Université Claude Bernard Lyon 1

POLYTECH LYON

CORRIGÉS DES TRAVAUX DIRIGÉS DE l'UE MNBif

Informatique 3A

MÉTHODES NUMÉRIQUES DE BASE

2021-2022, Automne

Jérôme Bastien

Document compilé le 7 juillet 2021

Le lien original de ce document est le suivant :
`http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MNBif/TDcorMNBif.pdf`

Liste des Travaux Dirigés

Avant-propos

Ce polycopié constitue les corrigés de TD de Méthodes Numériques de Base du département Informatique 3A (2021-2022, Automne).

Un certain nombre d'exercices sont extraits de [BM03] ; certaines corrections ne sont pas données, mais elles figurent dans cet ouvrage, disponible à la BU.

Ce polycopié de corrigé de TD est normalement disponible à la fois

- en ligne sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html` à la rubrique habituelle ;
- en cas de problème internet, sur le réseau de l'université Lyon I : il faut aller sur :
  — 'Poste de travail',
  — puis sur le répertoire '`P:`' (appelé aussi '\\`teraetu`\`Enseignants`'),
  — puis '`jerome.bastien`',
  — puis '`Polytech`',
  — puis '`Informatique 3A`'.
  — enfin sur '`MNBif`'.

CORRECTION DU TRAVAUX DIRIGÉS 1

Interpolation

Pour tous les calculs de polynôme d'interpolation par la méthode de Newton, on consultera la définition 1.16 page 14 du cours.

Correction de l'exercice 1.1.

(1) D'après la définition

$$a^n \text{ est le produit de } n \text{ facteurs égaux à } a, \tag{1.1}$$

et l'expression a^0 n'a aucun sens *a priori*. À un niveau élémentaire, on peut montrer que

$$\forall n, m \geq 1, a^{n+m} = a^n a^m. \tag{1.2}$$

En effet, d'après la définition (1.1), a^{n+m} est le produit de $n+m$ facteurs égaux à a, a^n est le produit de n facteurs égaux à a, a^m est le produit de m facteurs égaux à a et donc a^{n+m} est aussi le produit de $n+m$ facteurs égaux à a. Cependant, violons le domaine de validité de (1.2) et écrivons-là abusivement avec $n = 0$, ce qui donne formellement

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad a^{0+m} = a^0 a^m.$$

soit

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad a^m = a^0 a^m. \tag{1.3}$$

Si a est non nul, a^m est non nul et dans (1.3), on peut donc diviser par a^m et obtenir

$$1 = a^0. \tag{1.4}$$

Cette égalité non montre que a^0, *a priori* non défini, peut être posé formellement égal à 1. Ainsi, on pose

$$\forall a \neq 0, \quad a^0 = 1. \tag{1.5}$$

Plus de détails dans l'annexe A.

(2) (a) De la même façon que les diverses équations de l'annexe A, il est légitime de considérer que si I et J sont deux ensembles finis non vides et disjoints, on a

$$\prod_{i \in I \cup J} x_i = \prod_{i \in I} x_i \prod_{i \in J} x_i \tag{1.6}$$

Si on applique formellement (1.6) à J vide, on aurait donc, puisque $I \cup \emptyset = I$

$$\prod_{i \in I} x_i = \prod_{i \in I} x_i \prod_{i \in \emptyset} x_i$$

et donc, si les x_i sont non nuls, on a, par division,

$$\prod_{i \in \emptyset} x_i = 1, \tag{1.7}$$

ce qui légitime de choisir si I est un ensemble vide, le produit

$$P = \prod_{i \in I} x_i,$$

conventionnnellement égal à 1.

(b) Il est légitime de considérer que si I et J sont deux ensembles finis non vides et disjoints, on a

$$\sum_{i\in I\cup J} x_i = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in J} x_i \tag{1.8}$$

Si on applique formellement (1.8) à J vide, on aurait donc, puisque $I \cup \emptyset = I$

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in \emptyset} x_i$$

et donc on a, par soustraction

$$\sum_{i\in \emptyset} x_i = 0,$$

ce qui légitime de choisir si I est un ensemble vide, la somme

$$S = \sum_{i\in I} x_i,$$

conventionnnellement nulle.

Remarque 1.1. Dans matlab [1], cette convention est choisie ! Une somme d'un tableau vide est nulle et un produit d'un tableau vide est égal à 1.

Correction de l'exercice 1.2.

(1) Ici, on a $n = 1$.

Chacun des polynômes de Lagrange l_i (de degré 1) est donné par la formule :

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \tag{1.9}$$

On a donc successivement

$$\begin{aligned} l_0(x) &= \frac{(x-2)}{(1-2)},\\ l_1(x) &= \frac{(x-1)}{(2-1)}. \end{aligned}$$

soit encore après calculs :

$$l_0(x) = -x + 2, \tag{1.10a}$$
$$l_1(x) = x - 1. \tag{1.10b}$$

Ensuite, le polynôme interpolateur de degré 1, $\Pi_n(g)$, est donné par la formule :

$$\Pi_n(g)(x) = \sum_{i=0}^{n} g(x_i) l_i(x). \tag{1.11}$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_n(g)(x) = g(x_0)l_0(x) + g(x_1)l_1(x).$$

Après calculs, il vient :

$$\Pi_n(g)(x) = 4\,x - 7. \tag{1.12}$$

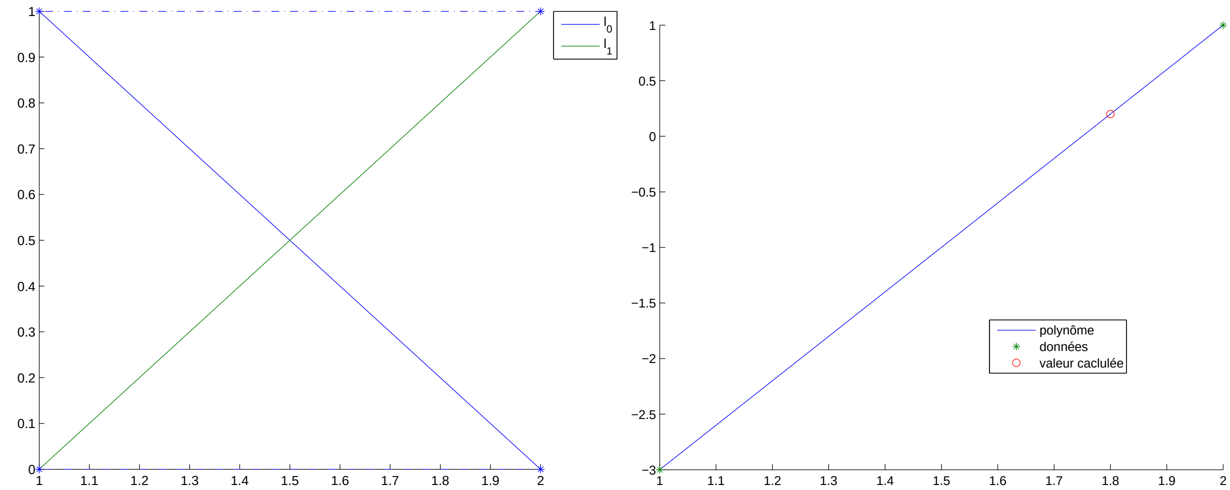
Pour $\alpha = 1.8$, on obtient alors :

$$\Pi_n(g)(\alpha) = 0.2, \tag{1.13}$$

ce qui constitue une valeur approchée de $g(\alpha)$.

Sur la figure 1.1, ont été tracés les polynômes de Lagrange l_0 et l_1 et le polynôme interpolateur.

1. et sûrement avec d'autres langages.



(a) Les polynômes de Lagrange l_0 et l_1.

(b) Le polynôme d'interpolation et les données.

FIGURE 1.1. L'interpolation de Lagrange.

(2) Ici, on a $n = 2$.

Chacun des polynômes de Lagrange l_i (de degré 2) est donné par la formule (1.9). On a donc successivement

$$l_0(x) = \frac{(x-2)\,(x-6)}{(1-2)\,(1-6)},$$
$$l_1(x) = \frac{(x-1)\,(x-6)}{(2-1)\,(2-6)},$$
$$l_2(x) = \frac{(x-1)\,(x-2)}{(6-1)\,(6-2)}.$$

soit encore après calculs :

$$l_0(x) = 1/5\,x^2 - 8/5\,x + \frac{12}{5}, \tag{1.14a}$$
$$l_1(x) = -1/4\,x^2 + 7/4\,x - 3/2, \tag{1.14b}$$
$$l_2(x) = 1/20\,x^2 - \frac{3}{20}\,x + 1/10. \tag{1.14c}$$

Ensuite, le polynôme interpolateur de degré 2, $\Pi_n(g)$, est donné par la formule (1.11). Ici, on a donc :

$$\Pi_n(g)(x) = g(x_0)l_0(x) + g(x_1)l_1(x) + g(x_2)l_2(x).$$

Après calculs, il vient :

$$\Pi_n(g)(x) = -3/4\,x^2 + \frac{25}{4}\,x - 17/2. \tag{1.15}$$

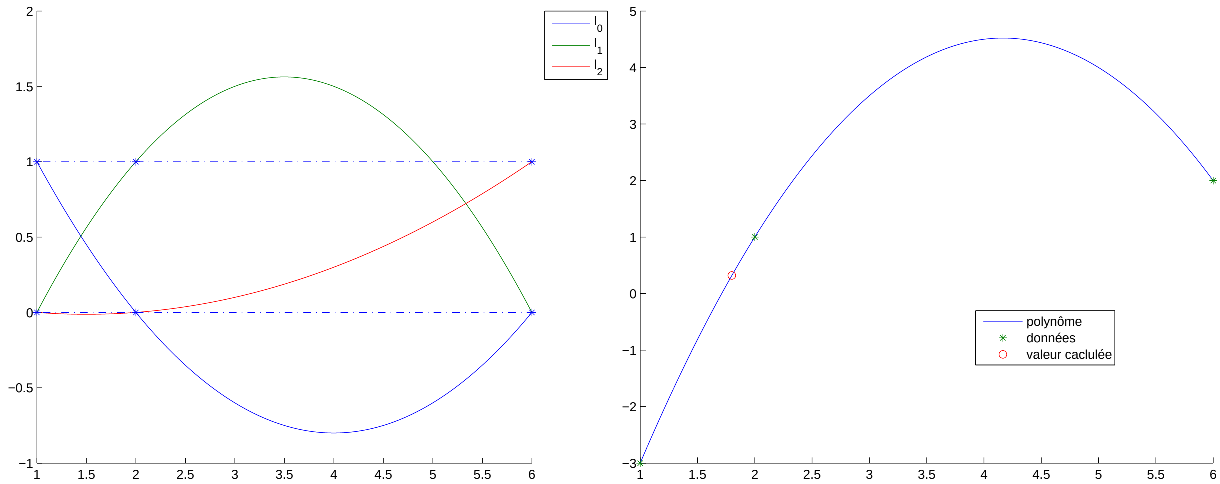
Pour $\alpha = 1.8$, on obtient alors :

$$\Pi_n(g)(\alpha) = 0.320000000000000000000000000000, \tag{1.16}$$

ce qui constitue une valeur approchée de $g(\alpha)$.

Sur la figure 1.2, ont été tracés les polynômes de Lagrange l_0, l_1 et l_2 et le polynôme interpolateur.

(3) (a) Ici, on a $n = 1$.



(a) Les polynômes de Lagrange l_0, l_1 et l_2. (b) Le polynôme d'interpolation et les données.

FIGURE 1.2. L'interpolation de Lagrange.

$x_i \setminus k$	0	1
$x_0 = 1$	$\boxed{-3}$	
		$\boxed{4}$
$x_1 = 2$	1	

TABLE 1.1. Différences divisées de g.

Pour calculer le polynôme sous la forme de Newton, on détermine tout d'abord les différences divisées $g[x_i, ..., x_{i+k}]$ données dans le tableau 1.1. Ensuite, on n'utilise plus que les différences divisées qui sont encadrées et le polynôme interpolateur de degré 1, $\Pi_n(g)$, est donné par la formule :

$$\Pi_n(g)(x) = \sum_{i=0}^{n} g[x_0, ..., x_i](x - x_0)...(x - x_{i-1}). \tag{1.17}$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_n(g)(x) = g[x_0] + g[x_0, x_1](x - x_0).$$

On a

$$x - x_0 = x - 1,$$

Après calculs, il vient :

$$\Pi_n(g)(x) = 4\,x - 7. \tag{1.18}$$

Pour $\alpha = 1.8$, on retrouve alors la valeur donnée par (1.13).

(b)

Ici, on a $n = 2$. On n'est pas obligé de reprendre tous les calculs. Il suffit de rajouter le point x_2 dans le tableau des différences divisées et la valeur correspondante $g(x_2)$, comme le montre le tableau 1.2. Ensuite, on utilise la formule (1.17), pour passer de $n - 1$ à n ; il suffit de rajouter le polynôme

$x_i \setminus k$	0	1	2
$x_0 = 1$	$\boxed{-3}$		
		$\boxed{4}$	
$x_1 = 2$	1		$\boxed{-3/4}$
		$1/4$	
$x_2 = 6$	2		

TABLE 1.2. Différences divisées de g.

$g[x_0, ..., x_n](x - x_0)...(x - x_{n-1})$ au polynôme $\Pi_{n-1}(g)$ pour obtenir le polynôme $\Pi_n(g)$. On obtient le polynôme ci-dessus.

Pour $\alpha = 1.8$, on retrouve alors la valeur donnée par (1.16).

(4) La seconde solution est plus rapide, car fait appel aux calculs précédents, ce qui était le but poursuivi par « l'inventeur des différences divisées », Isaac Newton. On pourra consulter par exemple `http://www.unige.ch/~wanner/teaching/Numi/Numi2.pdf`

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.3.

(1) Les formules (1.54) du polycopié de cours donnent numériquement

$$\begin{aligned} x_0 &= 6, \\ x_1 &= 6.25, \\ x_2 &= 6.75, \\ x_3 &= 7. \end{aligned}$$

$x_i \setminus k$	0	1	2	3
$x_0 = 6$	$\boxed{2.708050}$			
		$\boxed{0.131159}$		
$x_1 = 6.250000$	2.740840		$\boxed{-0.008158}$	
		0.125041		$\boxed{0.000653}$
$x_2 = 6.750000$	2.803360		-0.007505	
		0.119412		
$x_3 = 7$	2.833213			

TABLE 1.3. Différences divisées de f.

Pour calculer le polynôme sous la forme de Newton, on détermine tout d'abord les différences divisées $f[x_i, ..., x_{i+k}]$ données dans le tableau 1.3. Ensuite, on n'utilise plus que les différences divisées qui sont encadrées et le polynôme interpolateur de degré 3, $\Pi_3(f)$, est donné par la formule :

$$\Pi_3(f)(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, ..., x_i](x - x_0)...(x - x_{i-1}). \tag{1.19}$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_3(f)(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2).$$

On a successivement

$$\begin{aligned}
&x - x_0 = x - 6,\\
&(x-x_0)(x-x_1) = x^2 - 12.250000x + 37.500000,\\
&(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = x^3 - 19x^2 + 120.187500x - 253.125000.
\end{aligned}$$

Après calculs, il vient :

$$\Pi_3(f)(x) = 0.000653x^3 - 0.020564x^2 + 0.309573x + 1.449886. \tag{1.20}$$

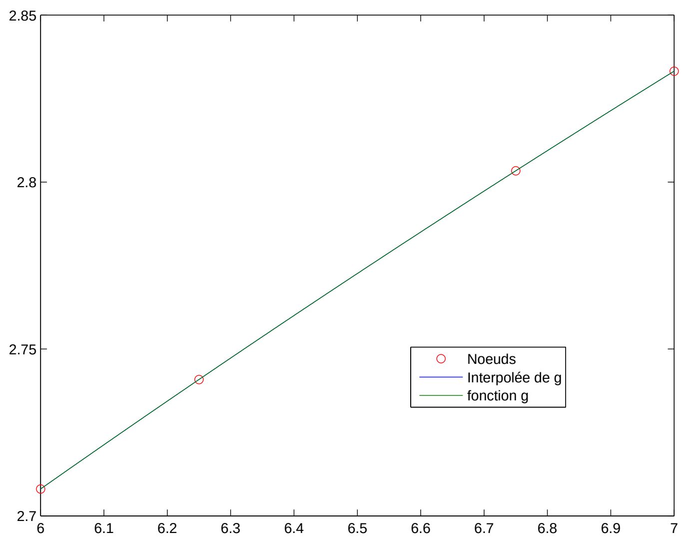


FIGURE 1.3. La fonction g et son interpolée.

Voir la figure 1.3.

(2) On utilise le théorème 1.21 du polycopié de cours : il existe ξ tel que

$$E_3(f)(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\omega_4(x),$$

et donc

$$|E_3(f)| \leq \frac{\max_\xi \left|f^{(4)}(\xi)\right|}{4!} \max_x |\omega_4(x)|,$$

Graphiquement, on constate que

$$\max\left(|\omega_4)\right| \approx 0.016000.$$

Par ailleurs, on peut vérifier que

$$f^{(4)}(x) = -96\ (2\,x+3)^{-4}, \tag{1.21}$$

et puisque sur $[a,b]$, $x \geq 6$, on a

$$|f^{(4)}(x)| \leq 1.89630\,10^{-3}, \tag{1.22}$$

dont on déduit que

$$|E_3(f)| \leq 1.60000\,10^{-2} \times \frac{1}{4!} \times 1.89630\,10^{-3} = 1.26420\,10^{-6}. \tag{1.23}$$

REMARQUE 1.2. Si utilise la fonction `maxabsfun`, fournie sur le site habituel, pour déterminer avec plus de soin, un majorant exact de $f^{(4)}$, on obtient

$$M = 1.89630\,10^{-3}.$$

qui est identique à (1.22).

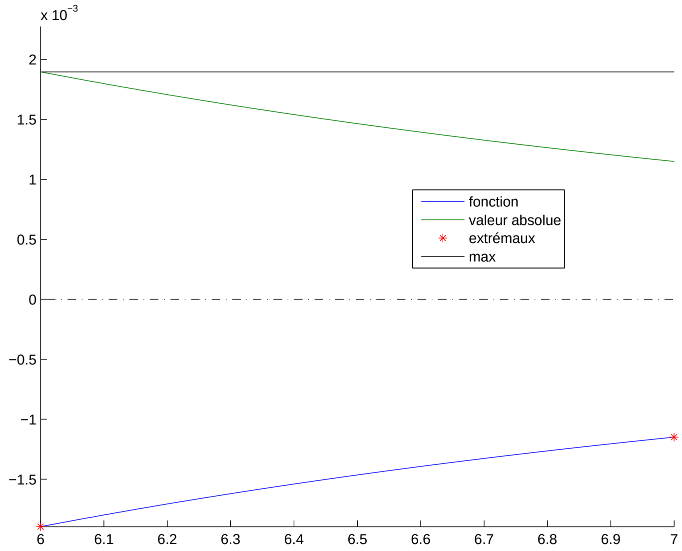


FIGURE 1.4. Extréma de la fonction f définie par (1.21).

Voir figure 1.4.

Dans ce cas, l'estimation (1.23) est identique puisque l'on obtient

$$|E_3(f)| \leq 1.60000\,10^{-2} \times \frac{1}{4!} \times 1.89630\,10^{-3} = 1.26420\,10^{-6}.$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.4.

(1) D'après le théorème 1.24 du polycopié de cours, on a, pour des nœuds équirépartis de l'intervalle $[a, b]$

$$E_n(f) \leq \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|. \tag{1.24}$$

La dérivée n-ième de f est majorée, en valeur absolue, par $1/3^n$. D'où

$$E_n(f) \leq \frac{1}{4(n+1)n^{n+1}3^{n+1}},$$

soit encore

$$E_n(f) \leq \frac{1}{4(n+1)(3n)^{n+1}}. \tag{1.25}$$

(2) On sait que cette quantité tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Nous proposons deux méthodes légèrement différentes.

(a) De façon brutale, on détermine à la main, le plus petit n tel que cette quantité soit inférieure à $\varepsilon = 10^{-4}$. C'est-à-dire, on teste successivement $n = 1$, $n = 2$, ... On trouve

$$n = 3. \tag{1.26}$$

(b) De façon plus subtile, remarquons que l'on a successivement les majorations suivantes : pour tout n entier, on a

$$\begin{aligned} 4(n+1)(3n)^{n+1} &\geq 4(3n)^{n+1}, \\ &= 4 \times 3^{n+1} n^{n+1}, \\ &= 12 \times 3^n n^{n+1}, \\ &\geq 12 \times 3^n n^n, \\ &= 12 \times (3n)^n, \end{aligned}$$

et donc l'inégalité

$$\frac{1}{4(n+1)(3n)^{n+1}} \leq \varepsilon \tag{1.27}$$

est vraie si

$$\frac{1}{12(3n)^n} \leq \varepsilon, \tag{1.28}$$

ce qui est équivalent à

$$(3n)^n \geq \frac{1}{12\varepsilon},$$

et donc à

$$(3n)^{3n} \geq \frac{1}{(12\varepsilon)^3}.$$

Par croissance, il suffit donc de trouver le plus petit entier n_0 tel que

$$(3n_0)^{3n_0} = \frac{1}{(12\varepsilon)^3}.$$

D'après la section B.3 de l'annexe B page 125 du cours cela est équivalent à

$$x = \frac{\ln z}{W(\ln z)},$$

où

$$x = 3n_0 \text{ et } z = \frac{1}{(12\varepsilon)^3}.$$

On trouve donc, dans $\mathbb{R}$:

$$n_0 = \frac{\ln z}{3W(\ln z)},$$

soit numériquement :

$$n_0 = 3.0417459.$$

et donc, dans $\mathbb{N}$:

$$n_0 = 4,$$

ce qui est un peu plus grand que la valeur donnée par (1.26), ce qui est normal car on a raisonné en condition suffisante, en remplaçant l'inégalité (1.27) par l'inégalité (1.28) moins forte. Au final, cette méthode est plus pessimiste !

(3) Tous les résultats sont identiques pour la fonction g.

Remarque 1.3. Dans cet exercice, on a montré que l'erreur d'interpolation entre f et son polynôme d'interpolation p_n, défini par $n+1$ points équirépartis est donnée par (1.24) dans le cas général et par (1.25) dans le cas particulier étudié.

Ainsi, cette erreur tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Attention, ce résultat n'est vrai qu'en théorie ; en pratique, du fait des arrondis de calculs, l'erreur d'interpolation entre f et p_n ne tend pas vers zéro quand n grandit.

De plus, dans [BM03, Exercice 2.3 p. 53 et 239 et TP 2.D p. 65], nous avions mis en avant le fait que l'on peut évaluer numériquement le polynôme p_n de trois façons :

(1) en utilisant la forme de Newton donnée par

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, ..., x_i](x - x_0)...(x - x_{i-1}), \tag{1.29}$$

et l'algorithme d'évaluation de Horner [2]

(2) en utilisant sa forme canonique [3]

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \ ; \tag{1.31}$$

(3) en utilisant son écriture dans la base des polynômes de Lagrange l_i

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x), \tag{1.32}$$

où

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \tag{1.33}$$

L'erreur est intrinséquement liée à l'utilisation d'un calculateur par le cumul d'imprécisions liées aux arrondis. Cependant, les trois méthodes n'ont pas la même sensibilité numérique. Nous donnons en annexe B deux simulations numériques mettant cela en évidence sur les fonctions f et g définies dans l'énoncé.

Correction de l'exercice 1.5.

