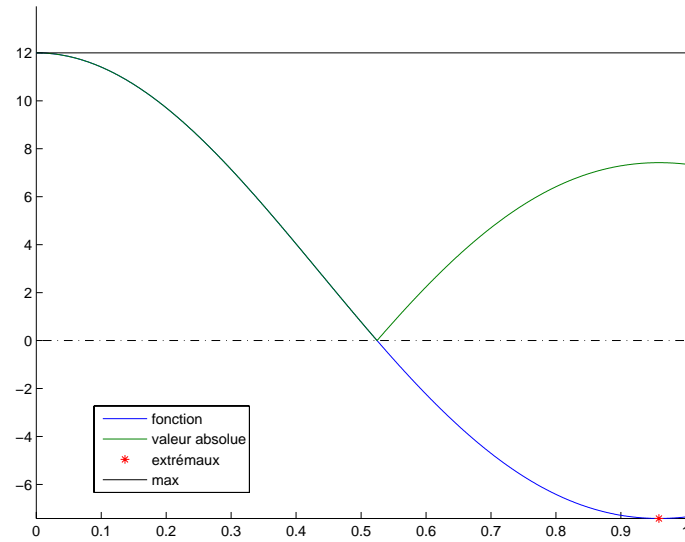
$$f(x) = x^4 + x^3 - 48x^2 + 56x + 12 \text{ sur } [-0.2, 1] \quad (2.3)$$

on a obtenu

$$M = 28.666271956. \quad (2.4)$$

Voir figure 2.

•

FIGURE 3. Extréma de la fonction f définie par (2.5).

Pour

$$f(x) = e^{-x^2} (16x^4 - 48x^2 + 12) \text{ sur } [0, 1] \quad (2.5)$$

on a obtenu

$$M = 12.000000000. \quad (2.6)$$

Voir figure 3.

•

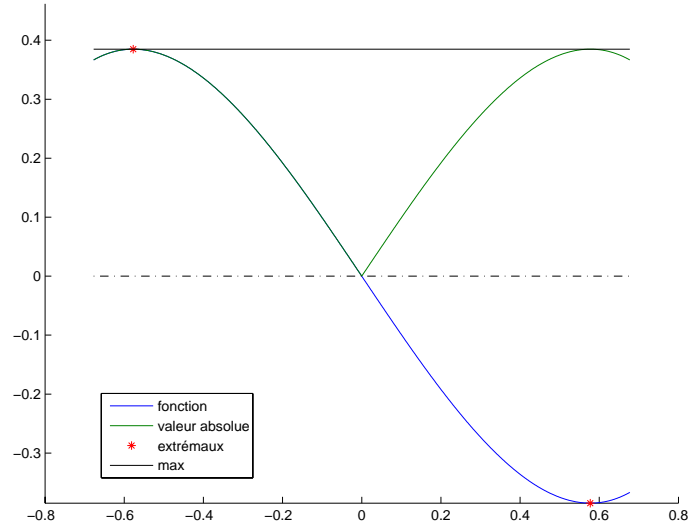


FIGURE 4. Extréma de la fonction f définie par (2.7).

Pour

$$f(x) = x^3 - x \text{ sur } [-\sqrt{3}/3 - 0.1, \sqrt{3}/3 + 0.1] \tag{2.7}$$

on a obtenu

$$M = 2/9 \sqrt{3} \approx 0.384900179. \tag{2.8}$$

Voir figure 4.

3. Recherche sur un intervalle non borné

Prévoir AP extension au cas $a = -\infty$ ou/et $b = +\infty$ mais problème de limite.

On peut la calculer sous matlab symbolique mais il est difficile de définir la fonction, par exemple, qui à $\varepsilon \in \mathbb{R}$, associe A tel que pour tout $x \geq A$, $l - f(x) \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ où $l = \lim_{+\infty} f$.