D'après le théorème 1.21 du polycopié de cours, on a, sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}] = [ih, (i+1)h]$,

$$E_1(x) = \frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(x - x_i)(x - x_{i+1}).$$

Sur $[0, 1]$, on peut majorer brutalement chacun des produits $(x - x_i)$ par h et donc $|(x - x_i)(x - x_{i+1})|$ par h^2. On peut aussi être plus précis et montrer que la fonction $x \mapsto (a - x)(b - x)$ a un maximum égal à $\frac{(a-b)^2}{4}$. On

2. qui consiste en fait à évaluer $p_n(x)$ de la façon suivante : si on note $a_0 = f[x_0]$, $a_1 = f[x_0, x_1]$, $a_2 = f[x_0, x_1 x_{,2}]$,..., $a_n = f[x_0, ..., x_n]$, alors on calcule p_n défini par (1.29) de la façon suivante (dans cet ordre, sans exprimer ce qui suit dans la base canonique) :

$$p_1(x) = a_0 + (x - x_0)a_1, \tag{1.30a}$$

si $n = 1$,

$$p_2(x) = a_0 + (x - x_0)(a_1 + (x - x_1)a_2), \tag{1.30b}$$

si $n = 2$ et de façon plus générale :

$$p_n(x) = a_0 + (x - x_0)(a_1 + (x - x_1)(a_2 + (x - x_2)(a_3 + (x - x_3)(...(a_{n-2} + (x - x_{n-2})(a_{n-1} + (x - x_{n-1})a_n)))...))), \tag{1.30c}$$

de façon, entre autres, à diminuer le nombre d'opérations à effectuer, notamment le calcul des produits $(x - x_0)....(x - x_i)$. (voir [BM03, Algorithme 2.1 d'Horner p. 38 et TP 2.A p. 61])

3. que l'on obtient grâce à la forme de Newton et par exemple [BM03, Exercice 2.7 p. 56, Algorithme 6.1 p. 246].

majore donc $|(x-x_i)(x-x_{i+1})|$ par $h^2/4$. On a donc

$$|E_1(x)| \leq \max_{\xi\in[0,1]} \left|f^{(2)}(\xi)\right| \frac{h^2}{2\times 4} = \max_{\xi\in[0,1]} \left|f^{(2)}(\xi)\right| \frac{h^2}{8}.$$

On peut aussi retrouver cette formule grâce au théorème 1.34 du polycopié de cours. Par ailleurs, on a

$$f^{(2)}(x) = 2\,e^{-x^2}\left(-1+2\,x^2\right). \tag{1.34}$$

On peut utiliser brutalement l'inégalité triangulaire

$$\forall a,b\in\mathbb{R},\quad |a+b| \leq |a|+|b|. \tag{1.35}$$

On écrit donc

$$\forall x\in[0,1],\quad \left|f^{(2)}(x)\right| \leq 2\left|e^{-x^2}\right|\left|2x^2-1\right|, \tag{1.36}$$

ce qui donne

$$\forall x\in[0,1],\quad \left|f^{(2)}(x)\right| \leq 2e^{-x^2}\left|2x^2-1\right|, \tag{1.37}$$

et donc

$$\forall x\in[0,1],\quad \left|f^{(2)}(x)\right| \leq 2\left|2x^2-1\right|, \tag{1.38}$$

dont on déduit, grâce à (1.35),

$$\forall x\in[0,1],\quad \left|f^{(2)}(x)\right| \leq 2\left(\left|2x^2\right|+|-1|\right), \tag{1.39}$$

et donc

$$\forall x\in[0,1],\quad \left|f^{(2)}(x)\right| \leq 2\left(2x^2+1\right), \tag{1.40}$$

et enfin, puisque sur $[0,1]$, $x^2\leq 1$:

$$\forall x\in[0,1],\quad \left|f^{(2)}(x)\right| \leq 2(2+1)=6, \tag{1.41}$$

et un majorant M de $\left|f^{(2)}(x)\right|$ sur $[0,1]$ est donné par

$$M=6, \tag{1.42}$$

Bref

$$|E_1(x)| \leq \frac{3}{4}h^2.$$

Ainsi, pour avoir une erreur inférieure à $\varepsilon = 5.\,10^{-7}$, il suffit que

$$\frac{3}{4}h^2 \leq \varepsilon,$$

soit

$$h \leq \sqrt{\frac{4}{3}\varepsilon}, \tag{1.43}$$

soit encore

$$\frac{1}{N} \leq \sqrt{\frac{4}{3}\varepsilon}.$$

On a donc

$$N \geq \sqrt{\frac{3}{4\varepsilon}} = 1224.744871.$$

Puisque N est entier, on choisit

$$N = 1225. \tag{1.44}$$

Remarque 1.4. On peut améliorer la valeur de M donnée par (1.42) de deux façons.

(1) Comme l'a remarqué M. Thioliere en 2018, il suffit de reprendre l'inégalité (1.36). On utlise le fait que $x \mapsto 2x^2 - 1$ est croissante sur $[0,1]$ qu'elle vaut -1 en 0 et 1 en 1 ; cette fonction est donc comprise entre -1 et 1 et en valeur absolue, elle est donc majorée par 1. De (1.36), on déduit donc que

$$\forall x \in [0,1], \quad \left|f^{(2)}(x)\right| \leq 2 \times 1, \tag{1.45}$$

et donc

$$\forall x \in [0,1], \quad \left|f^{(2)}(x)\right| \leq 2, \tag{1.46}$$

et on remplace donc (1.42) par

$$M = 2. \tag{1.47}$$

Dans ce cas, M est optimal puisque'il est atteint par f :

$$\left|f^{(2)}(0)\right| = M. \tag{1.48}$$

(2) On peut aussi, de façon informatique, utiliser la fonction `maxabsfun`, fournie sur le site habituel, pour déterminer avec plus de soin, un majorant exact de $f^{(2)}$, on obtient

$$M = 2.000000000, \tag{1.49}$$

et on retrouve donc (1.47).

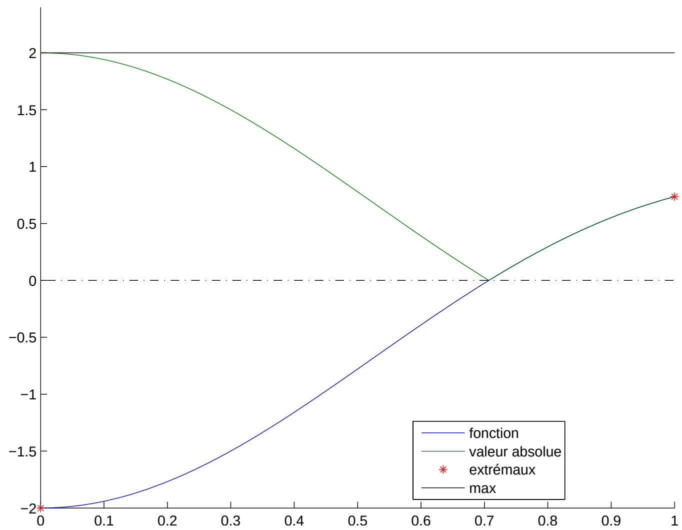


Figure 1.5. Extréma de la fonction g définie par (1.34).

Voir figure 1.5.

En utilisant (1.47) ou (1.49), l'estimation (1.43) est remplacée par

$$h \leq \sqrt{\frac{8}{M}\varepsilon},$$

et donc puisque

$$N = \frac{1}{h},$$

l'estimation (1.44) est remplacée un peu plus avantageusement par

$$N = 708.$$

Correction de l'exercice 1.6.

(1) Parmi les différents points t de l'énoncé , on considère quatre points successifs qui encadrent "au mieux" la donnée $\tau = 3.100000$. On utilise tout d'abord le fait que l'on fait de l'"inter"polation (la donnée τ est à l'intérieur des points t_i). De plus, l'écart entre τ et les t_i doit être le plus faible possible. En outre, l'écart entre les différents t_i doit être le plus faible possible. Enfin, on admet que la situation doit être la plus symétrique possible. Finalement, on choisit donc :

$$t_0 = 2.50, \tag{1.50a}$$
$$t_1 = 3, \tag{1.50b}$$
$$t_2 = 3.50, \tag{1.50c}$$
$$t_3 = 4. \tag{1.50d}$$

$t_i \setminus k$	0	1	2	3
$t_0 = 2.500000$	$\boxed{7.830700}$			
		$\boxed{2.750600}$		
$t_1 = 3$	9.206000		$\boxed{0.058400}$	
		2.809000		$\boxed{-0.048800}$
$t_2 = 3.500000$	10.610500		-0.014800	
		2.794200		
$t_3 = 4$	12.007600			

Table 1.4. Différences divisées de f.

Pour calculer le polynôme sous la forme de Newton, on détermine tout d'abord les différences divisées $f[t_i, ..., t_{i+k}]$ données dans le tableau 1.4. Ensuite, on n'utilise plus que les différences divisées qui sont encadrées et le polynôme interpolateur de degré 3, Π_3, est donné par la formule :

$$\Pi_3(t) = \sum_{i=0}^{n} f[t_0, ..., t_i](t - t_0)...(t - t_{i-1}). \tag{1.51}$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_3(t) = f[t_0] + f[t_0, t_1](t - t_0) + f[t_0, t_1, t_2](t - t_0)(t - t_1) + f[t_0, t_1, t_2, t_3](t - t_0)(t - t_1)(t - t_2).$$

On a successivement

$$t - t_0 = t - 2.500000,$$
$$(t - t_0)(t - t_1) = t^2 - 5.500000t + 7.500000,$$
$$(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2) = t^3 - 9t^2 + 26.750000t - 26.250000.$$

Après calculs, il vient :

$$\Pi_3(t) = -0.048800t^3 + 0.497600t^2 + 1.124000t + 2.673200. \tag{1.52}$$

On en déduit

$$\Pi_3(\tau) = \Pi_3(3.100000) = 9.485735.$$

Voir la figure 1.6.

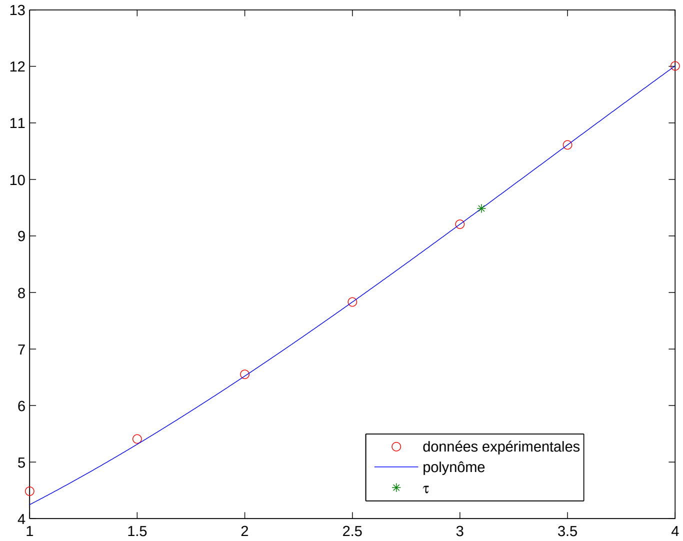


FIGURE 1.6. Les données expérimentales et la courbe de degré 3.

REMARQUE 1.5. Au lieu de prendre (1.50) on considére cette fois-ci les points t_i définis par

$$t_0 = 1, \tag{1.53a}$$
$$t_1 = 1.500000, \tag{1.53b}$$
$$t_2 = 2, \tag{1.53c}$$
$$t_3 = 2.500000, \tag{1.53d}$$
$$t_4 = 3, \tag{1.53e}$$
$$t_5 = 3.500000, \tag{1.53f}$$
$$t_6 = 4. \tag{1.53g}$$

Une autre façon plus complète de procéder et de déterminer tous les polynômes de degrés 3 définis par 4 points qui se suivent parmi les t_i, qui peuvent même ne pas encadrer τ ! On dispose des 4 possibilités différentes données par $i \in \{1,2,3,4\}$, $i \in \{2,3,4,5\}$, $i \in \{3,4,5,6\}$ et $i \in \{3,4,5,6\}$. On calcule pour ces 4 possibilités les différences divisées puis $\Pi_3(\tau)$. On trouve

$$\Pi_3(\tau) = 9.435602,$$
$$\Pi_3(\tau) = 9.488824,$$
$$\Pi_3(\tau) = 9.486686,$$
$$\Pi_3(\tau) = 9.485735.$$

Voir la figure 1.7. On constate que les quatre solutions sont quasi identiques.

(2) L'expression analytique de l'erreur est donnée par

$$E_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\omega_4(x), \tag{1.54}$$

où ici f et ξ ne sont pas connus. Cette formule provient de la propriété 1.21 du polycopié de cours utilisée ici avec $n = 3$.

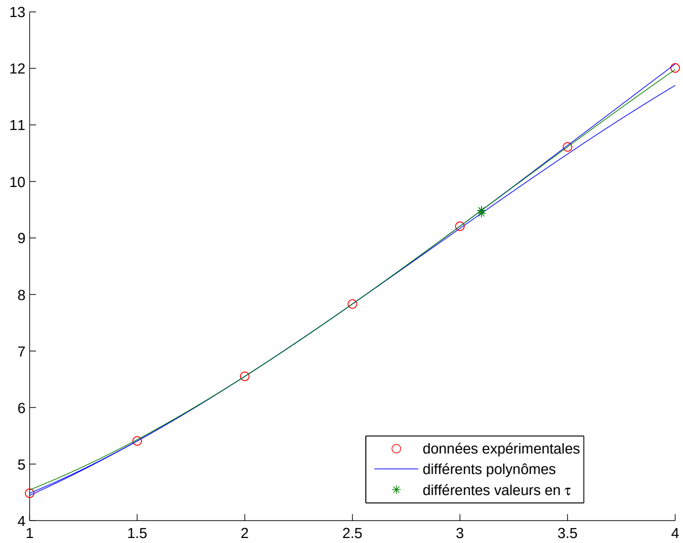


FIGURE 1.7. Les données expérimentales et les différentes courbes de degré 3.

(3) Il est donc impossible de calculer une telle erreur. Cependant, on peut supposer par exemple que f est polynomiale de degré 4, ou ce qui revient au même que $f^{(4)}$ ne varie pas. On a alors une approximation de l'erreur, obtenue en prenant un point supplémentaire t_{n+1} :

$$E_3(x) \approx f[t_0, ..., t_{n+1}](x - t_0)...(x - t_n), \tag{1.55}$$

utilisée ici avec $n = 3$. Cela provient de (1.54) ; en effet, si f est polynomiale de degré 4, le coefficient dominant de f est $f[t_0, ..., t_{n+1}]$ puisque c'est le coefficient dominant de $f = \Pi_4$ sur la forme de newton. On a alors pour tout ξ, puisque $f^{(4)}$ est constant :

$$f^{(4)}(\xi) = 4! f[t_0, ..., t_4],$$

ce qui donne, réinjecté dans (1.54) :

$$E_3(x) = f[t_0, ..., t_4]\omega_4(x).$$

Si cette fois-ci, $f^{(4)}$ varie peu, cela devient une approximation et on a donc, dans tous les cas (1.55). Prenons $t_0 = 2.500000$, $t_1 = 3$, $t_2 = 3$, $t_3 = 4$ et $t_4 = 2$. On complète le tableau déjà fait dans la question 1 en rajoutant un cinquième point, en bas du tableau ; voir le tableau 1.5 page suivante. On déduit de ce tableau la valeur de $f[t_0, t_1, t_2, t_3, t_4]$ donnée par :

$$f[t_0, t_1, t_2, t_3, t_4] = 0.019800.$$

On a alors

$$E_3(\tau) \approx 1.98000\,10^{-2} \times (\tau - t_0)...(\tau - t_3) = 4.70448\,10^{-4}.$$

Exercices facultatifs

CORRECTION DE L'EXERCICE 1.7.
On pourra aussi consulter la correction de l'exercice de TD 1.6 page 12, très proche de cet exercice.

(1)

$t_i \setminus k$	0	1	2	3	4
$t_0 = 2.500000$	$\boxed{7.830700}$				
		$\boxed{2.750600}$			
$t_1 = 3$	9.206000		$\boxed{0.058400}$		
		2.809000		$\boxed{-0.048800}$	
$t_2 = 3.500000$	10.610500		-0.014800		$\boxed{0.019800}$
		2.794200		-0.058700	
$t_3 = 4$	12.007600		0.043900		
		2.728350			
$t_4 = 2$	6.550900				

TABLE 1.5. Différences divisées de f.

x (en mètres)	0	100	1500	10000
$t(x)$ (en secondes)	0	13	245	1980

TABLE 1.6. Les données du sportif.

Parmi les différents points $(d_i)_{0\leq i\leq 3}$ (les distances données dans la première ligne du tableau 1.6) on considère trois points successifs qui encadrent "au mieux" la donnée

$$d = 5000. \tag{1.56}$$

On utilise tout d'abord le fait que l'on fait de l'"inter"polation (la donnée d est à l'intérieur des distances $(d_i)_{0\leq i\leq 3}$) De plus, l'écart entre d et les d_i doit être le plus faible possible. En outre, l'écart entre les différents d_i doit être le plus faible possible. Enfin, on admet que la situation doit être la plus symétrique possible. Finalement, on choisit donc :

$$X_0 = 100, \tag{1.57a}$$
$$X_1 = 1500, \tag{1.57b}$$
$$X_2 = 10000, \tag{1.57c}$$

et les durées correspondantes données par

$$Y_0 = 13, \tag{1.58a}$$
$$Y_1 = 245, \tag{1.58b}$$
$$Y_2 = 1980, \tag{1.58c}$$

Il était préférable d'utiliser la méthode de Newton, mais le calcul par les polynômes de Lagrange est aussi présenté.

(a) Chacun des polynômes de Lagrange l_i (de degré 2) est donné par la formule :

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad l_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{X - X_j}{X_i - X_j}. \tag{1.59}$$

On a donc successivement

$$l_0(X)=\frac{(X-1500)\,(X-10000)}{(100-1500)\,(100-10000)},$$
$$l_1(X)=\frac{(X-100)\,(X-10000)}{(1500-100)\,(1500-10000)},$$
$$l_2(X)=\frac{(X-100)\,(X-1500)}{(10000-100)\,(10000-1500)}.$$

soit encore après calculs :

$$l_0(X)=7.215007214\,10^{-8}X^2-8.297258297\,10^{-4}X+1.082251081, \tag{1.60a}$$
$$l_1(X)=-8.403361345\,10^{-8}X^2+8.487394957\,10^{-4}X-8.403361345\,10^{-2}, \tag{1.60b}$$
$$l_2(X)=1.188354130\,10^{-8}X^2-1.901366606\,10^{-5}X+1.782531193\,10^{-3}. \tag{1.60c}$$

Ensuite, le polynôme interpolateur de degré 2, Π_2, est donné par la formule :

$$\Pi_2(X)=\sum_{i=0}^{n} Y_i l_i(X). \tag{1.61}$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_2(X)=Y_0l_0(X)+Y_1l_1(X)+Y_2l_2(X).$$

Après calculs, il vient :

$$\Pi_2(X)=3.879127409\,10^{-6}X^2+1.595076819\,10^{-1}X-2.989559460. \tag{1.62}$$

(b)

$X_i \setminus k$	0	1	2
$X_0=100$	$\boxed{13}$		
		$\boxed{1.657142857\,10^{-1}}$	
$X_1=1500$	245		$\boxed{3.879127409\,10^{-6}}$
		$2.041176470\,10^{-1}$	
$X_2=10000$	1980		

TABLE 1.7. Différences divisées de f.

Pour calculer le polynôme sous la forme de Newton, on détermine tout d'abord les différences divisées $f[X_i,...,X_{i+k}]$ données dans le tableau 1.7. Ensuite, on n'utilise plus que les différences divisées qui sont encadrées et le polynôme interpolateur est donné par la formule :

$$\Pi_2(X)=\sum_{i=0}^{n} f[X_0,...,X_i](X-X_0)...(X-X_{i-1}). \tag{1.63}$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_2(X)=f[X_0]+f[X_0,X_1](X-X_0)+f[X_0,X_1,X_2](X-X_0)(X-X_1).$$

On a successivement

$$X-X_0=X-10^2,$$
$$(X-X_0)(X-X_1)=X^2-1.600000000\,10^3X+1.500000000\,10^5.$$

Après calculs, on retrouve donc bien le polynôme déterminé par la méthode de Lagrange (voir équation (1.62)).

En prenant

$$d = 5000, \tag{1.64}$$

on en déduit la valeur de donnée par $\Pi_2(d)$ donnée par

$$\tau = \Pi_2(d) = 891.5270, \tag{1.65}$$

ce qui fournit une approximation de la performance sur le 5 000 m.

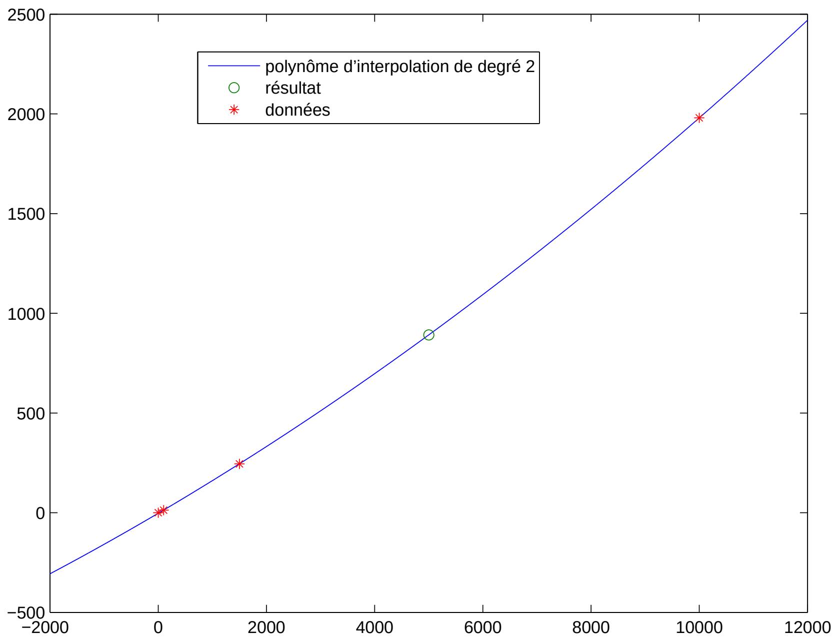


FIGURE 1.8. les données et le résultat.

Voir aussi la figure 1.8 où sont répresentées les données, Π_2, d et $\Pi_2(d)$.

REMARQUE 1.6. On peut aussi utiliser les trois premiers points, ce qui était un peu moins moins pertinent. D'une part, on ne fait plus de l'interpolation car le point est à l'extérieur des données. De plus, on utilise le temps nul correspondant à une distance nulle, ce qui n'est pas très intéressant.

Présentons néanmoins ce calcul. Il était préférable d'utiliser la méthode de Newton, mais le calcul par les polynômes de Lagrange est aussi présenté.

(a) Chacun des polynômes de Lagrange l_i (de degré 2) est donné par la formule :

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad l_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - X_j}{X_i - X_j}. \tag{1.66}$$

On a donc successivement

$$\begin{aligned}
l_0(X) &= \frac{(X-100)\,(X-1500)}{(0-100)\,(0-1500)},\\
l_1(X) &= \frac{(X)\,(X-1500)}{(100)\,(100-1500)},\\
l_2(X) &= \frac{(X)\,(X-100)}{(1500)\,(1500-100)}.
\end{aligned}$$

soit encore après calculs :

$$l_0(X) = 6.666666667\,10^{-6}X^2 - 1.066666667\,10^{-2}X + 1, \tag{1.67a}$$

$$l_1(X) = -7.142857142\,10^{-6}X^2 + 1.071428571\,10^{-2}X, \tag{1.67b}$$

$$l_2(X) = 4.761904762\,10^{-7}X^2 - 4.761904762\,10^{-5}X. \tag{1.67c}$$

Ensuite, le polynôme interpolateur de degré 2, Π_2, est donné par la formule :

$$\Pi_2(X) = \sum_{i=0}^{n} Y_i l_i(X). \tag{1.68}$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_2(X) = Y_0 l_0(X) + Y_1 l_1(X) + Y_2 l_2(X).$$

Après calculs, il vient :

$$\Pi_2(X) = 2.380952381\,10^{-5}X^2 + 1.276190476\,10^{-1}X. \tag{1.69}$$

(b)

$X_i \setminus k$	0	1	2
$X_0 = 0$	$\boxed{0}$		
		$\boxed{1.300000000\,10^{-1}}$	
$X_1 = 100$	13		$\boxed{2.380952381\,10^{-5}}$
		$1.657142857\,10^{-1}$	
$X_2 = 1500$	245		

TABLE 1.8. Différences divisées de f.

Pour calculer le polynôme sous la forme de Newton, on détermine tout d'abord les différences divisées $f[X_i, ..., X_{i+k}]$ données dans le tableau 1.8. Ensuite, on n'utilise plus que les différences divisées qui sont encadrées et le polynôme interpolateur est donné par la formule :

$$\Pi_2(X) = \sum_{i=0}^{n} f[X_0, ..., X_i](X - X_0)...(X - X_{i-1}). \tag{1.70}$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_2(X) = f[X_0] + f[X_0, X_1](X - X_0) + f[X_0, X_1, X_2](X - X_0)(X - X_1).$$

On a successivement

$$\begin{aligned}
&X - X_0 = X,\\
&(X - X_0)(X - X_1) = X^2 - 10^2 X.
\end{aligned}$$

Après calculs, on retrouve donc bien le polynôme déterminé par la méthode de Lagrange (voir équation (1.69)).

On en déduit la valeur de donnée par $\Pi_2(d)$ donnée par

$$\tau = \Pi_2(d) = 1233.3333, \tag{1.71}$$

ce qui fournit une approximation de la performance sur le 5 000 m à comparer avec la valeur donnée par (1.65).

(2) L'expression analytique de l'erreur est donnée par

$$E_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}\omega_3(x), \tag{1.72}$$

où ici f et ξ ne sont pas connus. Cette formule provient de la propriété 1.21 du polycopié de cours utilisée ici avec $n = 2$.

Il est en théorie impossible de calculer une telle erreur. Cependant, on peut supposer par exemple que f est polynomiale de degré 3, ou ce qui revient au même que $f^{(3)}$ ne varie pas. On a alors une approximation de l'erreur, obtenue en prenant un point supplémentaire :

$$E_2(x) \approx f[X_0, ..., X_{n+1}](x - X_0)...(x - X_n), \tag{1.73}$$

utilisée ici avec $n = 2$. Cela provient de (1.72) ; en effet, si f est polynomiale de degré 3, le coefficient dominant de f est $f[t_0, ..., t_{n+1}]$ puisque c'est le coefficient dominant de $f = \Pi_3$ sur la forme de newton. On a alors pour tout ξ, puisque $f^{(3)}$ est constant :

$$f^{(3)}(\xi) = 3!f[X_0, ..., X_3],$$

ce qui donne, réinjecté dans (1.72) :

$$E_2(x) = f[X_0, ..., X_3]\omega_3(x).$$

Si cette fois-ci, $f^{(3)}$ varie peu, cela devient une approximation et on a donc, dans tous les cas (1.72). Prenons $X_0 = 100$, $X_1 = 1500$, $X_2 = 10000$ et $X_3 = 0$. On complète le tableau déjà fait dans la

$X_i \setminus k$	0	1	2	3
$X_0 = 100$	$\boxed{13}$			
		$\boxed{1.657142857\,10^{-1}}$		
$X_1 = 1500$	245		$\boxed{3.879127409\,10^{-6}}$	
		$2.041176470\,10^{-1}$		$\boxed{-1.993039639\,10^{-9}}$
$X_2 = 10000$	1980		$4.078431372\,10^{-6}$	
		$1.980000000\,10^{-1}$		
$X_3 = 0$	0			

TABLE 1.9. Différences divisées de f.

question 1 en rajoutant un quatrième point ; voir le tableau 1.9. On déduit de ce tableau la valeur de $f[X_0, X_1, X_2, X_3]$ donnée par :

$$f[X_0, X_1, X_2, X_3] = -1.993039639\,10^{-9}.$$

On a alors

$$E_2(d) \approx -1.993039639\,10^{-9} \times (d - X_0)(d - X_2)(d - X_2) = 170.903149138443,$$

ce qui est assez élevé dans l'absolue ; l'erreur relative est donnée par exemple par (en utilisant la valeur de τ donnée par (1.65))

$$e_2(d) = \frac{E_2(d)}{\tau} \approx 0.19169710 = 19.169710\%,$$

ce qui est "plus raisonnable".

Remarque 1.7. On peut tenir le raisonnement suivant Pour calculer l'erreur

$$E_2(x) = f(x) - \Pi_2(x) = \Pi_3(x) - \Pi_2(x),$$

on détermine $\Pi_3(x)$ grâce au tableau 1.9 page précédente. On écrit alors

$$E_2(d) = \Pi_3(d) - \Pi_2(d),$$

en utilisant la valeur de $\Pi_2(d)$ donnée par (1.65). Mais, c'est beaucoup plus long et identique ! On sait en effet d'après les relations de récurrence de Π_n que :

$$\Pi_3(d) = \Pi_2(d) + f[X_0, X_1, X_2, X_3](d - X_0)(d - X_1)(d - X_2),$$

et donc on a

$$E_2(d) = \Pi_3(d) - \Pi_2(d) = f[X_0, X_1, X_2, X_3](d - X_0)(d - X_1)(d - X_2),$$

et c'est donc exactement identique à (1.73) avec $n = 2$ au point d !

Remarque 1.8. Il serait peut-être pertinent de remette en cause ce calcul, non pas sur le plan mathématique, mais sur le plan sportif ou biomécanique : est-il pertinent de se servir des performances sur des durées différentes et donc des compétences différentes ?

Correction de l'exercice 1.8.

On considère le demi-cercle de centre d'abscisse $(a + b)/2$ et de rayon $(b - a)/2$, c'est-à-dire passant par les points d'abscisses a et b. On divise ce demi-cercle en n parties égales ; on a donc $n + 1$ points définis par les angles i/n pour $0 \leq i \leq n$. Voir la figure 1.9. Pour $i \in \{0, ..., n\}$, on introduit les angles ω et ψ comme indiqué

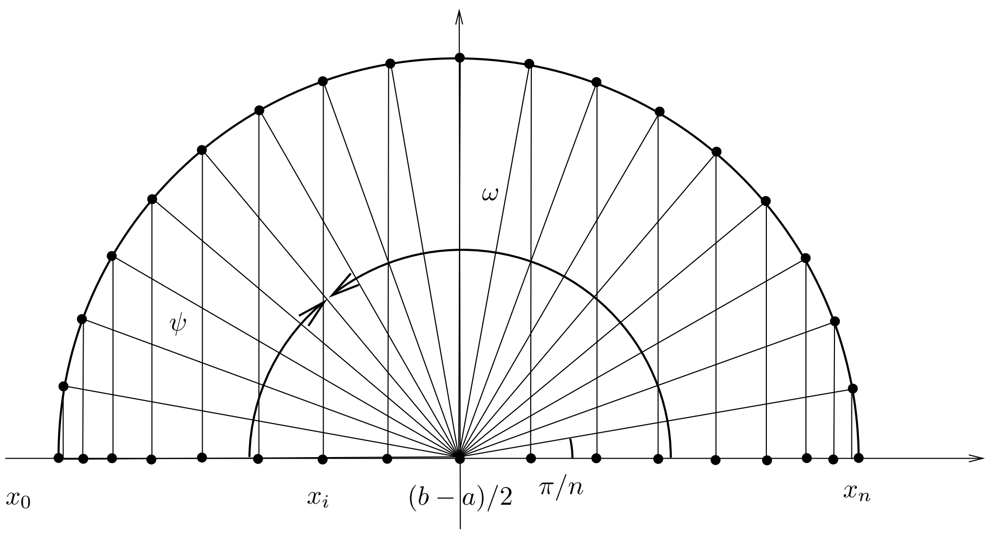


Figure 1.9. Les points de Tchebycheff.

sur la figure 1.9. On a

$$\psi = -\frac{i\pi}{n},$$
$$\omega - \psi = \pi,$$

et donc

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad \omega = \pi - \frac{i\pi}{n}. \tag{1.74}$$

On a aussi

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \omega,$$

ce qui donne d'après (1.74)

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \left(\pi - \frac{i\pi}{n} \right) = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cos \left(\frac{i\pi}{n} \right),$$

ce qui n'est autre que l'équation (1.54) du cours.

Intégration

Correction de l'exercice 2.1.

Pour tout cet exercice, découpons $[A,B]$ en sous-intervalles à pas constant h ($h \in \mathbb{R}_+^*$), notés $[x_i, x_{i+1}]$. Ainsi

$$x_0 = A; \quad x_N = B; \quad \forall i \in \{0, ..., N-1\} \quad x_{i+1} - x_i = h \quad \text{d'où} \quad h = \frac{B-A}{N}. \tag{2.1}$$

Par suite pour tout i de $\{0, ..., N\}$

$$x_i = A + ih. \tag{2.2}$$

(1) L'approximation de l'intégrale par la méthode des trapèzes composite (voir tableau 2.4 du polycopié de cours) est

$$I_N^T = \frac{h}{2}\big(f(A) + f(B)\big) + h\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i).$$

Pour $N = 4$, on obtient

$$I_N^T = 1/8 + 1/8\, e^{-1} + 1/4\, e^{-1/16} + 1/4\, e^{-1/4} + 1/4\, e^{-\frac{9}{16}}.$$

et donc

$$I_N^T = 0.742984. \tag{2.3}$$

(2) L'erreur commise par la méthode des trapèzes composite (voir tableau 2.5 du polycopié de cours) est

$$E_N^T = -h^2\frac{(B-A)}{12}f''(\eta) \ \text{ avec } \eta \in [A,B].$$

En théorie (et si $f''(\eta)$ ne varie que peu), si h est divisé par 2, cette erreur est divisée par 4.

Remarque 2.1. On peut aussi écrire

$$\left|E_N^T\right| \leq h^2\frac{(B-A)}{12}\max_{x\in[A,B]}|f''(x)|,$$

et remarquer que cette dernière quantité est divisée par 4 quand h est divisée par 2.

(3) Notons $M_2 = \sup_{x\in[A,B]}|f''(x)|$. On a

$$f''(x) = 2\, e^{-x^2}\left(-1 + 2\, x^2\right).$$

que l'on peut majorer par $M_2 = 6$, comme on a déjà fait l'exercice 1.5 page 9 (voir (1.42)). Pour avoir une erreur inférieure à $\varepsilon > 0$, il suffit donc que

$$h^2\frac{(B-A)}{12}M_2 \leq \varepsilon, \tag{2.4}$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{(B-A)^3}{12N^2}M_2 \leq \varepsilon,$$

ou encore

$$\sqrt{\frac{(B-A)^3}{12\varepsilon}M_2} \leq N. \tag{2.5}$$

Numériquement, on obtient donc pour $A = 0$, $B = 1$, et $\varepsilon = 10^{-4}$

$$N \geq 70.710678$$

et puisque N est entier, on choisit

$$N = 71 \tag{2.6}$$

Remarque 2.2. On peut être plus subtil et utiliser la majoration de la remarque 1.4 page 10 de l'exercice 1.5 (voir (1.47)) et on obtient $N = 41$, ce qui est plus faible que (2.6).

En utilisant le calcul symbolique de matlab, on peut avoir une approximation très précise de l'intégrale recherchée :

$$I = 0.746824, \tag{2.7}$$

Pour la valeur de N donnée par (2.6), on a

$$I_N^T = 0.746812, \tag{2.8}$$

on vérifie *a posteriori* alors que

$$\left|I - I_N^T\right| = 1.2162\,10^{-5}.$$

ce qui est bien inférieure à 10^{-4}.

(4) L'approximation de l'intégrale par la méthode de Simpson composite (voir tableau 2.4 du polycopié de cours) est

$$I_N^S = \frac{h}{6}\left(f(A) + f(B) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + 4\sum_{i=0}^{N-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)\right).$$

Pour $N = 2$, on obtient

$$I_N^T = 1/12 + 1/12\,e^{-1} + 1/6\,e^{-1/4} + 1/3\,e^{-1/16} + 1/3\,e^{-\frac{9}{16}}.$$

et donc

$$I_N^T = 0.746855. \tag{2.9}$$

(5) L'erreur commise par la méthode de Simpson composite (voir tableau 2.5 du polycopié de cours) est

$$E_N^S = -h^4\frac{(B-A)}{2880}f^{(4)}(\eta) \text{ avec } \eta \in [A, B].$$

Comme précédemment, on pose $M_4 = \sup_{x\in[A,B]}\left|f^{(4)}(x)\right|$. On a

$$f^{(4)}(x) = 4\,e^{-x^2}\left(3 - 12\,x^2 + 4\,x^4\right). \tag{2.10}$$

Pour majorer $\left|f^{(4)}(x)\right|$, on procède exactement comme dans l'exercice 1.5 page 9. On écrit

$$f^{(4)}(x) = 4e^{-x^2}p_4(x), \tag{2.11}$$

où

$$p_4(x) = 3 - 12\,x^2 + 4\,x^4. \tag{2.12}$$

Puis on raisonne comme dans l'inégalité (1.36) :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \left|f^{(4)}(x)\right| \leq 4\left|e^{-x^2}\right|\left|p_4(x)\right|, \tag{2.13}$$

et, comme dans les inégalités (1.37) et (1.38), on a

$$\forall x \in [0, 1], \quad \left|f^{(4)}(x)\right| \leq 4e^{-x^2}\left|p_4(x)\right|, \tag{2.14}$$

et

$$\forall x \in [0, 1], \quad \left|f^{(4)}(x)\right| \leq 4\left|p_4(x)\right|. \tag{2.15}$$

Pour majorer $|p_4(x)|$, on raisonne comme on a déjà fait dans les inégalités (1.39), (1.40) et (1.41) en utilisant l'inégalité triangulaire (1.35), écrite ici sous sa forme plus générale :

$$\forall (b_1,....,b_q)\in\mathbb{R}^q,\quad \left|\sum_{i=1}^q b_i\right| \le \sum_{i=1}^q |b_i|. \tag{2.16}$$

On écrit, ensuite, pour tout polynôme Q :

$$Q(x)=\sum_{i=0}^p a_i x^i,$$

puis les inégalités successives (grâce à (2.16))

$$\begin{aligned}|Q(x)| &= \left|\sum_{i=0}^p a_i x^i\right|,\\ &\le \sum_{i=0}^p \left|a_i x^i\right|,\\ &\le \sum_{i=0}^p |a_i|\left|x^i\right|,\\ &\le \sum_{i=0}^p |a_i|\,|x|^i,\end{aligned}$$

et puisque $|x|\le 1$

$$\le \sum_{i=0}^p |a_i|.$$

On a donc

$$\forall x\in[0,1],\quad |Q(x)|\le \sum_{i=0}^p |a_i|.$$

Ici, pour p_4 donné par (2.12), dont les coefficients sont $\{4,0,-12,0,3\}$, on a

$$\forall x\in[0,1],\quad |p_4(x)|\le 19.$$

Ainsi, grâce à (2.15), on a

$$\forall x\in[0,1],\quad \left|f^{(4)}(x)\right|\le M_4. \tag{2.17}$$

où

$$M_4=76. \tag{2.18}$$

Pour avoir une erreur inférieure à $\varepsilon>0$, il suffit donc que

$$h^4\frac{(B-A)}{2880}M_4\le\varepsilon. \tag{2.19}$$

On raisonne comme dans la question 3. Il faut avoir

$$N\ge\sqrt[4]{\frac{(B-A)^5}{2880\varepsilon}M_4}. \tag{2.20}$$

Numériquement, on obtient pour $A=0$, $B=1$, et $\varepsilon=10^{-4}$

$$N\ge 4.030466,$$

et puisque N est entier, on choisit

$$N=5, \tag{2.21}$$

à comparer avec la valeur donnée par (2.6).

Remarque 2.3. Si utilise la fonction `maxabsfun`, fournie sur le site habituel, pour déterminer avec plus de soin, le majorant exact (puisque atteint en un point) de g, définie par (2.10), on obtient

$$M_4 = 12,$$

qui est un peu plus précis que (2.18). On pourra consulter l'annexe C pour une preuve rigoureuse de ce résultat. On peut donc remplacer (2.21) par

$$N = 3.$$

Correction de l'exercice 2.2.

(1) La valeur approchée est égale à

$$I \approx -0.694794,$$

que l'on peut comparer à la valeur exacte

$$I = -2\, e^{-1} = -0.735759.$$

(2) Attention, la formule d'intégration n'est valable que sur l'intervalle $[-1, 1]$. Pour cacluler l'intégrale $J = \int_1^3 x \ln x dx$, il faut donc ramener cette intégrale à une intégrale sur $[-1, 1]$. Il faut donc faire un changement de variable et choisir α et β de telle sorte que la nouvelle variable $u = \alpha x + \beta$ vale -1 quand $x = A = 1$ et 1 quand $x = B = 3$. On a donc le système linéaire très simple

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

dont on tire

$$\alpha = 1, \quad \beta = -2.000000.$$

On a donc, avec

$$f(x) = x \ln x$$

et en posant $u = \alpha x + \beta$

$$J = \int_1^3 f(x) dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{u - \beta}{\alpha}\right) \frac{du}{\alpha}.$$

Soit encore

$$J = \int_{-1}^1 g(u) du,$$

où

$$g(u) = \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{u - \beta}{\alpha}\right)$$

Ainsi, la valeur approchée est égale à

$$J \approx 2.941036.$$

La primitive de f est connue ; elle vaut

$$1/2\, x^2 \ln(x) - 1/4\, x^2.$$

On a donc

$$J = 2.943755,$$

que l'on peut comparer à la valeur approchée.

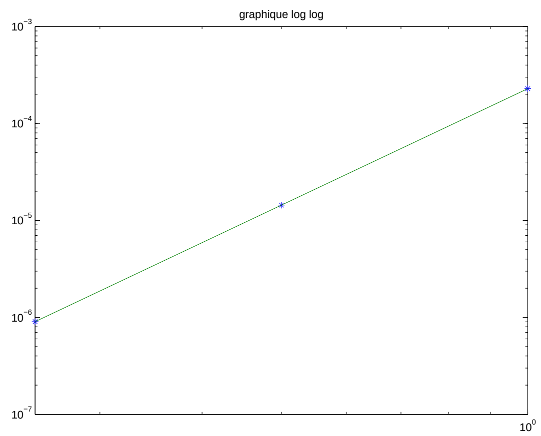


FIGURE 2.1. Le graphique log log.

(3) On se rend compte que dans la colonne de gauche, h est divisé par 2, en passant de la première à la deuxième et de la deuxième à la troisième ligne. Les erreurs sont alors respectivement divisées par 15.869998 et 15.934000, soit encore approximativement 16 et 16, c'est à dire 2^4. On a donc une méthode d'ordre 4.

Une autre façon plus automatique est de faire un graphique log-log (ou $\log_{10}$-$\log_{10}$) : dans ce graphique (voir figure 2.1), on trouve une pente égale à $3.991133 \approx 4$ pour une corrélation linéaire égale à $r = 1.000000$.

Exercices facultatifs

CORRECTION DE L'EXERCICE 2.3.

(1) Par linéarité des fonctions $f \mapsto I(f)$ et $f \mapsto Q(f)$, l'exactitude de la formule de quadrature sur l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur à 2 est équivalente à l'exactitude de la formule de quadrature pour les vecteurs de la base canonique de cet espace vectoriel, c'est-à-dire pour les fonctions définies par $f(x) = 1$, $f(x) = x$ et $f(x) = x^2$. Cela donne le système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

On peut le résoudre à la main ou matriciellement pour obtenir :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Elle est de degré d'exactitude au moins 2. On peut montrer qu'elle n'est pas de degré 3.

(2)

$$I \approx 0.789293,$$

que l'on peut comparer à (2.3), (2.7), (2.8) et (2.9).

L'exercice suivant a été donné à l'examen de MNB en Informatique à l'Automne 2018

CORRECTION DE L'EXERCICE 2.4.
On renverra aussi à l'exercice de TD 2.3 proche de cet exercice !

Pour toute la suite, les nœuds interpolant sont notés x_0, ..., x_n.

(1) (a) Par linéarité des fonctions $f \mapsto \mathcal{I}(f)$ et $f \mapsto Q(f)$, l'exactitude de la formule de quadrature sur l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur à 1, de dimension 2, est équivalente à l'exactitude de la formule de quadrature pour les vecteurs de la base canonique de cet espace vectoriel, c'est-à-dire pour les fonctions définies par

$$e_0(x) = 1, \quad e_1(x) = x.$$

Cela donne le système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1/3\sqrt{3} & 1/3\sqrt{3} \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.22}$$

où C est le vecteur des coefficients W_i recherchés. On peut le résoudre à la main ou matriciellement pour obtenir :

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.23}$$

Remarque 2.4.

La matrice intervenant dans le système linéaire (2.22) est en fait la matrice de Vandermonde suivante, correspondant aux points x_i :

$$D_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ & \vdots & & \dots & \vdots & \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \dots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

Notons que cette matrice peut s'inverser en théorie en utilisant les polynômes de Lagrange ! Voir [BM03, Exercice 2.5 p. 55]. Si on veut l'inverser directement, on notera que cette matrice est sensible à l'inversion numérique (car elle a un conditionnement important quand n grandit). Il est préférable d'utiliser la méthode de la question 1b pour la calculer pour n grand.

(b) (i) Pour calculer $\Pi_1(f)$, le polynôme d'interpolation de f en fonction de $f(-1/3\sqrt{3})$, $f(1/3\sqrt{3})$, on utilise la forme de Newton, en prenant bien soin de laisser les valeurs de $f(-1/3\sqrt{3})$, $f(1/3\sqrt{3})$ génériques, comme le montre la suite.

$x_i \setminus k$	0	1
$x_0 = -1/3\sqrt{3}$	$\boxed{f\left(-1/3\sqrt{3}\right)}$	
		$\boxed{1/2\left(f\left(1/3\sqrt{3}\right) - f\left(-1/3\sqrt{3}\right)\right)\sqrt{3}}$
$x_1 = 1/3\sqrt{3}$	$f\left(1/3\sqrt{3}\right)$	

Table 2.1. Différences divisées de f.

Pour calculer le polynôme sous la forme de Newton, on détermine tout d'abord les différences divisées $f[x_i, ..., x_{i+k}]$ données dans le tableau 2.1. Ensuite, on n'utilise plus que les différences divisées qui sont encadrées et le polynôme interpolateur de degré 1, $\Pi_1(f)$, est donné par la formule :

$$\Pi_1(f)(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, ..., x_i](x - x_0)...(x - x_{i-1}). \tag{2.25}$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_1(f)(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0).$$

On a

$$x - x_0 = x + 1/3\sqrt{3},$$

Après calculs, il vient :

$$\Pi_1(f)(x) = 1/2\,x\sqrt{3}f\left(1/3\sqrt{3}\right) - 1/2\,x\sqrt{3}f\left(-1/3\sqrt{3}\right) + 1/2\,f\left(-1/3\sqrt{3}\right) + 1/2\,f\left(1/3\sqrt{3}\right). \tag{2.26}$$

(ii) L'intégrale $\mathcal{I}\big(\Pi_1(f)\big)$ définie par

$$\mathcal{I}\big(\Pi_1(f)\big) = \int_{-1}^{1} \Pi_1(f)(x)dx, \tag{2.27}$$

s'obtient en intégrant le polynôme $\Pi_1(f)$ qui vient d'être déterminé. En intégrant les fonctions 1 et x, sur $[-1, 1]$, on obtient donc finalement

$$\mathcal{I}\big(\Pi_1(f)\big) = f\left(-1/3\sqrt{3}\right) + f\left(1/3\sqrt{3}\right). \tag{2.28}$$

(iii) On cherche à trouver les coefficients W_i de telle sorte que la formule de quadrature intègre exactement les polynômes jusqu'au degré 1. Cela est donc équivalent à ce qu'elle soit exacte pour $\Pi_1(f)$, pour toute fonction f, puisque $\Pi_1(f)$ est un polynôme de degré au plus 1. C'est donc équivalent à l'égalité de $Q\left(\Pi_1(f)\right)$ et de $\mathcal{I}\big(\Pi_1(f)\big)$. Dans cette dernière égalité, chacune des valeurs de $\Pi_1(f)(x_i)$ est remplacée par définition par $f(x_i)$. D'après (2.28), on voit donc apparaître les coefficients W_i qui correspondent bien à ceux donnés par (2.23).

(2) Pour déterminer le degré d'exactitude (que l'on appelle aussi l'ordre) de la méthode, on procède comme suit : on essaye les différentes polynômes de degrés supérieur ou égal à 2 et on considère le plus grand degré intégré par la formule de quadrature. On obtient un ordre q donné par

$$q = 3. \tag{2.29}$$

Remarque 2.5. L'ordre obtenu dans (2.29) est élevé par rapport au nombre de points (1) de la méthode de quadrature. En fait, cet ordre est égal à $2n + 1$. C'est l'ordre optimal pour une formule à $n + 1$ points. Cette méthode correspond à la méthode de Gauss-Legendre à 2 points. Plus de détails dans [BM03, Section 3.3 et corollaire 3.49]. Cet ordre elevé explique la faible erreur (voir équation (2.30)).

(3) Pour donner une approximation numérique de l'intégrale, on utilise la formule de quadrature déterminée ; on a donc

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e^{-1/3}\\e^{-1/3}\end{pmatrix},\\ &= 2\,e^{-1/3},\\ &\approx 1.433062621147579.\end{aligned}$$

Si on utilise la fonction `quadl` de matlab pour déterminer une valeur très précise, on obtient

$$\mathcal{I} = 1.493648265624854,$$

ce qui correspond à une erreur donnée par

$$\varepsilon = 6.05855\,10^{-2}. \tag{2.30}$$

Correction de l'exercice 2.5.
On renverra aussi à l'exercice de TD 2.3 proche de cet exercice !
Pour toute la suite, les nœuds interpolant sont notés x_0, ..., x_n.

(1) (a) Par linéarité des fonctions $f \mapsto \mathcal{I}(f)$ et $f \mapsto Q(f)$, l'exactitude de la formule de quadrature sur l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur à 2, de dimension 3, est équivalente à l'exactitude de la formule de quadrature pour les vecteurs de la base canonique de cet espace vectoriel, c'est-à-dire pour les fonctions définies par

$$e_0(x) = 1, \quad e_1(x) = x, \quad e_2(x) = x^2.$$

Cela donne le système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1/5\sqrt{15} & 0 & 1/5\sqrt{15} \\ 3/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \tag{2.31}$$

où C est le vecteur des coefficients W_i recherchés. On peut le résoudre à la main ou matriciellement pour obtenir :

$$C = \begin{pmatrix} 5/9 \\ \frac{8}{9} \\ 5/9 \end{pmatrix}. \tag{2.32}$$

(b) (i) Pour calculer $\Pi_2(f)$, le polynôme d'interpolation de f en fonction de $f(-1/5\sqrt{15})$, $f(0)$, $f(1/5\sqrt{15})$, on utilise la forme de Newton, en prenant bien soin de laisser les valeurs de $f(-1/5\sqrt{15})$, $f(0)$, $f(1/5\sqrt{15})$ génériques, comme le montre la suite.

$x_i \setminus k$	0	1	2
$x_0 = -1/5\sqrt{15}$	$\boxed{f\left(-1/5\sqrt{15}\right)}$		
		$\boxed{1/3\left(f(0) - f\left(-1/5\sqrt{15}\right)\right)\sqrt{15}}$	
$x_1 = 0$	$f(0)$		$\boxed{1/6\left(1/3\left(f\left(1/5\sqrt{15}\right) - f(0)\right)\sqrt{15} - 1/3\left(f(0) - f\left(-1/5\sqrt{15}\right)\right)\sqrt{15}\right)\sqrt{15}}$
		$1/3\left(f\left(1/5\sqrt{15}\right) - f(0)\right)\sqrt{15}$	
$x_2 = 1/5\sqrt{15}$	$f\left(1/5\sqrt{15}\right)$		

Table 2.2. Différences divisées de f.

Pour calculer le polynôme sous la forme de Newton, on détermine tout d'abord les différences divisées $f[x_i, ..., x_{i+k}]$ données dans le tableau 2.2. Ensuite, on n'utilise plus que les différences divisées qui sont encadrées et le polynôme interpolateur de degré 2, $\Pi_2(f)$, est donné par la formule :

$$\Pi_2(f)(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, ..., x_i](x - x_0)...(x - x_{i-1}). \tag{2.33}$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_2(f)(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

On a successivement

$$x - x_0 = x + 1/5\sqrt{15},$$

$$(x - x_0)(x - x_1) = x^2 + 1/5\,x\sqrt{15}.$$

Après calculs, il vient :

$$\Pi_2(f)(x) = 5/6\,x^2 f\left(1/5\sqrt{15}\right) - 5/3\,x^2 f(0) + 5/6\,x^2 f\left(-1/5\sqrt{15}\right) + 1/6\,x\sqrt{15} f\left(1/5\sqrt{15}\right) - 1/6\,x\sqrt{15} f\left(-1/5\sqrt{15}\right) + f(0). \tag{2.34}$$

(ii) L'intégrale $\mathcal{I}\big(\Pi_2(f)\big)$ définie par

$$\mathcal{I}\big(\Pi_2(f)\big) = \int_{-1}^{1} \Pi_2(f)(x)dx, \tag{2.35}$$

s'obtient en intégrant le polynôme $\Pi_2(f)$ qui vient d'être déterminé. En intégrant les fonctions 1, x et x^2, sur $[-1,1]$, on obtient donc finalement

$$\mathcal{I}\big(\Pi_2(f)\big) = 5/9\, f\left(1/5\sqrt{15}\right) + \frac{8}{9} f(0) + 5/9\, f\left(-1/5\sqrt{15}\right). \tag{2.36}$$

(iii) On cherche à trouver les coefficients W_i de telle sorte que la formule de quadrature intègre exactement les polynômes jusqu'au degré 2. Cela est donc équivalent à ce qu'elle soit exacte pour $\Pi_2(f)$, pour toute fonction f, puisque $\Pi_2(f)$ est un polynôme de degré au plus 2. C'est donc équivalent à l'égalité de $Q\left(\Pi_2(f)\right)$ et de $\mathcal{I}\big(\Pi_2(f)\big)$. Dans cette dernière égalité, chacune des valeurs de $\Pi_2(f)(x_i)$ est remplacée par définition par $f(x_i)$. D'après (2.36), on voit donc apparaître les coefficients W_i qui correspondent bien à ceux donnés par (2.32).

(2) Pour déterminer le degré d'exactitude (que l'on appelle aussi l'ordre) de la méthode, on procède comme suit : on essaye les différentes polynômes de degrés supérieur ou égal à 3 et on considère le plus grand degré intégré par la formule de quadrature. On obtient un ordre q donné par

$$q = 5. \tag{2.37}$$

(3) Pour donner une approximation numérique de l'intégrale, on utilise la formule de quadrature déterminée ; on a donc

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \begin{pmatrix} 5/9 \\ \frac{8}{9} \\ 5/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-3/5} \\ 1 \\ e^{-3/5} \end{pmatrix}, \\ &= \frac{10}{9} e^{-3/5} + \frac{8}{9}, \\ &\approx 1.498679595660029.\end{aligned}$$

Si on utilise la fonction `quadl` de matlab pour déterminer une valeur très précise, on obtient

$$\mathcal{I} = 1.493648265624854,$$

ce qui correspond à une erreur donnée par

$$\varepsilon = 5.03132\, 10^{-3}. \tag{2.38}$$

CORRECTION DU TRAVAUX DIRIGÉS 3

Équations non linéaires

Correction de l'exercice 3.1.

(1) La dérivée de la fonction f vaut

$$f'(x) = 2\,e^{2\,x} - 2,$$

strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Puisque $f(0) = -7 < 0$ et que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$, la fonction f est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[-7, \infty]$ et n'a donc qu'une seule racine sur $\mathbb{R}_+$.

(2) (a) On pose $a = 0$ et $b = 1.2$. Puisque $f(a)f(b) = -4.4 < 0$ et que f est continue, la méthode de la bissection est convergente vers une racine de f qui est dans $\mathbb{R}_+$. D'après ce qui précède, cette racine est unique. Ainsi, sur cet intervalle, la méthode de la bissection est convergente vers l'unique racine de f sur $\mathbb{R}_+$.

(b)

n	x_n	a_n	b_n
0	0.6000	0.0000	1.2000
1	0.9000	0.6000	1.2000
2	1.0500	0.9000	1.2000
3	1.1250	1.0500	1.2000
4	1.1625	1.1250	1.2000

Table 3.1. Valeurs des extrémités a_n et b_n des intervalles et des milieux x_n

Les résultats sont donnés dans le tableau 3.1.

(3) On pose $a = 1.0$ et $b = 2.0$. Puisque $f(a)f(b) = -111.22138 < 0$, la méthode de la bissection est convergente vers l'unique racine de f. D'après la formule (3.21) du polycopié de cours, on a $n = 27$.

(4) (a) On a $f'(x) = 1 + \sin(x) \geq 0$, puisque $\sin(x) \geq -1$. Ainsi, la dérivée de f est positive sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulle qu'aux points isolés $x_n = -\pi/2 + 2n\pi$ où n décrit $\mathbb{Z}$. Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et *a fortiori* sur $[-1.0, 2.0]$. Ainsi, la fonction f est une bijection de $[-1.0, 2.0]$ sur $[-1.540302, 2.416147]$ et n'a donc qu'une seule racine sur $[-1.0, 2.0]$.

(b) (i) Puisque $f(a)f(b) = -3.72160 < 0$, la méthode de la bissection est convergente vers l'unique racine de f.

(ii)

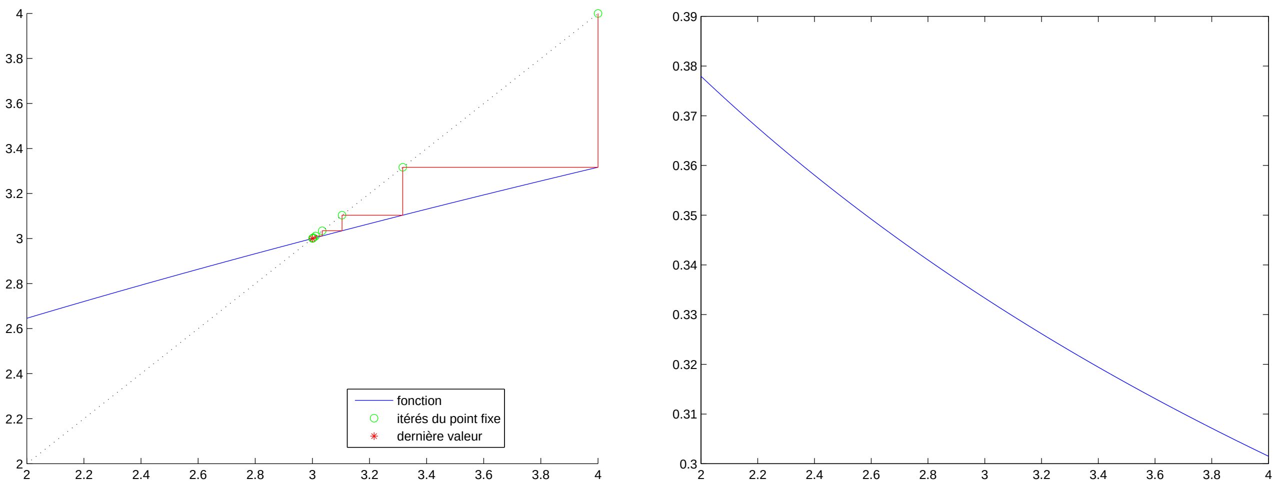
Les résultats sont donnés dans le tableau 3.2.

(c) D'après la formule (3.21) du polycopié de cours, on a $n = 29$.

Correction de l'exercice 3.2.

n	x_n	a_n	b_n
0	0.5000	-1.0000	2.0000
1	1.2500	0.5000	2.0000
2	0.8750	0.5000	1.2500
3	0.6875	0.5000	0.8750
4	0.7813	0.6875	0.8750

TABLE 3.2. Valeurs des extrémités a_n et b_n des intervalles et des milieux x_n



(a) Le graphe de la fonction g et les premières valeurs de la suite x_n.

(b) Le graphe de la fonction $|g'|$.

FIGURE 3.1. Les graphes des fonctions g et $|g'|$.

(1)

(a) (i)(A) On a

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,x+3}}. \tag{3.1}$$

(B) Sur la figure 1(a), on constate que la fonction g semble avoir un point fixe, correspondant à la valeur

$$r = 3.$$

(C) Sur la figure 1(b), on constate que les valeurs de la fonction $|g'|$ sont inférieures à 0.377964. Démontrons cela rigoureusement. La dérivée de la fonction g est monotone et g' prend donc ses valeurs entre $g'(a)$ et $g'(b)$. Sa valeur maximale est donc donnée par

$$\alpha = 0.3779644730092$$

(D) Sur la figure 1(a), on constate que l'intervalle $[a, b]$ est g-stable.

Démontrons cela rigoureusement. La fonction g est croissante ; ainsi, sur l'intervalle $[a, b]$, elle prend les valeurs $[g(a), g(b)]$. On vérifie que $g(a) = 2.6457513110646$ et $g(b) = 3.3166247903554$ sont bien dans l'intervalle $[a, b]$.

(ii) D'après les points 1(a)iC et 1(a)iD, les deux hypothèses de la proposition 3.19 du polycopié de cours sont vérifiées et donc g admet un point fixe unique r dans $I = [a, b]$ et, pour tout x_0 de I, la suite (x_n) est définie et converge vers r. Cette valeur est nécessairement celle donnée dans l'énoncé, par unicité de celle-ci !

(b) Appliquons le résutat de la proposition 3.21 du polycopié de cours ; on choisit n définit par (3.44) du polycopié de cours, où la valeur de k a été donnée plus haut, ce qui donne numériquement

$$n = 8. \tag{3.2}$$

(c) On obtient alors progressivement :

$$\begin{aligned}
&x_0 = 4\,;\\
&x_1 = g(x_0) = 3.3166247903554\,;\\
&x_2 = g(x_1) = 3.1037476670488\,;\\
&x_3 = g(x_2) = 3.0343854953017\,;\\
&x_4 = g(x_3) = 3.0114400194265\,;\\
&x_5 = g(x_4) = 3.0038109192912\,;\\
&x_6 = g(x_5) = 3.0012700375978\,;\\
&x_7 = g(x_6) = 3.0004233159999\,;\\
&x_8 = g(x_7) = 3.0001411020150.
\end{aligned}$$

Remarque 3.1. Si on calcule l'erreur réellement commise, en utilisant la valeur de x_n déterminée ci-dessous et la valeur de r donnée dans l'énoncé, on a

$$|x_n - r| = |3.0001411020150 - 3| = 0.0001411020150,$$

ce qui est bien inférieur à la valeur de ε donnée dans l'énoncé.

Remarque 3.2. Si on utilise la majoration donnée par (N.13) du polycopié de cours, on obtient

$$|x_n - r| \leq 0.0001714803342,$$

qui est bien inférieur à la valeur de ε donnée dans l'énoncé.

(2)

(a) (i)(A) On a

$$g'(x) = -3\,(x-2)^{-2}\,. \tag{3.3}$$

(B) Sur la figure 2(a), on constate que la fonction g semble avoir un point fixe, correspondant à la valeur

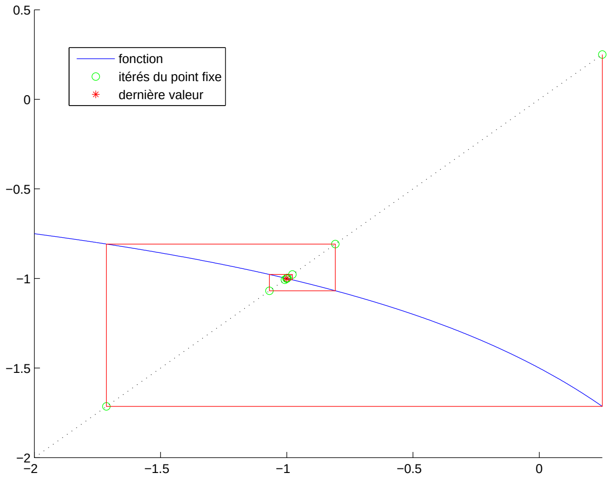
$$r = -1.$$

(C) Sur la figure 2(b), on constate que les valeurs de la fonction $|g'|$ sont inférieures à 0.979592. Démontrons cela rigoureusement. La dérivée de la fonction g est monotone et g' prend donc ses valeurs entre $g'(a)$ et $g'(b)$. Sa valeur maximale est donc donnée par

$$\alpha = 0.9795918367347$$

(D) Sur la figure 2(a), on constate que l'intervalle $[a, b]$ est g-stable.
Démontrons cela rigoureusement. La fonction g est monotone (car décroissante) ; ainsi, sur l'intervalle $[a, b]$, elle prend les valeurs comprises entre $g(a)$ et $g(b)$. On vérifie que

$$g(a) = -0.7500000000000$$



(a) Le graphe de la fonction g et les premières valeurs de la suite x_n.

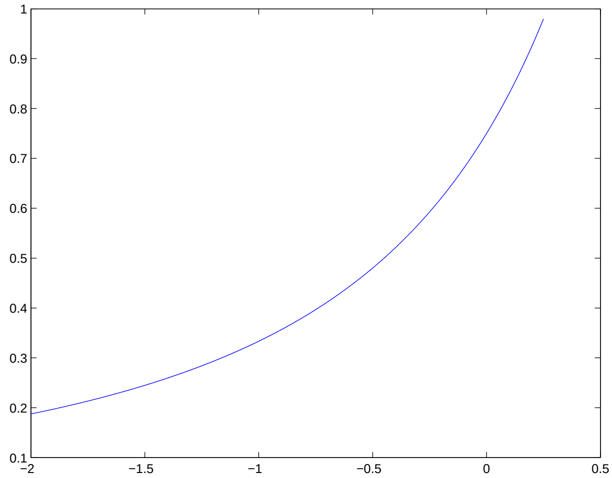

(b) Le graphe de la fonction $|g'|$.

FIGURE 3.2. Les graphes des fonctions g et $|g'|$.

et

$$g(b) = -1.7142857142857$$

sont bien dans l'intervalle $[a, b]$.

(ii) D'après les points 2(a)iC et 2(a)iD, les deux hypothèses de la proposition 3.19 du polycopié de cours sont vérifiées et donc g admet un point fixe unique r dans $I = [a, b]$ et, pour tout x_0 de I, la suite (x_n) est définie et converge vers r. Cette valeur est nécessairement celle donnée dans l'énoncé, par unicité de celle-ci !

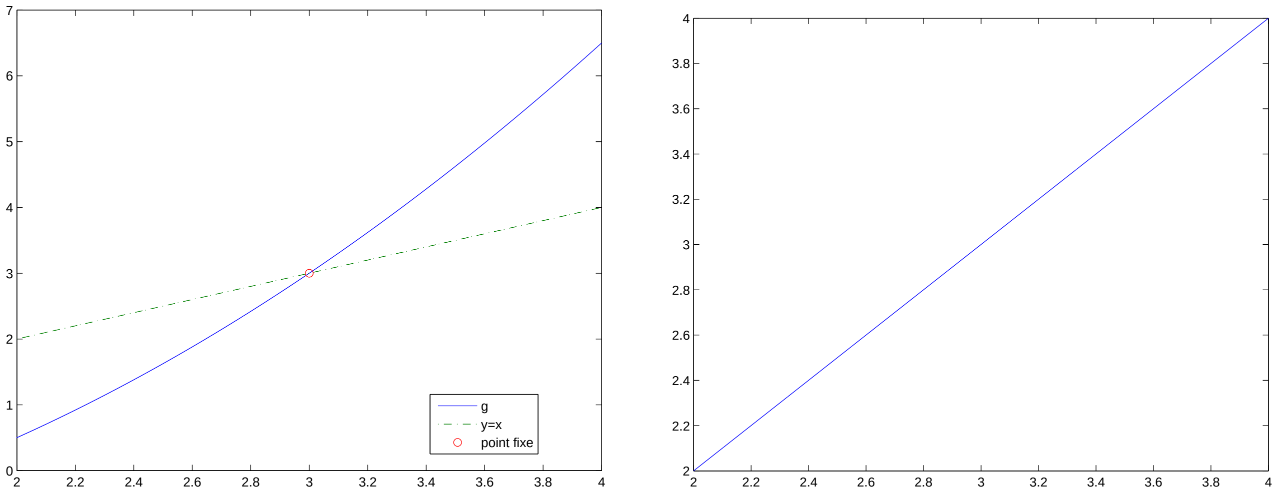
(b) Appliquons le résutat de la proposition 3.21 du polycopié de cours ; on choisit n définit par (3.44) du polycopié de cours, où la valeur de k a été donnée plus haut, ce qui donne numériquement

$$n = 375. \tag{3.4}$$

(c) On obtient alors progressivement :

$$x_0 = 0.2500000000000\,;$$
$$x_1 = g(x_0) = -1.7142857142857\,;$$
$$x_2 = g(x_1) = -0.8076923076923\,;$$
$$x_3 = g(x_2) = -1.0684931506849\,;$$
$$x_4 = g(x_3) = -0.9776785714286\,;$$
$$x_5 = g(x_4) = -1.0074962518741\,;$$
$$x_6 = g(x_5) = -0.9975074775673\,;$$
$$x_7 = g(x_6) = -1.0008315316814\,;$$
$$x_8 = g(x_7) = -0.9997228995788\,;$$
$$x_9 = g(x_8) = -1.0000923753395\,;$$
$$x_{10} = g(x_9) = -0.9999692091683\,;$$
$$x_{11} = g(x_{10}) = -1.0000102637159\,;$$
$$x_{12} = g(x_{11}) = -0.9999965787731\,;$$
$$x_{13} = g(x_{12}) = -1.0000011404103\,;$$
$$x_{14} = g(x_{13}) = -0.9999996198634\,;$$
$$x_{15} = g(x_{14}) = -1.0000001267122\,;$$
$$x_{16} = g(x_{15}) = -0.9999999577626\,;$$
$$x_{17} = g(x_{16}) = -1.0000000140791\,;$$
$$x_{18} = g(x_{17}) = -0.9999999953070\,;$$
$$x_{19} = g(x_{18}) = -1.0000000015643\,;$$
$$x_{20} = g(x_{19}) = -0.9999999994786\,;$$
$$x_{21} = g(x_{20}) = -1.0000000001738\,;$$
$$x_{22} = g(x_{21}) = -0.9999999999421\,;$$
$$x_{23} = g(x_{22}) = -1.0000000000193\,;$$
$$x_{24} = g(x_{23}) = -0.9999999999936\,;$$
$$x_{25} = g(x_{24}) = -1.0000000000021\,;$$
$$x_{26} = g(x_{25}) = -0.9999999999993\,;$$
$$x_{27} = g(x_{26}) = -1.0000000000002\,;$$
$$x_{28} = g(x_{27}) = -0.9999999999999\,;$$
$$x_{29} = g(x_{28}) = -1.0000000000000\,;$$
$$x_{30} = g(x_{29}) = -1\,;$$
$$x_{31} = g(x_{30}) = -1\,;$$
$$x_{32} = g(x_{31}) = -1\,;$$
$$x_{33} = g(x_{32}) = -1\,;$$
$$x_{34} = g(x_{33}) = -1.$$

Remarque 3.3. On constate que la valeur de n est importante ; cela est dû à la valeur de k proche de un. En pratique, l'erreur sera plus faible et les x_n atteindront la valeur limite bien avant le n déterminé, comme le montrent les simulations précédentes. On peut aussi choisir $x_0 = 4.0$, qui n'est pas dans l'intervalle d'étude $[a, b]$. On obtient la même valeur limite -1.0. On peut montrer que la convergence a lieu : pour n assez grand x_n est de nouveau dans l'intervalle d'étude $[a, b]$.



(a) Le graphe de la fonction g.

(b) Le graphe de la fonction $|g'|$.

FIGURE 3.3. Les graphes des fonctions g et $|g'|$.

REMARQUE 3.4. Si on calcule l'erreur réellement commise, en utilisant la valeur de x_n déterminée ci-dessous et la valeur de r donnée dans l'énoncé, on a

$$|x_n - r| = |-1 - (-1)| = 0,$$

ce qui est bien inférieur à la valeur de ε donnée dans l'énoncé.

REMARQUE 3.5. Si on utilise la majoration donnée par (N.13) du polycopié de cours, on obtient

$$|x_n - r| \leq 0.0000000000000,$$

qui est bien inférieur à la valeur de ε donnée dans l'énoncé.

(3)

(a) On a

$$g'(x) = x. \tag{3.5}$$

Sur la figure 3(a), on constate que la fonction g semble avoir un point fixe, correspondant à la valeur

$$r = 3.$$

Sur la figure 3(b), on constate que les valeurs de la fonction $|g'|$ sont comprises entre 2 et 4. En particulier, en la racine r, on a

$$|g'(r)| > 1.$$

La proposition 3.11 du polycopié de cours ne peut s'appliquer ici car on ne sait pas montrer (3.25a) du polycopié de cours *a priori*.

(b) La proposition 3.12 du polycopié de cours sur l'intervalle $[a, b]$ ne peut être utilisée ici. Faisons donc une preuve manuelle de la divergence de la suite. Pour alléger ce corrigé, la preuve est présentée en annexe D.

(c) On en déduit donc la divergence de la suite (x_n) pour tout $x_0 \in I \setminus \{3\}$. Nous avons montré en fait que pour tout pour tout $x_0 \in]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$, la suite x_n tendait vers $+\infty$ et pour tout $x_0 \in]-3, 3[$, elle tendait vers -1, l'autre point fixe de g. Elle n'est stationnaire, égale à 3, que si $x_0 = 3$ ou $x_0 = -3$ ou, égale à -1 si $x_0 = -1$.

Correction de l'exercice 3.3.

(1) La dérivée de la fonction f est donnée par $f'(x) = -\sin(1/4\,\pi\,x)\,\pi - 2\,e^{-x}$, que l'on écrit

$$f'(x) = -\left(2e^{-x} + \pi\sin(\pi x/4)\right)$$

Sur $[0,4]$, $\sin(\pi x/4) \geq 0$ et donc f' est strictement négative. Ainsi f est strictement décroissante. Puisque $f(0) = 6 > 0$ et que $f(4) = -4.0 < 0$, f n'a qu'un zéro noté x^* sur $[0,4]$.

(2) Voir la proposition 3.54 du cours. On y a vu que la la méthode de Newton est quadratique ssi $f'(x^*) \neq 0$ et si $f''(x^*) \neq 0$. On sait que $f'(x^*)$ est non nul, (d'après la question 1 puisque $f' < 0$), et le cours assure que $g'(x^*) = 0$. Ainsi, la méthode est au moins quadratique.

De plus, elle est exactement quadratique si et seulement si $g''(x^*) \neq 0$, ce qui est équivalent à $f''(x^*) \neq 0$.

Nous avons plusieurs niveau de réponse :

(a) Puisque x^* n'est pas (encore !) connu , nous ne connaissons pas $f''(x^*)$ et on peut affirmer seulement que la méthode de Newton est ici au moins quadratique d'après la remarque 3.56 page 90 du cours.

(b) Numériquement, on peut montrer (en calculant *a posteriori* et de façon numérique la racine x^*) que numériquement

$$f''(x^*) \approx 0.404142257991627 \neq 0. \tag{3.6}$$

Ainsi, la méthode de Newton est ici quadratique.

(c) Enfin, à un niveau plus évolué, on peut remarquer que l'on a

$$f''(x) = -1/4\cos(1/4\,\pi\,x)\,\pi^2 + 2\,e^{-x},$$
$$f'''(x) = 1/16\sin(1/4\,\pi\,x)\,\pi^3 - 2\,e^{-x}$$

Ainsi, la fonction f''' est strictement croissante sur $[A,B]$ (où $A = 1.80$ et $B = 2.30$) et donc

$$\forall x \in [A,B], \quad f'''(x) \geq f'''(A) \approx 1.583435846206767 > 0.$$

Ainsi,

$$f'' \text{ est sctrictement croissante sur } [A,B]. \tag{3.7}$$

On a aussi, en notant $\widetilde{A} = 1.900$, $f\left(\widetilde{A}\right) f(B) \approx -0.449471347267106 < 0$. On en déduit que x^* appartient à $\left[\widetilde{A}, B\right]$. Enfin, $f''\left(\widetilde{A}\right) \approx 0.105547179320013 > 0$ et d'après (3.7), on a bien

$$f''(x^*) > 0.$$

ce qui confirme (3.6).

(3) Voir les propositions 3.38 et 3.54 du cours.

On y a vu que le développement de Taylor de la fonction g sur $[x^*, x_n]$ permet de montrer que

$$|x_{n+1} - x^*| \leq D\,|x_n - x^*|^2 \tag{3.8}$$

et $D = \frac{1}{2}\max\limits_{x\in[0,4]} |g''(x)|$ en admettant d'abord *a priori* que la suite x_n converge et que les x_n sont dans l'intervalle $[0,4]$.

La constante D est donnée par la formule (3.96) du cours qui peut aussi être remplacée avantageusement par (3.100).

(4) On se place désormais sur l'intervalle $[A,B] = [1.8, 2.3]$ et l'étude précédente est encore valable sur cet intervalle puisque $f(A)f(B) = -0.7 < 0$

Nous donnons deux façons de faire.

(a) Comme on a déjà fait dans l'exercice 1.4 page 7, nous allons prendre différentes valeurs de n, en partant de 0 et en le faisant croître jusqu'à ce que l'erreur soit inférieure à la valeur ε donnée par l'équation (3.9) de l'énoncé. Pour cela, on écrit simplement et successivement

$$|x_0 - x^*| \leq B - A = 2.3 - 1.8 = 0.5$$

puis, en utilisant les inégalités de (3.7) et (3.8) de l'énoncé, on écrit

$$|x_1 - x^*| \leq D|x_0 - x^*|^2 \leq D \times \left(5.\,10^{-1}\right)^2 = 5.\,10^{-2},$$

ce qui est strictement supérieur à la valeur ε donnée par l'équation (3.9) de l'énoncé. On utilise de nouveau l'inégalité (3.7) de l'énoncé et on obtient

$$|x_2 - x^*| \leq D|x_1 - x^*|^2 \leq D \times \left(5.\,10^{-2}\right)^2 = 5.\,10^{-4},$$

ce qui est strictement supérieur à la valeur ε donnée par l'équation (3.9) de l'énoncé. On utilise de nouveau l'inégalité (3.7) de l'énoncé et on obtient

$$|x_3 - x^*| \leq D|x_2 - x^*|^2 \leq D \times \left(5.\,10^{-4}\right)^2 = 5.\,10^{-8},$$

ce qui est strictement supérieur à la valeur ε donnée par l'équation (3.9) de l'énoncé. Enfin, on utilise de nouveau l'inégalité (3.7) de l'énoncé et on obtient

$$|x_4 - x^*| \leq D|x_3 - x^*|^2 \leq D \times \left(5.\,10^{-8}\right)^2 = 5.\,10^{-16},$$

ce qui cette fois-ci inférieur à la valeur ε donnée par l'équation (3.9) de l'énoncé. On a donc montré que l'entier n valait

$$n = 4. \tag{3.9}$$

(b) Reprenons le calcul plus général proposé dans l'annexe O du cours.

En fait, on a écrit les différentes inéquations suivantes :

$$|x_0 - x^*| \leq 0.5 = B - A,$$

puis d'après l'inégalité (3.7) de l'énoncé :

$$|x_1 - x^*| \leq D|x_1 - x^*|^2 \leq D(B - A)^2,$$

puis d'après l'inégalité (3.7) de l'énoncé :

$$|x_2 - x^*| \leq D|x_1 - x^*|^2 \leq D(D(B - A)^2)^2,$$

puis d'après l'inégalité (3.7) de l'énoncé :

$$|x_3 - x^*| \leq D|x_2 - x^*|^2 \leq D(D(D(B - A)^2)^2)^2,$$

puis d'après l'inégalité (3.7) de l'énoncé :

$$|x_4 - x^*| \leq D|x_2 - x^*|^2 \leq D(D(D(D(B - A)^2)^2)^2)^2.$$

Autrement dit, il s'agit de calculer explicitement les différents termes de droite en fonction de n. On écrit, en notant $p = 2$ et $e_n = x_n - x^*$, tout d'abord

$$|e_0| \leq (B - A).$$

Puis, d'après l'inégalité (3.7) de l'énoncé (où p est remplacé par 2) :

$$|e_1| \leq D|e_0|^p = D(B - A)^p,$$

Puis, de nouveau d'après l'inégalité (3.7) de l'énoncé

$$|e_2| \leq D|e_1|^p = D(D(B - A)^p)^p = D^{1+p}(B - A)^{(p^2)},$$

Puis, de nouveau d'après l'inégalité (3.7) de l'énoncé

$$|e_3| \leq D|e_2|^p = D\Big(D^{1+p}(B-A)^{p^2}\Big)^p = D^{1+p+p^2}(B-A)^{(p^3)}.$$

Par une récurrence immédiate, on montre alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |e_n| \leq D^{1+p+p^2+\ldots+p^{n-1}}(B-A)^{(p^n)}. \tag{3.10}$$

Puisque $p \neq 1$ on a

$$1+p+p^2+\ldots+p^{n-1} = \frac{p^n-1}{p-1}$$

et donc, on réécrit (3.10) sous la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - x^*| \leq D^{\left(\frac{p^n-1}{p-1}\right)}(B-A)^{(p^n)}. \tag{3.11}$$

soit encore

$$\begin{aligned}
|x_n - x^*| &= \leq D^{\left(\frac{p^n-1}{p-1}\right)}(B-A)^{(p^n)},\\
&= \leq D^{\left(\frac{-1}{p-1}\right)}D^{\left(\frac{p^n}{p-1}\right)}(B-A)^{(p^n)},\\
&= \leq D^{\left(\frac{1}{1-p}\right)}\Big(D^{\left(\frac{1}{p-1}\right)}\Big)^{(p^n)}(B-A)^{(p^n)},\\
&= \leq D^{\left(\frac{1}{1-p}\right)}\Big((B-A)D^{\left(\frac{1}{p-1}\right)}\Big)^{(p^n)},
\end{aligned}$$

soit, en notant

$$\gamma = D^{\left(\frac{1}{1-p}\right)}, \tag{3.12a}$$

$$\delta = (B-A)D^{\left(\frac{1}{p-1}\right)}, \tag{3.12b}$$

on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_n - x^*| \leq \gamma\delta^{(p^n)}. \tag{3.13}$$

On vérifie numériquement que

$$\delta = 0.1 < 1.$$

Ainsi, la limite de $|x_n - x^*|$ est bien nulle quand n tend vers l'infini ! Cela justifie *a posteriori* l'hypothèse faite dans la question 3, à savoir que la suite x_n converge et que tous les x_n sont bien dans l'intervalle $[0,4]$. Voir en effet la proposition 3.38.

Pour avoir

$$|x_n - x^*| \leq \varepsilon$$

il suffit donc que

$$\gamma\delta^{(p^n)} \leq \varepsilon,$$

ce qui est équivalent à

$$\delta^{(p^n)} \leq \frac{\varepsilon}{\gamma}.$$

Si on prend le logarithme de cette inégalité, on arrive à

$$p^n \geq \frac{\ln\frac{\varepsilon}{\gamma}}{\ln\delta}.$$

Si on prend de nouveau le logarithme de cette inégalité, on arrive à

$$n\ln p \geq \ln\left(\frac{\ln\frac{\varepsilon}{\gamma}}{\ln\delta}\right).$$

et donc

$$n \geq \frac{1}{\ln p}\ln\left(\frac{\ln\frac{\varepsilon}{\gamma}}{\ln\delta}\right), \tag{3.14}$$

soit numériquement

$$n \geq 4. \tag{3.15}$$

et on retrouve donc (3.9).

REMARQUE 3.6. On vient en fait de démontrer la proposition 3.33 dans le cas $p = 2$.

REMARQUE 3.7. Si on fait tourner effectivement la méthode de Newton en prenant $x_0 = 2.3$, on arrive à

$$x_4 = 2.079615501859806$$

Si on se sert de la fonction `fzero` de matlab, on arrive à

$$x^* = 2.079615501859807$$

dont on peut supposer que c'est le zéro exact de f. La différence entre ces deux derniers nombres vaut $4.44\,10^{-16}$ et est bien inférieure à 10^{-10}.

CORRECTION DE L'EXERCICE 3.4.

(1) (a) On constate dans le tableau de l'énoncé que la suite des itérés semble converger vers

$$\widetilde{x} = -2.000000000000000.$$

(b) On constate aussi que le nombre de chiffres significatifs exacts est approximativement doublé à chaque étape, ce qui caractérise l'ordre 2 de la méthode (voir [BM03, Corollaire D.4 p. 367]).

(c)

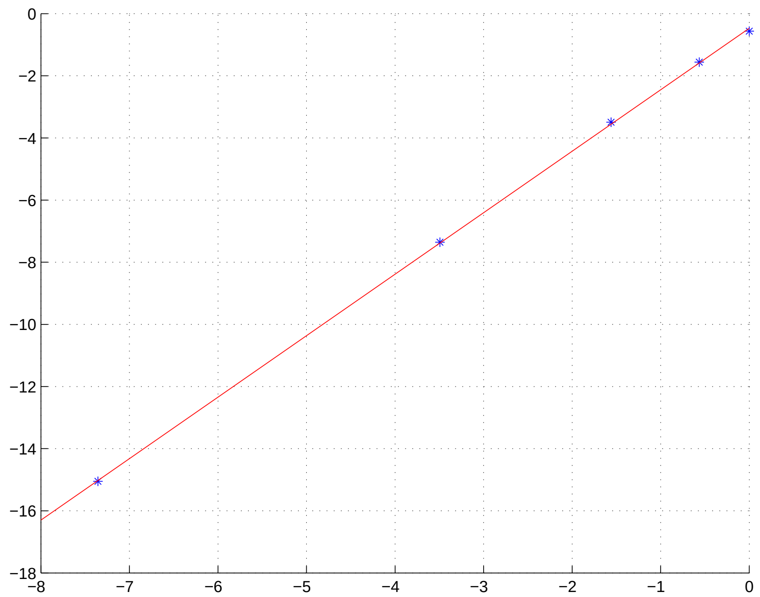


FIGURE 3.4. Nuage des points et la droite aux moindres carrés.

On peut confirmer cela en traçant le graphique du nuage de points $(|e_n|, |e_{n+1}|)$, comme en figure 3.4. Les points y sont très bien alignés. On sait d'après le cours qu'une méthode d'ordre q vérifie

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^q} = C,$$

(où $e_n = x_n - x^*$), ce qui implique en prenant le logarithme en base 10 que l'on a assymptotiquement

$$\log_{10}(|e_{n+1}|) \approx q \log_{10}(|e_n|) + K.$$

la pente du nuage fournit donc q. Numériquement, on a une corrélation égale à 0.9999460 et une pente égale à 1.9781754, ce qui confirme numériquement l'ordre 2 de la méthode de Newton.

(2) (a) Si on regarde le tableau 3.3 de l'énoncé, on constate cette fois que la convergence a l'air beaucoup plus lente, ce qui est aussi confirmé par l'étude du graphique 3.3 de l'énoncé. La suite des itérés semble converger vers

$$\widetilde{x} = 5.000004682255494.$$

(b) Le nombre de chiffres significatifs exacts ne semble plus approximativement doublé à chaque étape,

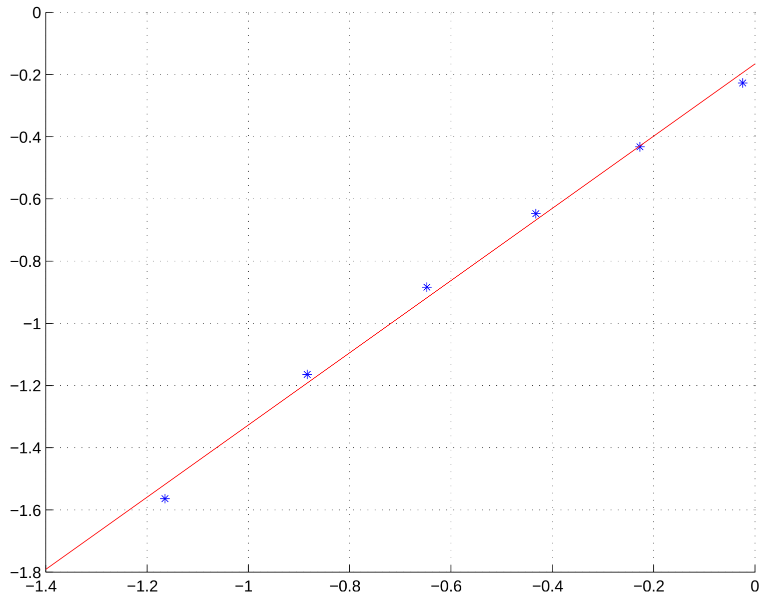


Figure 3.5. Nuage des points et la droite aux moindres carrés.

(c) Si on raisonne comme dans la question 1c, on obtient le graphique de la figure 3.5. Numériquement, on a une corrélation égale à 0.9977103 et une pente égale à 1.1607981, ce qui confirme numériquement l'ordre 1 de la méthode de Newton.

Dans le cours, il est écrit que la méthode de Newton appliquée à la résolution de $p(x) = 0$ en x^* est d'ordre 2 si $p'(x^*) \neq 0$, ce qui est le cas de la question 1. Cela est confirmé par le graphique de l'énoncé et le tableau 3.3.

En revanche, dans le cas de la question 2, il semblerait que f' soit aussi nulle en x^*, comme le montrent la figure de l'énoncé et le tableau 3.4. Nous sommes donc dans le cas où l'ordre de la méthode de Newton n'est plus 2. On peut montrer en théorie que si x^* est une racine double de f, alors la méthode de Newton est dégénérée d'ordre 1. Plus de détails dans l'annexe R des notes de cours.

Remarque 3.8. Reprenons les simulations faites dans la question 2 en utilisant la méthode de Newton modifiée, présentée dans l'annexe R du polycopié de cours. Elle consiste à écrire

$$x_{n+1} = x_n - A\frac{p(x_n)}{p'(x_n)}, \tag{3.16}$$

n	$f'(x_n)$
0	-704.000000000000000
1	-427.948910593538640
2	-351.156276099246160
3	-343.094356463075880
4	-343.000012974177370
5	-343.000000000000280
6	-343.000000000000000
7	-343.000000000000000

TABLE 3.3. Valeurs des $f'(x_n)$

n	$f'(x_n)$
0	17.000000000000000
1	7.708731935680873
2	3.467149387443545
3	1.552400780866790
4	0.693220296622119
5	0.309041746650664
6	0.137627122989137
7	0.061248313349363
39	0.000000054140603
40	0.000000025763580
41	0.000000009969149
42	0.000000000460396
43	0.000000000460396

TABLE 3.4. Valeurs des $f'(x_n)$

où A est égal à l'ordre de multiplicité recherché, ici égal à $n_0 = 3$.

L'application de cette méthode de Newton modifiée à l'équation (3.11) des sujets de TD a produit les résultats donnés dans les tableaux 3.5 page suivante et sur la figure 3.6 page ci-contre.

Constatons tout d'abord que cette méthode de Newton modifiée donne bien des nombres d'itérations plus faible que la méthode de Newton habituelle (comparer les tableaux 3.5 page suivante avec les tableaux 3.3 de l'enoncé). On constate aussi que pour $n = 9$, on a numériquement

$$\begin{aligned}
&x_{n-1} = 5.001198691317248,\\
&x_n = 5.000000068170582,\\
&p(x_{n-1}) = 1.20585355034564\,10^{-8},\\
&p(x_n) = 0,
\end{aligned}$$

ce qui explique l'arrêt de l'algorithme pour cette valeur de n.

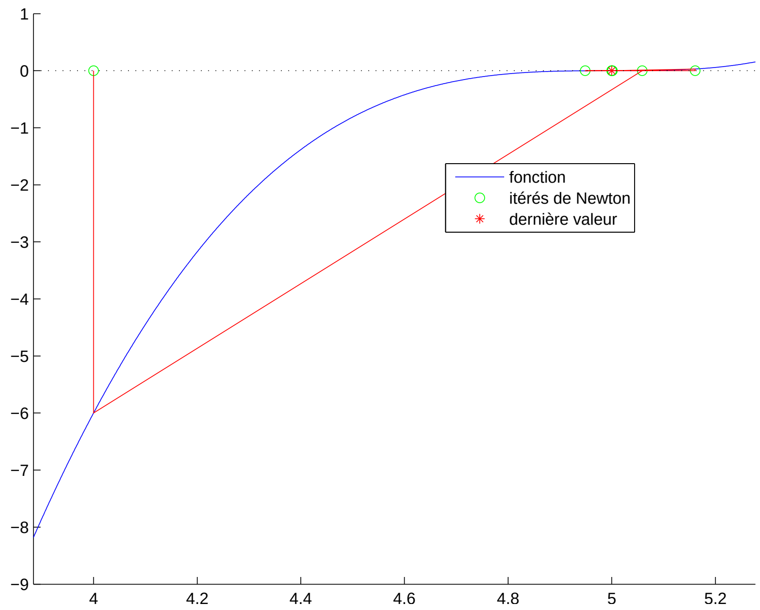


Figure 3.6. Graphiques des itérés de la méthode de Newton modifiée pour $x_0 = 4$.

n	x_n
0	4.000000000000000
1	5.058823529411765
2	5.000162946061685
3	5.000000397087849
4	4.948882186225229
5	5.000125653491296
6	5.000000162523420
7	5.161073988026775
8	5.001198691317248
9	5.000000068170582

Table 3.5. Itérations de la méthode de Newton modifiée pour $x_0 = 4$.

La détermination graphique de l'ordre a donné la figure 3.7 page suivante.

Numériquement, on a une corrélation égale à 1.0000000 et une pente égale à 1.9945846, ce qui confirme numériquement l'ordre de nouveau égal à 2 de la méthode de Newton modifiée.

Exercices facultatifs

Correction de l'exercice 3.5.

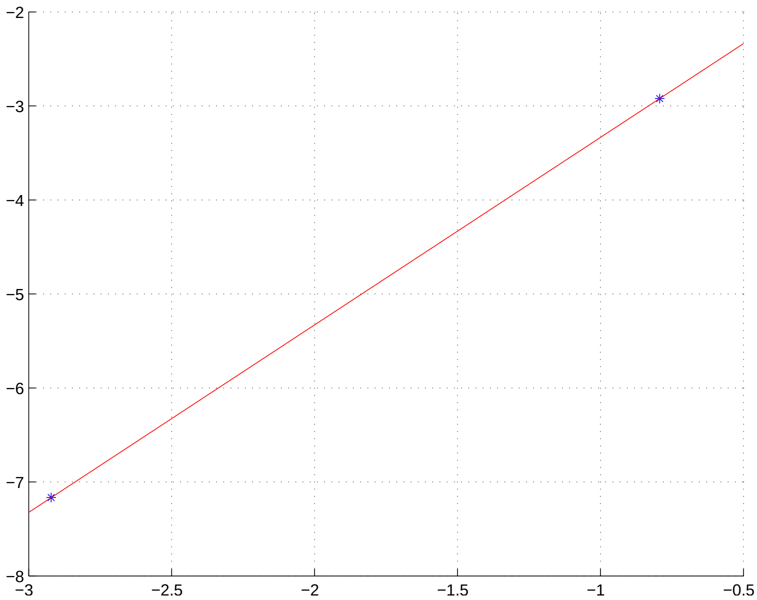


FIGURE 3.7. Nuage des derniers points et la droite aux moindres carrés (méthode de Newton modifiée).

(1) Notons $f(x) = x^4 + 6x^2 - 60x + 36$. Le graphique semble nous montrer que la fonction est strictement décroissante puis strictement croissante, ce qu'on peut montrer facilement [1]. Pour montrer que cette équation n'a que deux racines, il suffit alors d'exhiber une valeur pour laquelle la fonction s'annulle. Par exemple pour $t_0 = 2$, $f(t_0) = -44 < 0$.

(2) (a) Voir [BM03, Correction de l'exercice 4.7 p. 305].

(b) Voir [BM03, Correction de l'exercice 4.7 p. 305].

Précisons la divergence de la méthode du point fixe. Pour ce cas-là, on peut utiliser la proposition 3.12 du polycopié de cours.

- On constate que le dénominateur D de g_2, donné par

$$D(x) = x^3 + 6\,x - 60,$$

s'annulle pour une seule valeur de x donnée [2] par

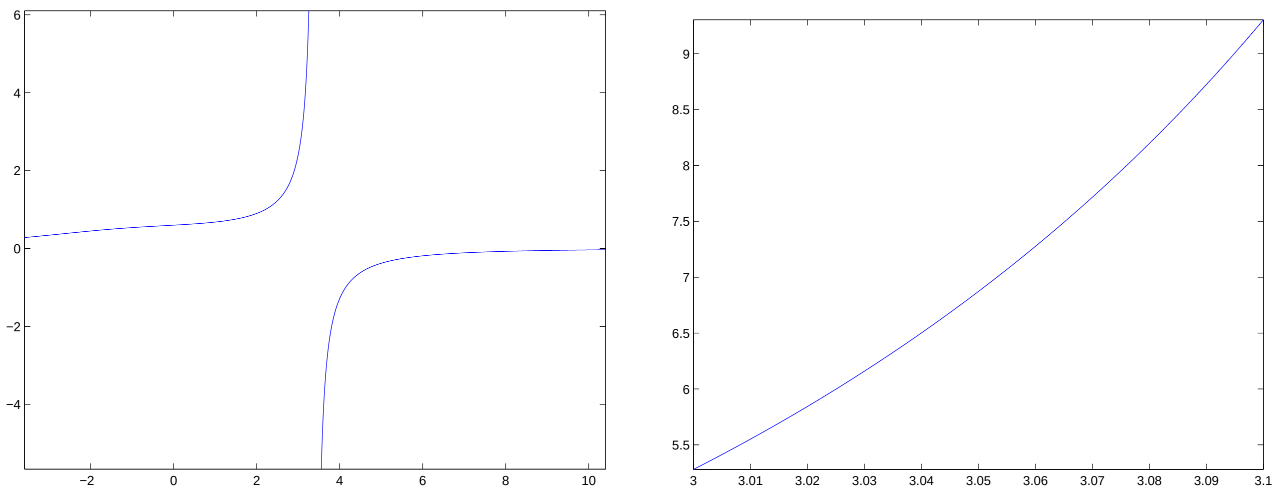
$$\beta = \sqrt[3]{30 + 2\sqrt{227}} - 2\,\frac{1}{\sqrt[3]{30 + 2\sqrt{227}}} = 3.4072630664966. \tag{3.17}$$

Aussi, g_2 possède une limite infinie en β. Par ailleurs, D a une dérivée qui est un polynôme du second degré, sans racine réelle. Il est donc de signe constant, de celui de 1. Ainsi D est strictement croissant sur $\mathbb{R}$. Puisqu'il ne s'annulle qu'en β et qu'il est de coefficient dominant strictement positif, D est donc strictement croissant et strictement positif sur $[\beta, +\infty[$ et croissant et strictement négatif sur $]-\infty, \beta]$. Ainsi, $36/D$ est strictement décroissant et strictement positif sur $[\beta, +\infty[$ et strictement décroissantet strictement négatif sur $]-\infty, \beta]$ et donc g_2 est strictement croissante et strictement négative sur $[\beta, +\infty[$ et strictement croissante et strictement positive sur $]-\infty, \beta]$. Voir le tableau de variation 3.6 page suivante de g_2. Cela est confirmé par le graphe de g_2, sur la figure 8(a).

1. On remarquera que la fonction f' n'a qu'une seule racine réelle qui est 2.064960.
2. Obtenue sous matlab symbolique.

x	$-\infty$	β	$+\infty$
Signe de $g_3'(x)$	$+$	$\Vert$	$+$
Variations de g_3	$0^+ \nearrow +\infty$	$\Vert$	$-\infty \nearrow 0^-$

TABLE 3.6. Tableau de variation de g_2



(a) g_2 (b) g_2'

FIGURE 3.8. Les graphes de g_2 et g_2' (sur $\left[3, \frac{31}{10}\right]$).

- Sur l'intervalle $\left[3, \frac{31}{10}\right]$, on constate que g_2' semble être comprise entre 5.2800000000 et 9.3039282563, ce qui est confirmé par le graphe 8(b). On montre cela en évaluant g_2' en 3 et en $\frac{31}{10}$ en montrant la monotonie de g_2'. On a donc *a fortiori*

$$\forall x \in \left[3, \frac{31}{10}\right], \quad 5 \leq g_2'(x) \leq 10. \tag{3.18}$$

- Enfin, en posant $I = \left[3, \frac{31}{10}\right]$, on constate que si x n'appartient pas à I, g n'est pas définie si $x = \beta$ ou si g est défini, par croissance de stricte de g, on a soit

$$g(x) < g\,(3) = 2.4000000000000 < 3,$$

soit

$$g(x) > g\left(\frac{31}{10}\right) = 3.1010422947713 > \frac{31}{10},$$

ce qui implique donc que $g(x)$ n'appartient pas à I.

- Bref, les deux hypothèse de la proposition 3.12 du polycopié de cours sont vérifiées. On en déduit la divergence de la suite du point fixe pour tout x_0 dans $I \setminus \{r\}$, où r est le point fixe de g.

(c) (i)

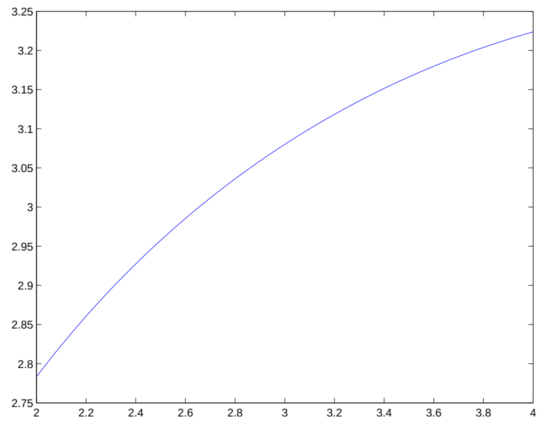


FIGURE 3.9. Le graphique de la fonction g_3 sur $[2, 4]$.

Voir sur le graphique 3.9, la fonction g_3.

— D'après la question 1, f n'a qu'une solution sur $[2, 4]$. On a

$$g_3'(x) = -3\,\frac{x-5}{\left(-6\,x^2+60\,x-36\right)^{3/4}}. \tag{3.19}$$

Au dénominateur de g_3', intervient le polynôme du second degré

$$D(x) = -6\,x^2 + 60\,x - 36,$$

dont la dérivée est nulle en 5. Ainsi ce dénominateur est strictement croissant sur $[2, 4]$. De plus, les racines de D sont 0.641101 et 9.358899. Ainsi, D est positif sur $[2, 4]$. Par ailleurs, puisque le numérateur de g_3' est décroissant et positif, on en déduit que g_3' est décroissante et positive sur $[2, 4]$. On déduit donc que g_3' est majorée par son maximum qui vaut $g_3'(2) = 0.417474$ et donc le maximum de $|g_3'|$ est

$$M = 0.417474.$$

REMARQUE 3.9. Si utilise la fonction `maxabsfun`, fournie sur le site habituel, pour déterminer avec plus de soin, un majorant exact de g_3', définie par (3.19), on obtient

$$M = 0.417473653.$$

— On peut aussi déduire du point précédent que g_3 est strictement croissante sur $[2, 4]$. Puisque $g_3(2) = 2.783158$ et $g_3(4) = 3.223710$, la fonction g_3 laisse $I = [2, 4]$ invariant.

Des deux points précédents, on déduit, grâce à la proposition 3.19 du polycopié de cours, que la méthode du point fixe pour la fonction g_2 sur $[2, 4]$ est convergente vers l'unique solution recherchée sur $[2, 4]$.

(ii)

Les résultats sont donnés dans le tableau 3.7.

Voir aussi la figure 3.10 page ci-contre. Le tableau 3.7 et la figure 3.10 ont été faits grâce à la fonction `fixepoint`, disponible sur le site.

n	x_n
0	2.00000000
1	2.78315768
2	3.03201767
3	3.08657150
4	3.09731658
5	3.09938449
6	3.09978065
7	3.09985648

TABLE 3.7. Itérés x_n du point fixe

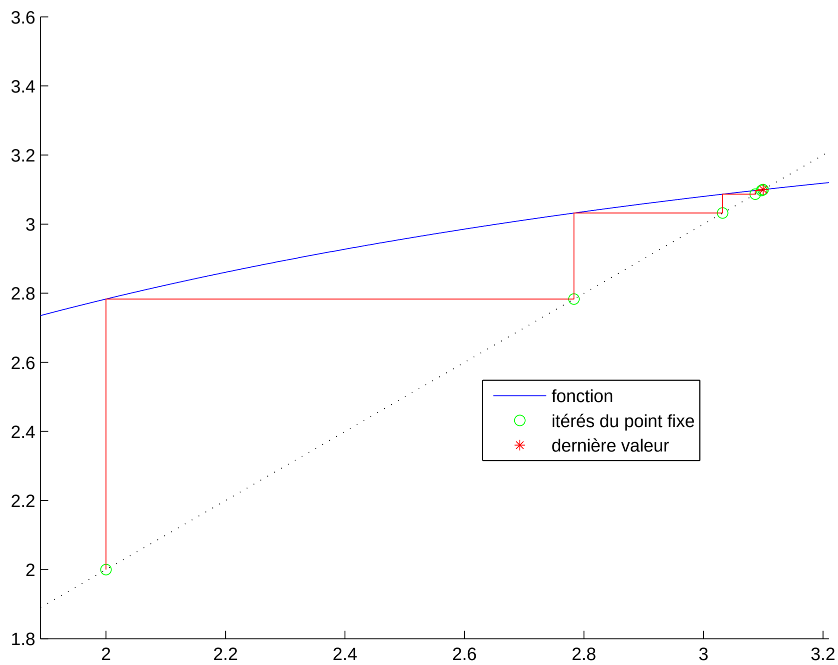


FIGURE 3.10. Le graphique illustrant les itérés du point fixe du tableau 3.7.

(iii) D'après le cours (voir aussi annexe N), on sait la formule de Taylor-Lagrange appliquée à g sur $[x^*, x_n]$ (x^* est l'unique point fixe de g_3) fournit

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C\,|x_n - x^*|\,,$$

où $M = \max_{[2,4]} |g_3'(x)|$. Cela implique

$$|x_n - x^*| \leq C^n\,|x_0 - x^*|\,,$$

et pour avoir

$$|x_n - x^*| \leq \varepsilon$$

il suffit donc que (avec $A = 2$ et $B = 4$)

$$M^n(B - A) \leq \varepsilon,$$

ce qui donne en prenant le logarithme

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{B-A}\right)}{\ln M}.$$

Numériquement avec,

$$M = 0.417473653, \tag{3.20}$$

on obtient

$$n \geq 3. \tag{3.21}$$

REMARQUE 3.10. Si on choisit d'utiliser la majoration (N.6) page 209, rappelée ici :

$$|x_n - x^*| \leq \frac{M^n}{1 - M} |g(x_0) - x_0|, \tag{3.22}$$

on obtient pour $x_0 = 2$ et M donné par (3.20),

$$n \geq 4, \tag{3.23}$$

ce qui ici n'est pas meilleur que (3.21).

CORRECTION DE L'EXERCICE 3.6.

(1) On vérifie que

$$\forall x \in I, \quad g'(x) = \frac{1}{x}. \tag{3.24}$$

Ainsi, pour tout x dans I, on a

$$|g'(x)| = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2.00000} \approx 0.50000.$$

ce qui permet donc d'écrire :

$$\exists k \in [0, 1[, \quad \forall x \in I, \quad |g'(x)| \leq k, \tag{3.25}$$

où

$$k \approx 0.50000 \tag{3.26}$$

(2) (a) Montrons que I est stable par g, c'est-à-dire, que tout $x \in I$, $g(x) \in I$. La fonction g est croissante, donc si $x \geq 2.00000$, alors $g(x) \geq g(2.00000) = 2.69315$. Puisque cette valeur est supérieure à 2.00000, on a bien x dans I.

(b) On rappelle que l'on a montré (3.25).

Les deux hypothèses du théorème [3] N.1 ou N.2 de l'annexe N du polycopié de cours permettent donc d'affirmer d'une part que g a un unique point fixe α dans I et que toute suite définie par $x_0 \in I$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers α. De plus, on rappelle l'inégalité (N.3) de cette même annexe :

$$|x_n - \alpha| \leq k^n |x_0 - \alpha|, \tag{3.27}$$

Cette inégalité n'est pas exploitable en l'état car on n'a pas d'encadrement sur $|x_0 - \alpha|$. Utilisons alors l'inégalité de l'énoncé :

$$\forall n, \quad |x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1 - k} |g(x_0) - x_0|. \tag{3.28}$$

3. Le théorème N.2 est vrai même si I n'est pas borné ! En effet $g(I) \subset I$ et puisque g est continue, $g(I)$ est borné et on peut considérer que g est une application de $g(I)$ borné dans $g(I)$.

Ainsi, pour avoir $|x_n - \alpha| \leq \varepsilon$, il suffit que

$$\frac{k^n}{1-k}|g(x_0) - x_0| \leq \varepsilon.$$

Si $g(x_0) - x_0 = 0$, c'est que x_0 est l'unique point fixe et il n'y a plus rien à faire que de prendre $n = 0$. Sinon, c'est équivalent à

$$n \ln k \leq \ln\left(\frac{\varepsilon(1-k)}{|g(x_0) - x_0|}\right)$$

et donc

$$n \geq \frac{1}{\ln(k)} \ln\left(\frac{\varepsilon(1-k)}{|g(x_0) - x_0|}\right) \tag{3.29}$$

Numériquement, pour $x_0 = 2$, on a

$$n = 18. \tag{3.30}$$

Cela est trop grand. On peut affiner le tir en partant de x_0, calculer par exemple les 6 premières itérations. On obtient

$$x_n \approx 3.144546946. \tag{3.31}$$

On admet que la majoration (3.25) est encore valable sur l'intervalle $\widetilde{I} = [x_n, +\infty[$ que cet intervalle est g stable et que l'on a donc, tout x dans I

$$|g'(x)| = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{3.144546946} \approx 0.318010835,$$

ce qui est meilleur que (3.26). Enfin, si on applique de nouveau (3.28) mais avec cette valeur là et à partir de cette valeur de n, on a donc

$$\forall p \geq n, \quad |x_{n+p} - \alpha| \leq \frac{k^p}{1-k}|g(x_n) - x_n|, \tag{3.32}$$

et donc on obtient

$$p = 5. \tag{3.33}$$

À partir de cette valeur de p, on obtient donc

$$x_{n+p} \approx 3.146187878. \tag{3.34}$$

On peut aussi calculer la solution recherchée en tappant sous matlab :

```
fzero('log(x)+2-x=0',3)
```

ce qui donne

$$\alpha \approx 3.146193221. \tag{3.35}$$

Si, ensuite, *a posteriori*, on calcule $|\alpha - x_{n+p}|$, on obtient alors

$$\alpha \approx 5.3425\,10^{-6}, \tag{3.36}$$

ce qui est bien inférieur à $\varepsilon = 1.0\,10^{-5}$.

Correction de l'exercice 3.7.
Voir annexe N du polycopié de cours page 209.

CORRECTION DU TRAVAUX DIRIGÉS 4

Équations différentielles

Correction de l'exercice 4.1.

(1) En posant $\xi_0 = 1$ et

$$f(t, y) = \tan(t)\, y, \tag{4.1}$$

l'équation différentielle

$$\forall t \in [0, T], \quad y'(t) = \tan(t)\, y(t), \tag{4.2a}$$

$$y(0) = 1, \tag{4.2b}$$

est équivalente à

$$\forall t \in [0, T], \quad y'(t) = f(t, y(t)), \tag{4.3a}$$

$$y(0) = \xi_0. \tag{4.3b}$$

On calcule pour $n \in \{1, ..., N = 4\}$, les approximations $y_n \approx y(t_n)$ en utilisant les définitions 4.13 du polycopié de cours, 4.18 du polycopié de cours et 4.19 du polycopié de cours.

n	y_n
0	1.00000000
1	1.00000000
2	1.00250209
3	1.00753137
4	1.01514504

Table 4.1. Solutions approchées avec Euler explicite

n	y_n
0	1.00000000
1	1.00125104
2	1.00502144
3	1.01135881
4	1.02034415

Table 4.2. Solutions approchées avec RK2

Les résultats sont donnés dans les tableaux 4.1, 4.2 et 4.3.

n	y_n
0	1.00000000
1	1.00125130
2	1.00502092
3	1.01135644
4	1.02033885

TABLE 4.3. Solutions approchées avec RK4

n	$\lvert y(t_n) - y_n \rvert$
0	0.00000000
1	0.00125130
2	0.00251883
3	0.00382507
4	0.00519380

TABLE 4.4. Erreurs avec Euler explicite

n	$\lvert y(t_n) - y_n \rvert$
0	0
1	$2.606990728\,10^{-7}$
2	$5.210020484\,10^{-7}$
3	$2.362813013\,10^{-6}$
4	$5.304145960\,10^{-6}$

TABLE 4.5. Erreurs avec RK2

n	$\lvert y(t_n) - y_n \rvert$
0	0
1	$4.342037839\,10^{-11}$
2	$1.753714951\,10^{-10}$
3	$4.24016675\,10^{-10}$
4	$7.366343091\,10^{-10}$

TABLE 4.6. Erreurs avec RK4

(2)

Les résultats en erreur sont donnés dans les tableaux 4.4, 4.5 et 4.6. On y constate que l'erreur est de plus en plus faible selon la méthode utilisée.

(3) On peut proposer $y'(t_n) \approx (y_{n+1} - y_n)/(t_n)$, puisque $y_n \approx y(t_n)$. Cependant, dans cette expression, on constate qu'on a deux approximations différentes de la dérivées entrant en jeux. Rien dans le cours ne justifie cette approximation. Cependant puisque f, définie par (4.1), est continue en second argument, que $y'(t_n) = f(t_n, y(t_n))$ et que $y_n \to y(t_n)$, on peut alors proposer

$$y'(t_n) \approx f(t_n, y_n).$$

Correction de l'exercice 4.2.

En posant $\xi_0 = 1$ et

$$f(t,y) = -t^2 + yt, \tag{4.4}$$

l'équation différentielle

$$\forall t \in [0,T], \quad y'(t) = -t^2 + y(t)t, \tag{4.5a}$$

$$y(0) = 1, \tag{4.5b}$$

est équivalente à

$$\forall t \in [0,T], \quad y'(t) = f(t, y(t)), \tag{4.6a}$$

$$y(0) = \xi_0. \tag{4.6b}$$

On calcule pour $n \in \{1, ..., N = 2\}$, les approximations $y_n \approx y(t_n)$.

n	y_n
0	1.00000000
1	1.00000000
2	1.06300000

Table 4.7. Solutions approchées avec Euler explicite

n	y_n
0	1.00000000
1	1.03150000
2	1.10917765

Table 4.8. Solutions approchées avec RK2

Les résultats sont donnés dans les tableaux 4.7, 4.8 et 4.9, obtenus en utilisant les définitions 4.13 du polycopié de cours, 4.18 du polycopié de cours et 4.19 du polycopié de cours.

Correction de l'exercice 4.3.

On pose

$$y_1 = y,$$
$$y_2 = y',$$
$$y_3 = y''.$$

n	y_n
0	1.00000000
1	1.03687353
2	1.11977332

TABLE 4.9. Solutions approchées avec RK4

On a alors

$$\begin{aligned} y_1' &= y' = y_2, \\ y_2' &= y'' = y_3, \\ y_3' &= y^{(3)} = y'' - 2y' + y - 2 = y_3 - 2y_2 + y_1 - 2. \end{aligned}$$

Ainsi, en posant

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix},$$

on a

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_3(t) - 2y_2(t) + y_1(t) - 2 \end{pmatrix},$$

On obtient alors

$$\forall t \in [0, T], \quad Y'(t) = F(t, Y(t)), \tag{4.7a}$$

$$Y(0) = \Xi_0, \tag{4.7b}$$

où

$$\forall t \in [0, T], \quad \forall Y = {}^t(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3, \quad F(t, Y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_3 - 2y_2 + y_1 - 2 \end{pmatrix}, \tag{4.8a}$$

$$\Xi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{4.8b}$$

Remarquons qu'ici, le système est affine puisque

$$F(t, Y) = AY + B,$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

REMARQUE 4.1. Cette opération est essentielle aussi bien sur le plan théorique que numérique. Par exemple, sous matlab, il faut définir la fonction F avant d'utiliser un solveur. Ici, il faudrait par exemple taper

```
f=inline('[0 1 0;0 0 1;1 -2 1]*Y+[0;0;2]','t','Y');
Y0=[0;1;2];
[T,Y]=ode45(f,[0 1],Y0);
plot(T,Y);
```

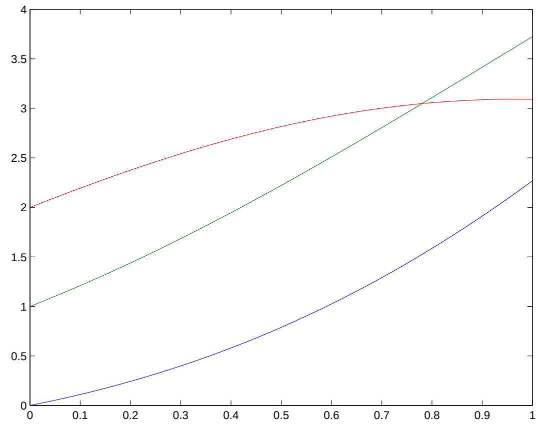


FIGURE 4.1. Le graphique de résolution de (4.7)

ce qui fournirait le graphique 4.1.

CORRECTION DE L'EXERCICE 4.4.

Voir aussi [BM03, Correction de l'exercice 5.7 p. 323].

On pose

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = \dot{x}_1, \quad y_3 = x_2, \quad y_4 = \dot{x}_2$$

Ainsi, les équations différentielles de l'énoncé sont équivalentes au système

$$\begin{aligned}
&\dot{y}_1(t) = y_2(t),\\
&\dot{y}_2(t) = -\left(k_1 + k_2\right) y_1(t) + k_2 y_3(t) - c_1 y_2(t) - d_1 y_2^3(t) + f_1(t),\\
&\dot{y}_3(t) = y_4(t),\\
&\dot{y}_4(t) = k_2 y_1(t) - \left(k_2 + k_3\right) y_3(t) - c_2 y_4(t) - d_2 y_4^3(t) + f_2(t).
\end{aligned}$$

Ainsi, si l'on se donne les conditions initiales sous la forme

$$\Xi_0 = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ \dot{x}_1(0) \\ x_2(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{pmatrix}$$

alors les équations différentielles de l'énoncé le système s'écrivent sous la forme (4.6) de l'énoncé avec $p = 4$.

La fonction F associée au système des équations différentielles de l'énoncé est donnée par

$$F\left(t, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\left(k_1 + k_2\right) y_1 + k_2 y_3 - c_1 y_2 - d_1 y_2^3 + f_1(t), \\ y_4 \\ k_2 y_1 - \left(k_2 + k_3\right) y_3 - c_2 y_4 - d_2 y_4^3 + f_2(t) \end{pmatrix},$$

et le vecteur des conditions initiales est donné par

$$\Xi_0 = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ \dot{x}_1(0) \\ x_2(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{pmatrix}$$

Pour une utilisation informatique, on peut aussi mettre cela sous la forme

On considère l'application G de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$\forall t \in [a,b], \quad G(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_1(t) \\ 0 \\ f_2(t) \end{pmatrix},$$

l'application H de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$\forall Y \in \mathbb{R}^4, \quad H(Y) = H \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ d_1 y_2^3 \\ 0 \\ d_2 y_4^3 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on considère A la matrice $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$A = - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ k_1 + k_2 & c_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -k_2 & 0 & k_2 + k_3 & c_2 \end{pmatrix}.$$

On définit enfin l'application F de $[0,T] \times \mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ par

$$\forall t \in [a,b], \quad \forall Y \in \mathbb{R}^4, \quad F(t,Y) = G(t) + H(Y) + AY.$$

$\diamondsuit$

n	$y_{1,n}$	$y_{2,n}$	$y_{3,n}$	$y_{4,n}$
0	1.00000000	1.00000000	2.00000000	1.00000000
1	1.01000000	0.99980000	2.01000000	0.96980000
2	1.01999800	0.99950008	2.01969800	0.93951181
3	1.02999300	0.99909730	2.02909312	0.90914095
4	1.03998397	0.99858873	2.03818453	0.87869296
5	1.04996986	0.99797146	2.04697146	0.84817339

TABLE 4.10. Solutions approchées avec Euler

Les résultats des simulations sont donnés dans les tableaux 4.10.

On a $Y_0 = \Xi_0$ où

$$\Xi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ce qui fournit la première ligne du tableau 4.10. Précisons maintenant le passage de Y_0 à Y_1. D'après le schéma donné dans la définition 4.67 du polycopié de cours, pour $n = 0$, (4.67b) du polycopié de cours donne

$$Y_1 = Y_0 + hF(t_0, Y_0).$$

On a aussi

$$F(0, Y_0) = \begin{pmatrix} y_{2,0} \\ -(k_1 + k_2)\, y_{1,0} + k_2 y_{3,0} - c_1 y_{2,0} - d_1 y_{2,0}^3 + f_1(0), \\ y_{4,0} \\ k_2 y_{1,0} - (k_2 + k_3)\, y_{3,0} - c_2 y_{4,0} - d_2 y_{4,0}^3 + f_2(0) \end{pmatrix},$$

et donc, compte tenu des conditions initiales et des données de l'énoncé

$$F(0, Y_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\times 1 + 1\times 2 - 0,01\times 1 - 0,01\times 1^3 + 0 \\ 1 \\ 1\times 1 - 2\times 2 - 0.01\times 1 - 0,011^3 + 0 \end{pmatrix},$$

et donc

$$F(0, Y_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.02000000 \\ 1 \\ -3.02000000 \end{pmatrix},$$

et enfin

$$Y_1 = Y_0 + hF(0, Y_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,01\times \begin{pmatrix} 1 \\ -0.02000000 \\ 1 \\ -3.02000000 \end{pmatrix},$$

et donc

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1.01000000 \\ 0.99980000 \\ 2.01000000 \\ 0.96980000 \end{pmatrix}$$

ce qui fournit la deuxième ligne du tableau 4.10. On recommence. D'après le schéma donné dans la définition 4.67 du polycopié de cours, pour $n = 0$, (4.67b) du polycopié de cours donne

$$Y_2 = Y_1 + hF(t_1, Y_1),$$

où Y_1 vient d'être calculé et $t_1 = 1\times h = h = 0,01$. Or

$$F(t_1, Y_1) = \begin{pmatrix} y_{2,1} \\ -(k_1+k_2)\,y_{1,1} + k_2 y_{3,1} - c_1 y_{2,1} - d_1 y_{2,1}^3 + f_1(0,01), \\ y_{4,1} \\ k_2 y_{1,1} - (k_2+k_3)\,y_{3,1} - c_2 y_{4,1} - d_2 y_{4,1}^3 + f_2(0,01) \end{pmatrix},$$

et donc

$$F(t_1, Y_1) = \begin{pmatrix} 0.99980000 \\ -2\times 1.01000000 + 1\times 2.01000000 - 0,01\times 0.99980000 - 0,01\times (0.99980000)^3 + 0 \\ 0.96980000 \\ 1\times 0.99980000 - 2\times 2.01000000 - 0.01\times 0.96980000 - 0,010.96980000^3 + 0 \end{pmatrix},$$

et donc

$$F(t_1, Y_1) = \begin{pmatrix} 0.99980000 \\ -0.02999200 \\ 0.96980000 \\ -3.03901909 \end{pmatrix},$$

et enfin

$$Y_2 = Y_1 + hF(t_1, Y_1) = \begin{pmatrix} 1.01000000 \\ 0.99980000 \\ 2.01000000 \\ 0.96980000 \end{pmatrix} + 0,01\times \begin{pmatrix} 0.99980000 \\ -0.02999200 \\ 0.96980000 \\ -3.03901909 \end{pmatrix},$$

et donc

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 1.01999800 \\ 0.99950008 \\ 2.01969800 \\ 0.93951181 \end{pmatrix}$$

ce qui fournit la troisième ligne du tableau 4.10.

Pour chaque valeur de $i \in \{0, ..., N = 5\}$, sont données les approximations $Y_i = (y_{1,i}, y_{2,i}, y_{3,i}, y_{4,i})$ qui représentent donc des approximations de $x_1(t_i)$ $\dot{x}_1(t_i)$, $x_2(t_i)$ et $\dot{x}_2(t_i)$.

CORRECTION DU TRAVAUX DIRIGÉS 5

Systèmes d'équations linéaires

Correction de l'exercice 5.1.

On obtient la matrice triangulaire supérieure suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

avec un second membre égal à

$$c = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

La résolution du système triangulaire supérieur fournit donc la solution

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Précisons la phase de transformation de la matrice en une matrice triangulaire supérieure :

— La matrice augmentée est

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

— Première étape : Aucune permutation de lignes n'est nécessaire. On effectue les opérations de lignes

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1,$$
$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1.$$

La nouvelle matrice augmentée est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

— Deuxième étape : on permute L_2 et L_3. La nouvelle matrice est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On effectue ensuite l'opération de ligne

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2} L_2.$$

La nouvelle matrice est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

CORRECTION DE L'EXERCICE 5.2.

On obtient la matrice triangulaire supérieure suivante

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

avec un second membre égal à

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La résolution du système triangulaire supérieur fournit donc la solution,

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

où l'on a opéré la permutation des colonnes données par $\{2,3,1\}$. Après permutation des colonnes, on a donc la solution

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que

$$AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = B.$$

Précisons la phase de transformation de la matrice en une matrice triangulaire supérieure :

— La matrice augmentée est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

— Première étape : on permute L_2 et L_1, puis C_1 et C_2. Le tableau des indices passe de $\{1,2,3\}$ à $\{2,1,3\}$. La nouvelle matrice augmentée est donc

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On effectue ensuite les opérations de lignes

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1,$$
$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1.$$

La nouvelle matrice est donc

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

— Deuxième étape : on permute L_2 et L_3, puis C_2 et C_3. Le tableau des indices passe de $\{2,1,3\}$ à $\{2,3,1\}$. La nouvelle matrice est donc

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

On effectue ensuite l'opération de ligne

$$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{3}L_2.$$

La nouvelle matrice est donc

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 2 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 5.3.

(1) On obtient la matrice triangulaire U supérieure suivante

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et la matrice triangulaire L inférieure suivante

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) Le système $Ax = b$ est équivalent à $LUx = b$ et donc aux deux systèmes équivalents que l'on résoud successivement : $Ly = b$ et $Ux = y$. La résolution de $Ly = b$ fournit

$$y = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et la résolution de $Ux = y$ fournit finalement

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3) On peut vérifier finalement que la solution est correcte :

$$Ax = \begin{pmatrix} 18 \\ 27 \\ 27 \end{pmatrix} = b.$$

Exercices facultatifs

Non corrigés.

Annexe A

Calcul de a^0 et redéfinition de l'exponentielle (sous la forme de deux exercices corrigés)

Premier énoncé

(1) Pour a réel et n entier naturel non nul, (re)définir a^n par récurrence sur n.

(2) Avec cette définition, montrer par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a^{n+m} = a^n a^m$.

(3) Quel sens donner alors à a^0, pour a réel non nul ?

(4) De la même façon, donner successivement un sens à a^n, pour $n \in \mathbb{Z}$, $a^{1/p}$, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et enfin pour a^r pour $r \in \mathbb{Q}$.

(5) Seriez-vous capable de donner un sens à a^x, pour x réel, complexe ?

Premier corrigé

(1) Une définition de a^n peut être la suivante : pour tout $n \geq 1$,

$$a^n \text{ est le produit de } n \text{ facteurs égaux à } a. \tag{A.1}$$

De telle sorte que

$$a^1 = a. \tag{A.2}$$

Plus rigoureusement, on peut aussi le définir par récurrence (ou récursivité) sur n :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a^{n+1} = \begin{cases} aa^n, & \text{si } n \geq 1, \\ a, & \text{si } n = 0. \end{cases} \tag{A.3}$$

Dans les deux cas, a^0 n'est pas défini !

(2) Montrons par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a^{n+m} = a^n a^m. \tag{A.4}$$

L'initialisation correspond à $m = 1$ et il faut donc montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a^{n+1} = a^n a^1,$$

ce qui correspond, d'après (A.2) à montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a^{n+1} = a^n a,$$

ce qui est exactement la définition (A.3).

Supposons maintenant que (A.4) est vrai pour un entier m non nul fixé et montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a^{n+(m+1)} = a^n a^{m+1}. \tag{A.5}$$

Par définition, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a^{n+(m+1)} = a^{(n+m)+1} = aa^{n+m}.$$

Ainsi, d'après (A.4), on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a^{n+(m+1)} = aa^n a^m = a^n aa^m,$$

et donc, en utilisant de nouveau la définition, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a^{n+(m+1)} = a^n a^{m+1}.$$

REMARQUE A.1. À un niveau élémentaire, cela peut aussi se démontrer en disant, d'après la définition (A.1) que a^{n+m} est le produit de $n+m$ facteurs égaux à a, que a^n est le produit de n facteurs égaux à a, que a^m est le produit de m facteurs égaux à a et donc a^{n+m} est aussi le produit de $n+m$ facteurs égaux à a.

(3) D'après la définition (A.1) ou (A.3) n'a aucun sens si $n = 0$. Cependant, violons le domaine de validité de (A.4) et écrivons-là abusivement avec $n = 0$, ce qui donne formellement

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad a^{0+m} = a^0 a^m.$$

soit

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad a^m = a^0 a^m. \tag{A.6}$$

Si a est non nul, a^m est non nul et dans (A.6), on peut donc diviser par a^m et obtenir

$$1 = a^0. \tag{A.7}$$

Cette égalité non montre que a^0, *a priori* non défini, peut être posé formellement égal à 1. Ainsi, on pose

$$\forall a \neq 0, \quad a^0 = 1. \tag{A.8}$$

Dans ce cas, on peut écrire (A.4), sous la forme :

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad a^{n+m} = a^n a^m. \tag{A.9}$$

et (A.3) sous la forme

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a^{n+1} = \begin{cases} aa^n, & \text{si } n \geq 0, \\ 1, & \text{si } n = 0. \end{cases} \tag{A.10}$$

REMARQUE A.2. En reprenant la remarque A.1, on peut montrer cela à un niveau élémentaire, sans récurrence.

REMARQUE A.3. On peut aussi donner une preuve alternative de $a^0 = 1$, moins élémentaires, valable uniquement dans le cas où $a = 2$.

Rappelons que, si I est un ensemble de cardinal $n \geq 1$, le nombre de parties de I est de cardinal 2^n. Si I est vide, on tient pour vrai encore cela. Or, l'ensemble des parties de $\emptyset$ est égal à $\{\emptyset\}$, de cardinal 1 qui vaut donc 2^0.

REMARQUE A.4. De la même façon, on peut donner un sens à 0!. On rappelle que $n!$ est défini, pour tout entier $n \geq 1$ par

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times .... \times n = \prod_{i=1}^{n} i.$$

On a donc, pour tout entier $n \geq 1$

$$(n+1)! = 1 \times 2 \times 3 \times .... \times n \times (n+1),$$

et donc

$$(n+1)! = (n+1)n!.$$

On écrit alors la définition récurrente de $n!$:

$$\forall n \geq 0, \quad (n+1)! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ (n+1)n! & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

On l'utilise alors abusivement la deuxième équation pour $n=0$, ce qui donne

$$1 = 1! = 0!$$

Dans ce cas, on peut réécrire la définition de $n!$ sous la forme

$$\forall n \geq 0, \quad n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ n(n-1)! & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

On peut aussi utiliser le résultat de l'exercice 1.1 de TD et considérer que

$$0! = \prod_{i=1}^{0} i,$$

est un produit vide donc égal à 1, comme on le fait dans la convention (1.28) du cours.

(4) (a) Si on reprend maintenant (A.9), en écrivant formellement, et comme précédemment, en violant le domaine de validité de cette formule, qu'on peut l'appliquer à $n \in \mathbb{N}$ et $m = -n \in \mathbb{Z}$ on obtient

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a^0 = a^n a^{-n}.$$

ce qui donne, compte tenu de (A.8)

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \tag{A.11}$$

ce que l'on prendra comme définition. Ainsi, (A.9) est vrai pour tout entier n et m relatifs :

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}, \quad a^{n+m} = a^n a^m. \tag{A.12}$$

En effet, prenons n ou m négatif (le cas n et m positifs étant déjà réglé !), en donc, sans perte de généralité, par symétrie, il suffit de traiter les cas ($n \leq -1$ et $m \leq -1$) et ($n \leq -1$ et $m \geq 1$). Dans le premier cas, on écrit

$$a^{n+m} = \frac{1}{a^{-(n+m)}} = \frac{1}{a^{(-n)+(-m)}} = \frac{1}{a^{(-n)}a^{(-m)}} = \frac{1}{a^{(-n)}}\frac{1}{a^{(-m)}} = a^n a^m.$$

Le second cas est presque identique.

(b) De la même façon, on peut montrer, comme dans le point 2 que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \qquad (a^n)^m = a^{nm}. \tag{A.13}$$

Si comme précédemment, on applique cela formellement à $m \in \mathbb{N}^*$ et $n = 1/m$, on obtiendrait

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \qquad \left(a^{1/m}\right)^m = a. \tag{A.14}$$

Pour $m \in \mathbb{N}^*$ fixé, l'application $x \mapsto x^m$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, d'inverse $\sqrt[m]{x}$ et donc (A.14), nous fournit la définition suivante :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*, \quad a^{1/m} = \sqrt[m]{a}. \tag{A.15}$$

(c) On peut, d'après ce qui précède, tenir vrai (A.15) pour $m \in \mathbb{Z}$, en posant, si $-m \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \quad m \leq -1 \Longrightarrow a^{-1/m} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}}. \tag{A.16}$$

(d) Enfin, si p et q sont deux entiers naturels non nuls, on peut définit, d'après tout ce qui précède,

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall p, q \in \mathbb{N}^*, \quad a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}. \tag{A.17}$$

Si $p \in \mathbb{Z}$, on pourra définir

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall q \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p \in \mathbb{Z}, \quad p \leq -1 \Longrightarrow a^{p/q} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^{-p}}}. \tag{A.18}$$

On a donc défini a^r pour tout r rationnel. On laisse au lecteur vérifier que la définition de a^r ne dépend pas de la fraction choisie, c'est-à-dire que $a^{p/q}=a^{(mp)/(mq)}$ et que (A.12) et (A.13) sont vrais pour tout couple de rationnels. Démontrons par exemple que

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \quad \forall r, r' \in \mathbb{Q}, \quad a^{r+r'}=a^r a^{r'}. \tag{A.19}$$

Pour cela, on écrit, d'après ce qui précède (avec p, q, p' et q' entiers)

$$\begin{aligned}
a^{r+r'} &= a^{\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}},\\
&= a^{\frac{pq'+qp'}{qq'}},\\
&= \sqrt[qq']{a^{pq'+qp'}},\\
&= \sqrt[qq']{a^{pq'}}\,\sqrt[qq']{a^{qp'}},\\
&= \left(a^{pq'}\right)^{1/(qq')}\left(a^{qp'}\right)^{1/(qq')},\\
&= a^{\frac{p}{q}}a^{\frac{p'}{q'}}.
\end{aligned}$$

(5) (a) Si a est un réel non nul et x un réel, on peut écrire que $x \lim_{n\to+\infty} r_n$ où r_n est u rationnel. On sait que a^{r_n} est défini et on admet que la limite de a^{r_n} existe, indépendamment de la suite choisie et cela constituera la définition de a^x. On peut aussi montrer que (A.12) et (A.13) sont vrais pour tout couple de réels.

Démontrons par exemple (A.12). Soient x et y deur réels. Il existe deux suites x_n et y_n de rationnels qui convergent respectivemet vers x et y. D'après (A.19), on a donc

$$a^x a^y = \lim_{n\to+\infty} a^{x_n} \lim_{n\to+\infty} a^{y_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{x_n}a^{y_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{x_n+y_n} = a^{x+y}.$$

(b) Si x est un complexe, on peut écrire $x=X+iY$ où X et Y sont deux réels et on posera donc, dans le cas où $a=e$:

$$e^x = e^{X+iY} = e^X e^{iY} = e^X\left(\cos Y + i \sin Y\right),$$

qui se généralise pour a réel quelconque. Plus de détails par exemple dans [Bas19, Chapitre "Séries entières et fonctions usuelles sur $\mathbb{C}$"].

Second énoncé

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n=(1+1/n)^n$.

Le but de cet exercice est de donner une définition alternative de l'exponentielle, dont on ne servira donc pas !

(1) Montrer que, pour tout $\alpha \in]0,1[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(n\geq 2 \Longrightarrow (1-\alpha)^n > 1-n\alpha\right)$.

(2) En prenant $\alpha = 1/n^2$, montrer que u_n est croissante.

(3) En prenant $\alpha = 1/(6n+1)$, montrer que u_n est majorée.

(4) Conclure.

Second corrigé

Voir [Mon90, exercice 3.5.7]

(1) De méthodes sont possibles :

(a) Pour $\alpha \in]0,1[$ fixé, utiliser une récurrence sur n. Pour $n = 0$, on a bien
$$(1-\alpha)^0 = 1 \geq 1 - \alpha \times 0.$$
Si l'inéquation est vraie pour n, on écrit alors à l'ordre $n+1$:
$$\begin{aligned}(1-\alpha)^{n+1} &= (1-\alpha)(1-\alpha)^n,\\ &\geq (1-\alpha)(1-n\alpha),\\ &= 1 - n\alpha - \alpha + \alpha^2,\\ &\geq 1 - n\alpha - \alpha,\\ &= 1-(n+1)\alpha.\end{aligned}$$

(b) On peut aussi étudier la fonction $t \mapsto (1-\alpha)^t - 1 + t\alpha$ sur $[1,+\infty[$, ce qui gênant en fait car cela contient l'exponentielle !

(2) On déduit d'abord de l'inégalité de l'énoncé :
$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n},$$
ce qui implique
$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1-\frac{1}{n},$$
et donc
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n+1}. \tag{A.20}$$
Remarquons aussi que pour tout $X > 0$,
$$\frac{1}{1-\frac{1}{X}} = 1 + \frac{1}{X-1}. \tag{A.21}$$
Si on applique cela pour $X = n$, on a donc, d'après (A.20) :
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1},$$
et donc $u_n > u_{n-1}$.

(3) On déduit d'abord de l'inégalité de l'énoncé :
$$\left(1-\frac{1}{6n+1}\right)^n > 1 - \frac{n}{6n+1} = \frac{5n+1}{6n+1} > \frac{5}{6},$$
puisque cette dernière inégalité est équivalente à $30n+6 > 30n+5$, ce qui est vrai. Ainsi, on a d'après (A.21) appliquée à $X = 6n+1$:
$$\left(1+\frac{1}{6n}\right)^{-n} > \frac{5}{6},$$
et donc
$$\left(1+\frac{1}{6n}\right)^{n} < \frac{6}{5},$$
et donc
$$\left(1+\frac{1}{6n}\right)^{6n} < \left(\frac{6}{5}\right)^6.$$
On a donc u_{6n} est majorée et puisque u_n est croissante, elle est majorée.

(4) La suite converge donc. On peut ensuite, en utilisant l'exponentielle, montrer que la limite est e.

Annexe B

Simulations numériques sur l'erreur d'interpolation

Pour f et g données par

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \sin(x/3), \tag{B.1a}$$

$$\forall x \in [6000, 6001], \quad g(x) = \sin((x-6000)/3), \tag{B.1b}$$

on calcule le polynôme p_n correspondant aux points équirépartis x_i de $[a,b]$ (c'est-à-dire vérifiant $p_n(x_i) = f(x_i)$) par l'une des trois méthodes données en page 9.

Voir la figure B.1 pour laquelle les trois méthodes de calculs se déroulent bien : f et p_n sont indiscernables graphiquement.

Pour n plus grand, la méthode utilisant la forme canonique n'est plus efficace, alors que les deux autres le sont encore ! Voir la figure B.2.

Pour n encore plus grand, la méthode utilisant les polynômes de Lagrange commence à n'être plus efficace, alors que la méthode avec newton avec évaluation d'Horner l'est encore. Ensuite, au delà d'une certaine valeur de n cette méthode-ci ne marche plus ! Voir la figure B.3.

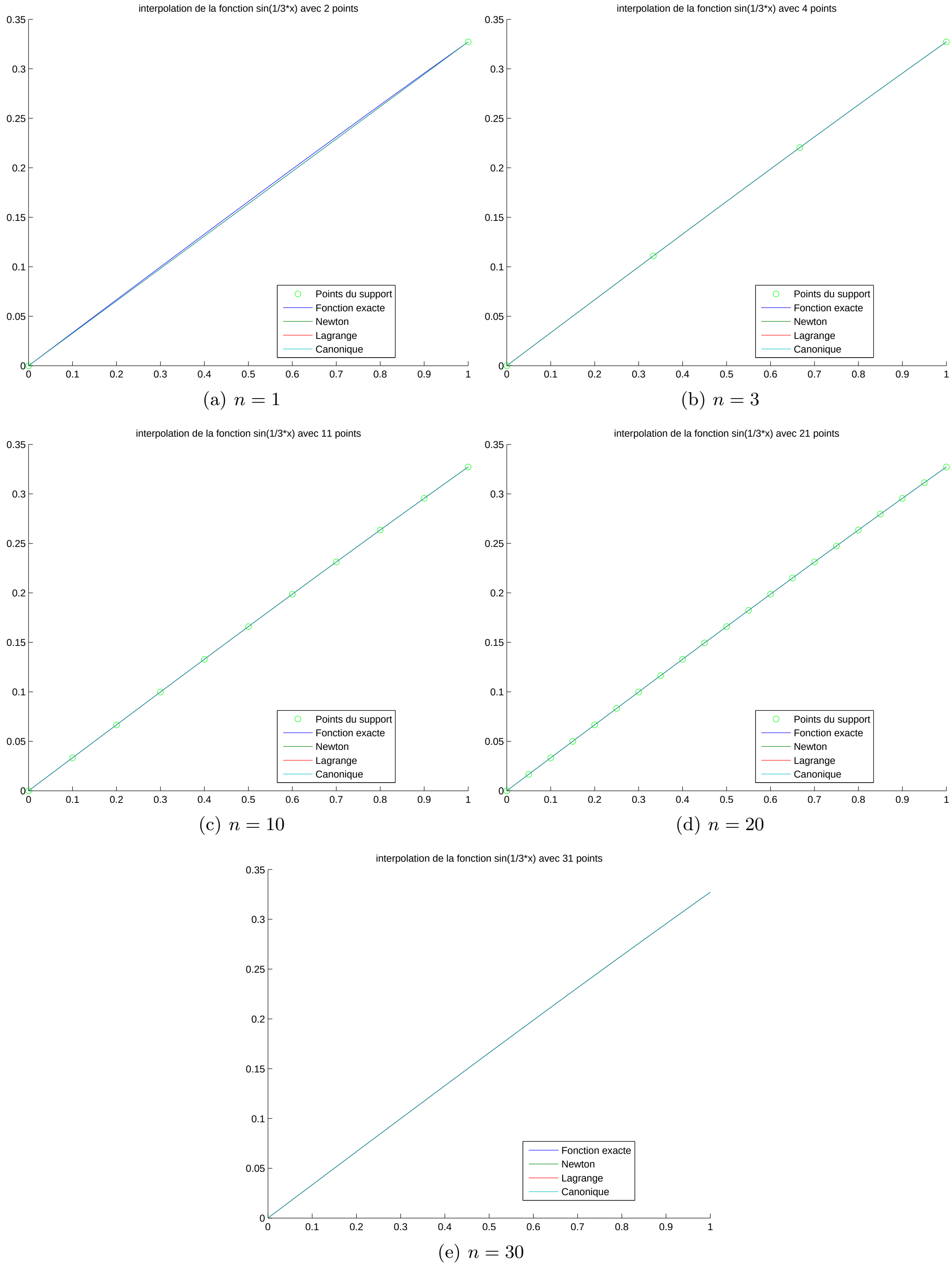
Enfin, on peut aussi tracer le logarithme en base 10 de l'erreur entre f et son interpolé en fonction de n comme le montre la figure B.4. On constate que celle-ci est minimale autour de la valeur $n_0 = 9$ et que les trois méthodes coïncident rigoureusement jusqu'à n_0. Ensuite, de $n_0 + 1$ à $n_1 = 25$, les deux méthodes Newton et canonique voient leur erreur légèrement remonter, en contradiction avec la théorie, à cause des arrondis de calculs. Il en est de même pour celle correspondant à la base Lagrange, avec une erreur un peu moins petite. Ensuite, au-delà de n_1, l'erreur en canonique augmente plus rapidement que les deux autres méthodes, qui se comportent mieux. Notons aussi la légère supériorité en terme d'erreur de la forme de Newton, qui sera donc à privilégier tout le temps, compte tenu de sa simplicité algorithmique.

Dans un second temps, on peut aussi refaire les mêmes calculs portant cette fois-ci sur la fonction g définie par (B.1b) on obtient un comportement similaire de l'erreur.

Ici, on constate que la méthode de la forme canonique se comporte beaucoup plus mal que dans le cas précédent. Voir la figure B.5. Dès la valeur de $n_0 = 5$, elle commence à ne plus fonctionner, alors que les deux autres se comportent bien ! Ensuite, les méthodes fondées sur Newton et Lagrange donnent encore de bons résultats, du même ordre, Newton se comportant un peu mieux que Lagrange.

On peut aussi tracer le logarithme en base 10 de l'erreur entre g et son interpolé en fonction de n comme le montre la figure B.6. Le comportement de l'erreur est identique à celui de la figure B.4, mis à part le fait que la méthode Lagrange a une erreur numérique qui apparaît pour des valeurs de n beaucoup plus petite que précédemment.

Finalement, retenons que la forme de Newton et l'évaluation par l'algorithme de Horner évoqués dans le point 1 page 9 est largement supérieure aux deux autres méthodes (Lagrange et base canonique) tant sur le plan algorithmique que numérique.



(a) $n = 1$

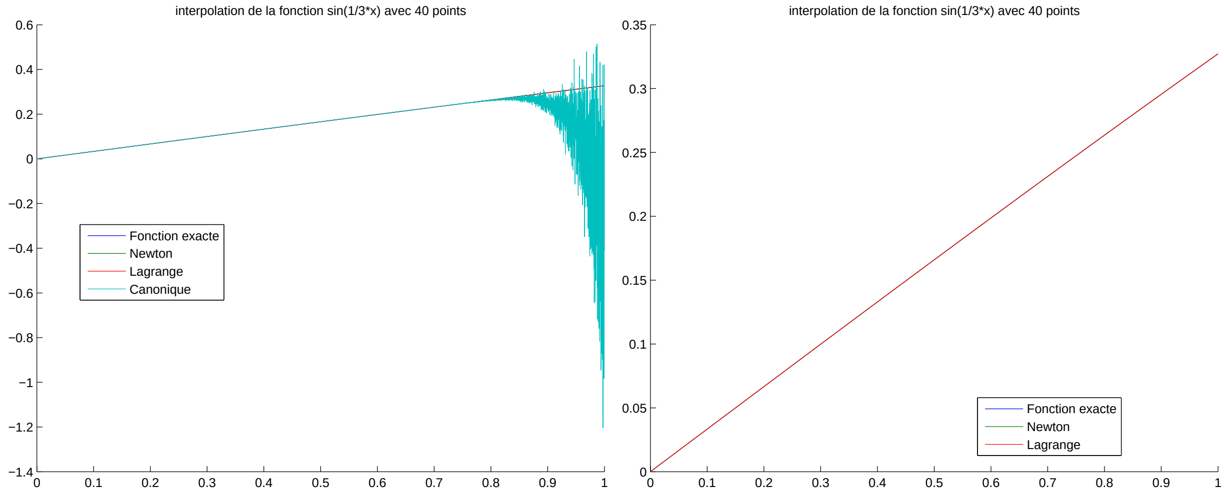
(b) $n = 3$

(c) $n = 10$

(d) $n = 20$

(e) $n = 30$

FIGURE B.1. La fonction f et son polynôme interpolateur p_n calculés de trois façons différentes.



(a) $n = 39$ (b) $n = 39$

FIGURE B.2. La fonction f et son polynôme interpolateur p_n calculés de deux façons différentes.

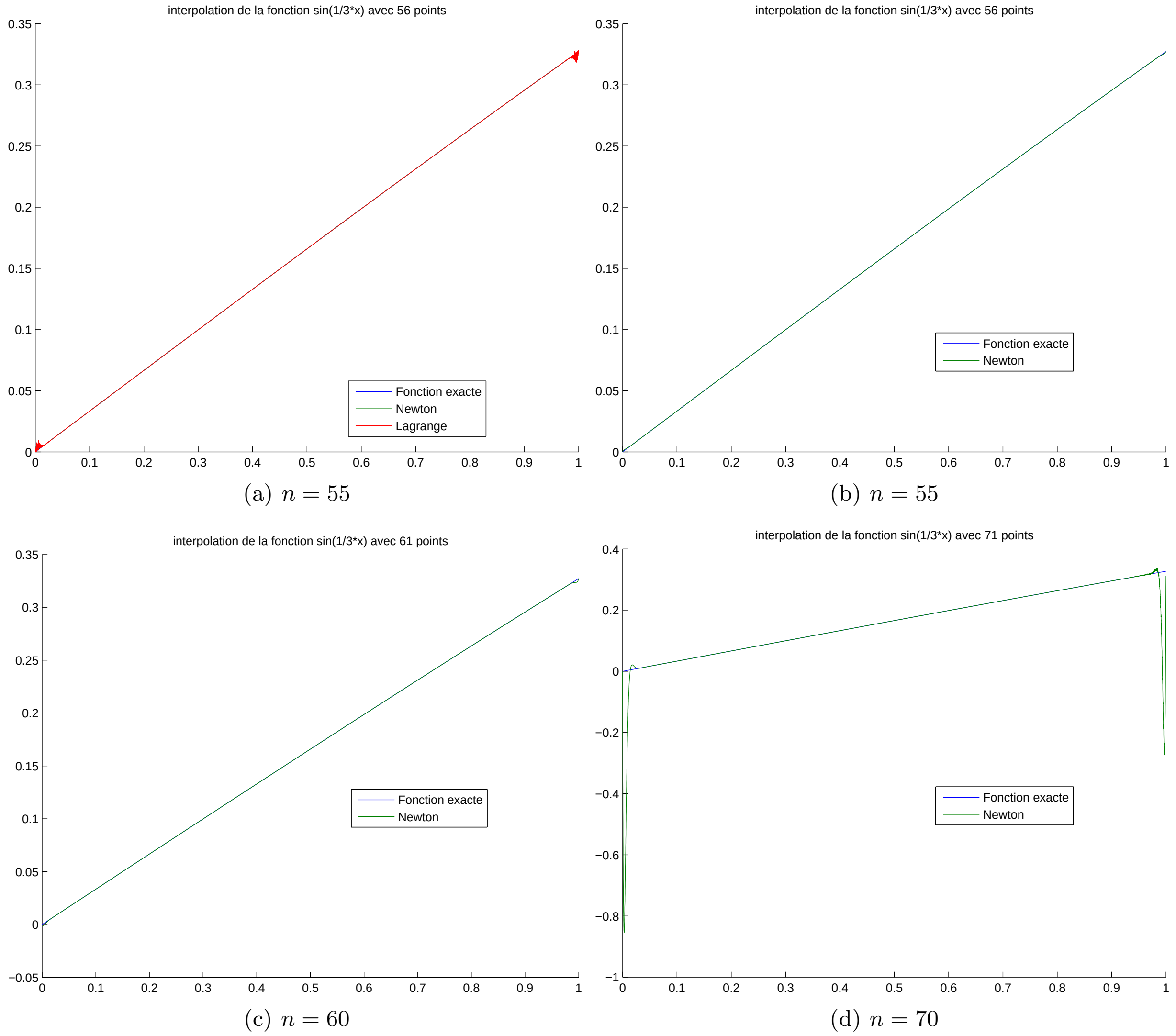


FIGURE B.3. La fonction f et son polynôme interpolateur p_n calculés de une ou deux façons différentes.

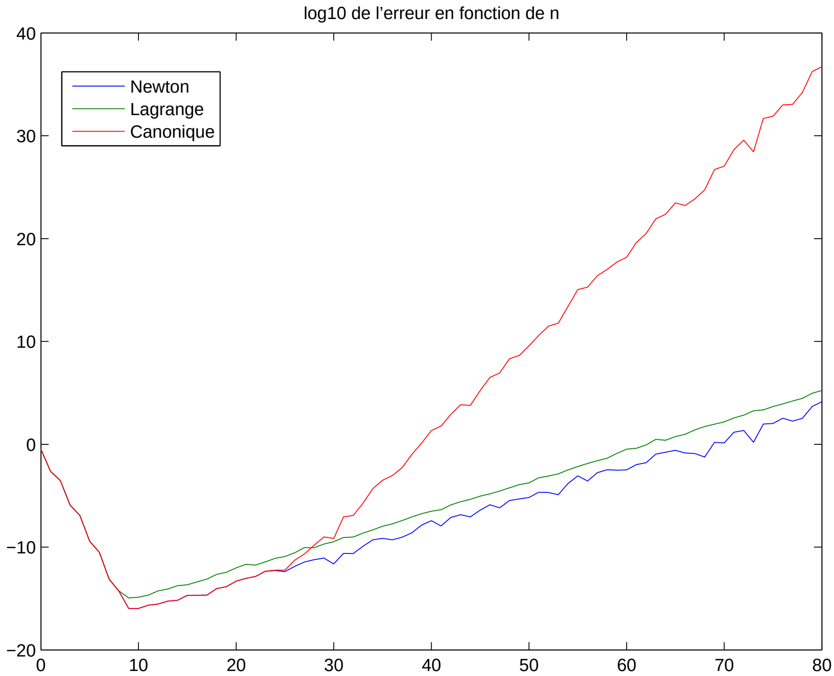
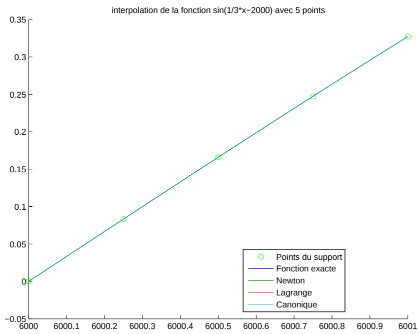
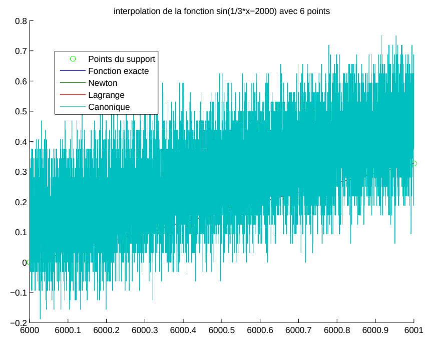


FIGURE B.4. Logarithme de l'erreur en base 10 entre f et son interpolée p_n.

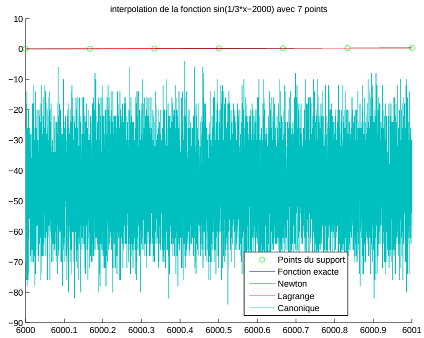
(a) $n = 1$



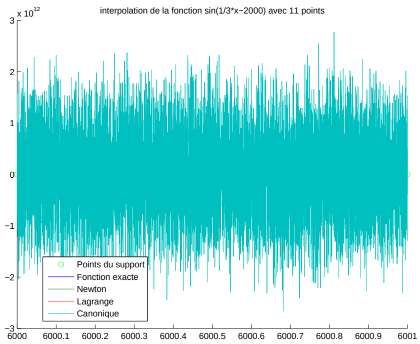
(b) $n = 4$



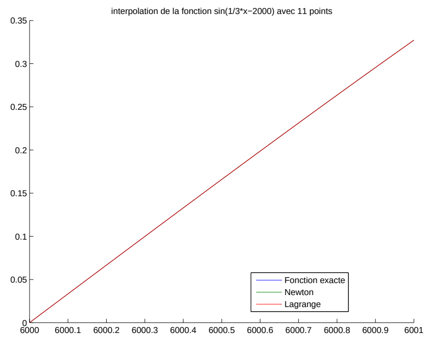
(c) $n = 5$



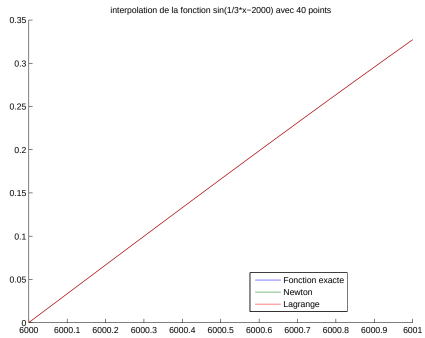
(d) $n = 6$



(e) $n = 10$



(f) $n = 10$



(g) $n = 39$

FIGURE B.5. La fonction g et son polynôme interpolateur p_n calculés de trois façons différentes.

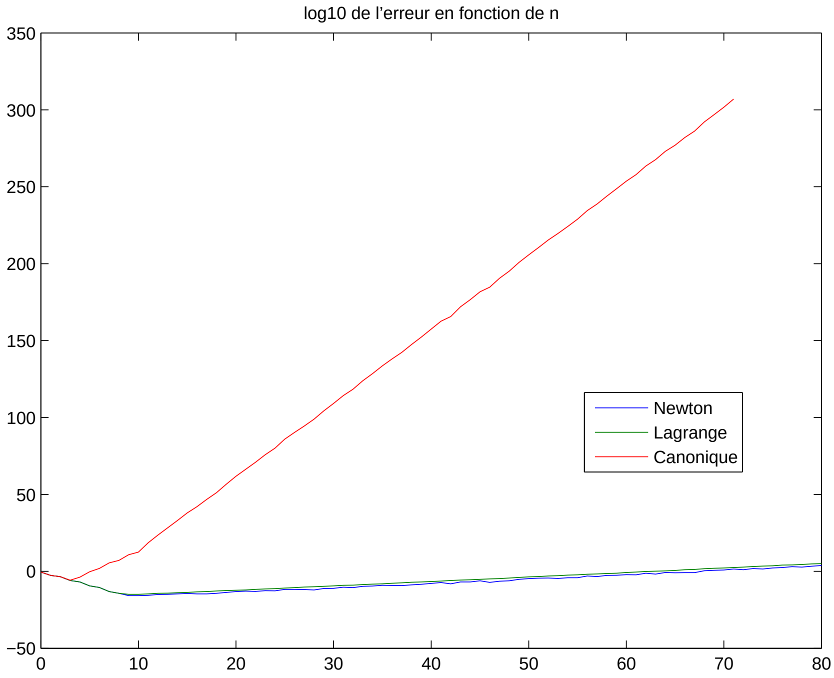


FIGURE B.6. Logarithme de l'erreur en base 10 entre g et son interpolée p_n.

Annexe C

Étude du majorant exact d'une dérivée quatrième

On pourra consulter et faire tourner la fonction matlab `corrige_majoration_fderivee4.m` disponible à l'url habituelle, qui fournit successivement tous les résultats de cette annexe.

On cherche à étudier les extrémas de la dérivée quatrième de la fonction définie par

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = e^{-x^2}, \tag{C.1}$$

donnée par (2.10). Il faut donc étudier la fonction donnée par (après division par 4) :

$$\forall x \in [0,1], \quad g(x) = e^{-x^2}\left(3 - 12\,x^2 + 4\,x^4\right). \tag{C.2}$$

(1) Si on utilise la fonction fournie sur le site habituelle `maxabsfun`, on tape

```
[Ms,M,Md]=maxabsfun(0,1,@(x)exp(-x.^2).*(3-12.*x.^2+4.*x.^4),[],1);
```

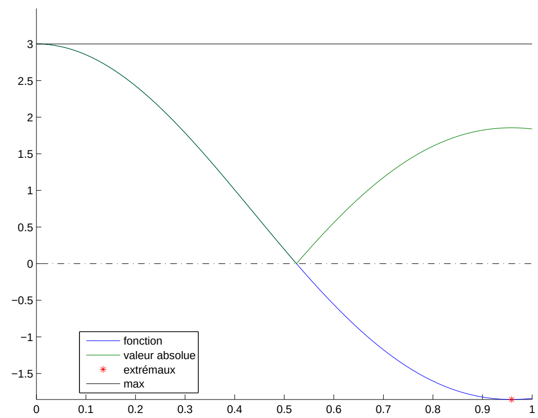


FIGURE C.1. Les fonctions g et $|g|$ pour g définie par (C.2).

On obtient la figure C.1, sur laquelle on constate que le maximum de la valeur absolue de g est donné par

$$M = 3. \tag{C.3}$$

Cette preuve n'en est pas une car cette observation n'est pas justifiée pour l'instant.

(2) Essayons de procéder comme dans la remarque 1.4 page 10 de l'exercice 1.5. De façon analoque à l'inégalité (1.36), on écrit grâce à (C.2) :

$$\forall x \in [0,1], \quad g(x) = e^{-x^2}\left(3 - 12\,x^2 + 4\,x^4\right),$$

dont on déduit comme dans (1.37) et (1.38) :

$$\forall x \in [0,1], \quad |g(x)| = \left|e^{-x^2}\right| |p(x)|,$$

avec

$$p(x) = 3 - 12\,x^2 + 4\,x^4, \tag{C.4}$$

et donc

$$\forall x \in [0,1], \quad |g(x)| \le |p(x)|\,.$$

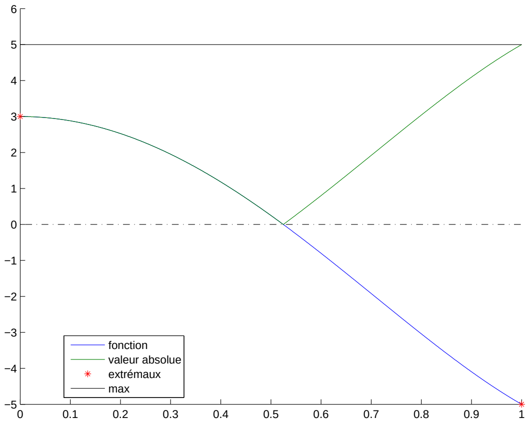


FIGURE C.2. Les fonctions p et $|p|$ pour p définie par (C.4).

En utilisant la fonction `maxabsfun`, on obtient la figure C.2, sur laquelle on constate que le maximum de la valeur absolue de p vaut 5, ce qui donnerait une majoration de $|g|$ donnée par

$$M = 20,$$

ce qui est trop grand par rapport à (C.3).

(3) Étudions la dérivée de g de façon plus rigoureuse que dans la question 1. Il n'est pas nécessaire d'étudier totalement la fonction g pour en donner les extrémas de la valeur absolue. Il suffit d'observer qu'une fonction dérivable sur un segment $[a,b]$ atteint ses bornes, soit aux bords a et b, soit en des points intérieurs à $]a,b[$ où la dérivée de cette fonction s'annulle. Ainsi, la valeur absolue maximale de cette fonction est la plus grande valeur de $|g|$ aux points a, b et auz zéros intérieur de la dérivée de cette fonction. Ce sont en fait, exactement les calculs que mènent la fonction `maxabsfun.m`. Dans la mesure où les résultats sont ici obtenus en symbolique, c'est-à-dire de façon excate, on peut donc affirmer *a posteriori* que les calculs de la question 1 sont exactement prouvés !

La dérivée de g vaut :

$$g'(x) = 2xe^{-x^2}\left(-15 + 20\,x^2 - 4\,x^4\right), \tag{C.5}$$

dont les *cinq* racines sont données brutalement par Matlab :

$$x_0 = 0\,; \tag{C.6a}$$

$$x_1 = -1/2\,\sqrt{10 - 2\,\sqrt{10}}\,; \tag{C.6b}$$

$$x_2 = 1/2\,\sqrt{10 - 2\,\sqrt{10}}\,; \tag{C.6c}$$

$$x_3 = -1/2\,\sqrt{10 + 2\,\sqrt{10}}\,; \tag{C.6d}$$

$$x_4 = 1/2\,\sqrt{10 + 2\,\sqrt{10}}, \tag{C.6e}$$

et dont les valeurs sont

$$x_0 = 0\,; \tag{C.7a}$$
$$x_1 = -0.9585724646138\,; \tag{C.7b}$$
$$x_2 = 0.9585724646138\,; \tag{C.7c}$$
$$x_3 = -2.0201828704561\,; \tag{C.7d}$$
$$x_4 = 2.0201828704561. \tag{C.7e}$$

La seule racine appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ est x_2. Les valeurs prises par g en ce point ces points et les bords 0 et 1 sont données par

$$\left\{3, -5\,e^{-1}, -4\,e^{-5/2+1/2\,\sqrt{10}}\left(-2+\sqrt{10}\right)\right\},$$

correspondant à

$$\{3.00000000000000, -1.83939720585721, -1.85487029414460\}.$$

La plus grande en valeur absolue est 3, ce qui prouve finalement (C.3).

(4) On peut préciser cela en remarquant que le polynôme qui intervient dans l'expression (C.5) de la dérivée de g est un polynôme bicarré correspondant à

$$q(x) = -15 + 20\,x - 4\,x^2,$$

dont les *deux* racines sont données par :

$$y_0 = 5/2 - 1/2\,\sqrt{10}\,; \tag{C.8a}$$
$$y_1 = 5/2 + 1/2\,\sqrt{10}, \tag{C.8b}$$

et dont les valeurs sont

$$y_0 = 0.9188611699158\,; \tag{C.9a}$$
$$y_1 = 4.0811388300842. \tag{C.9b}$$

La seule racine appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ est y_0. En reprenant la racine carrée de ce nombre, on retrouve (C.6) et (C.7) et on conclue comme précédemment.

Annexe D

Étude de divergence d'une méthode de point fixe

En complément de la correction de la question 3 de l'exercice 3.2 page 33. Nous présentons la preuve manuelle de la divergence du point fixe pour la fonction $g = 1/2\,x^2 - 3/2$ sur l'intervalle $[2, 4]$.

Montrons en fait que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la suite (x_n) du point fixe ne converge pas vers 3, sauf si $x_0 = 3$ ou si $x_0 = -3$.

Étudions plusieurs cas.

(1) Si on suppose que

$$x_0 = -1 \text{ ou } x_0 = 3, \tag{D.1}$$

il est évident que la suite est constante égale à x_0 dans ce cas, car x_0 est l'un des points fixes de g.

(2) On suppose que

$$x_0 > 3. \tag{D.2}$$

Remarquons que, la fonction g étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$g\left(]3, \infty[\right) =]g(3), g(+\infty)] =]3, +\infty[\,.$$

Ainsi, d'après (D.2), alors, $x_1 = g(x_0) > 3$ et par récurrence,

$$x_0 > 3 \Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n > 3)\,. \tag{D.3}$$

On a ensuite

$$g(x) - x = 1/2\,x^2 - 3/2 - x,$$

polynôme du second degrés dont les solutions sont les points fixe de g : 3 et -1, de coefficient dominant $1/2$. Ainsi, on a

$$\forall x \in]-1, 3[\,, \quad g(x) < x, \tag{D.4}$$

$$\forall x \in]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[, \quad g(x) > x. \tag{D.5}$$

Dans (D.5), on peut choisir $x = x_n$, grâce à (D.3) et on a donc, si $x_0 > 3$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g(x_n) > x_n,$$

soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} > x_n.$$

La suite est donc strictement croissante et tend soit vers l, qui vérifie $g(l) = l$, soit $l = -1$ ou $l = 3$, ce qui est impossible, soit tend vers l'infini :

$$\forall x_0 > 3, \lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty. \tag{D.6}$$

(3) Si on suppose que

$$x_0 = -3, \tag{D.7}$$

on a $x_1 = g(-3) = g(3) = 3$ et on est ramené au cas 1.

(4) On suppose que

$$x_0 < -3. \tag{D.8}$$

On remarque que

$$\forall x < -3, \quad g(x) > 3. \tag{D.9}$$

Ainsi, d'après (D.8), on a

$$x_1 > 3. \tag{D.10}$$

et, quitte à changer la valeur de x_0, on est ramené au cas 2.

(5) On suppose enfin que

$$x_0 \in]-3, 3[. \tag{D.11}$$

Remarquons que l'intervalle $]-3,3[$ est g stable, puisque $g(0) = -3/2$. Ainsi,

$$\text{pour tout } x_0 \in]-3,3[, \text{ on a, pour tout } n,\ x_n \in]-3,3[. \tag{D.12}$$

Remarquons aussi que

$$x \in]-3,-1[\Longrightarrow g(x) \in]-1,3[, \tag{D.13a}$$
$$x = -1 \Longrightarrow g(x) = -1, \tag{D.13b}$$
$$x \in]-1,1[\Longrightarrow g(x) \in]-3/2,-1[, \tag{D.13c}$$
$$x = 1 \Longrightarrow g(x) = -1, \tag{D.13d}$$
$$x \in]1,3[\Longrightarrow g(x) \in]-1,3[. \tag{D.13e}$$

De tout cela, on déduit que

$$x_0 \in]-3,-1[\Longrightarrow x_1 \in]-1,3[, \tag{D.14a}$$
$$x_0 = -1 \Longrightarrow x_1 = -1, \tag{D.14b}$$
$$x_0 \in]-1,1[\Longrightarrow x_1 \in]-3/2,-1[\Longrightarrow x_2 \in]-1,3[, \tag{D.14c}$$
$$x_0 = 1 \Longrightarrow x_1 = -1, \tag{D.14d}$$
$$x_0 \in]1,3[\Longrightarrow x_1 \in]-1,3[. \tag{D.14e}$$

Si la suite prend la valeur -1, point fixe de g, elle devient stationnaire donc convergente vers -1. D'après (D.14), on constate qu'à part le cas stationnaire évoqué, x_1 ou x_2 retombe dans $]-1,3[$. Donc quitte à changer la valeur de x_0, on peut supposer que

$$x_0 \in]-1,3[. \tag{D.15}$$

D'après (D.4) et (D.5), on a aussi

$$\text{si } x_n \in]-1,3[, \text{ alors } x_{n+1} < x_n, \tag{D.16a}$$
$$\text{si } x_n \in]-3,-1[, \text{ alors } x_{n+1} > x_n. \tag{D.16b}$$

Ainsi, à partir de (D.15), on a de nouveau les différents cas suivants :

$$x_0 \in]-1,1[\Longrightarrow x_1 \in]-3/2,-1[\text{ et } x_1 < x_0, \tag{D.17a}$$
$$x_0 = 1 \Longrightarrow x_1 = -1, \tag{D.17b}$$
$$x_0 \in]1,3[\Longrightarrow x_1 \in]-1,3] \text{ et } x_1 < x_0. \tag{D.17c}$$

Si la suite prend la valeur -1, point fixe de g, elle devient stationnaire donc convergente vers -1. Par ailleurs, dans le cas (D.17a), on a

$$x_2 > x_1. \tag{D.18a}$$

dans le cas (D.17c), on a

$$x_2 < x_1. \tag{D.18b}$$

On recommence ensuite successivement. Tant qu'on reste dans l'intervalle $]-1,3]$, on constate donc que

$$\forall k \in \{1,...,p\}, \quad x_{k-1} > x_k. \tag{D.19}$$

Au contraire, si on passe dans l'intervalle $]-3/2,-1[$, on a $x_p < x_{p-1}$. On est certain que pour un rang n, on ait $x_p \geq x_{p-1}$, sinon, on aurait (D.19) pour tout p, la suite (x_n) serait décroissante et minorée et convergerait donc vers l'un des points fixes de g. Ici, cela ne peut être que -1. On serait de nouveau, pour un entier n assez grand, suffisamment proche de -1, pour que x_n soit dans $]-1,1[$ et non dans $]1,3[$. D'après (D.17a) et (D.18a) au rang n, on aurait donc $x_{n+1} > x_n$, ce qui n'est pas possible. Bref, on considère le plus grand entier $q \geq 2$ tel que $x_q < x_{q-1}$. On a donc

$$x_q < x_{q-1} < ... < x_1 < x_0. \tag{D.20}$$

et

$$x_{q+1} \geq x_q. \tag{D.21}$$

S'il y égalité, on est donc de nouveau en -1 et la suite devient stationnaire et converge vers -1. Reste donc à étudier le cas où

$$x_{q+1} > x_q. \tag{D.22}$$

On reprend alors (D.17) et (D.18) au rang $q-1$:

$$x_{q-1} \in]-1,1[\Longrightarrow x_q \in]-3/2,-1[\text{ et } x_q < x_{q-1}, \quad x_{q+1} > x_q, \tag{D.23a}$$

$$x_{q-1} = 1 \Longrightarrow x_q = -1, \tag{D.23b}$$

$$x_{q-1} \in]1,3[\Longrightarrow x_q \in]-1,3] \text{ et } x_q < x_{q-1}, \quad x_{q+1} < x_q. \tag{D.23c}$$

Le cas (D.23c) est impossible d'après (D.21) et ne reste donc plus que l'alternative :

$$x_{q-1} \in]-1,1[\Longrightarrow x_q \in]-3/2,-1[\text{ et } x_q < x_{q-1}, \quad x_{q+1} > x_q, \tag{D.24a}$$

$$x_{q-1} = 1 \Longrightarrow x_q = -1. \tag{D.24b}$$

On met de nouveau le cas stationnaire (D.24b) à part. De nouveau x_{q+1} est dans $]-1,3[$. Il n'est pas possible que $x_{q+1} > 1$. Sinon, on aurait $g(x_q) > 1$, ce qui impliquerait $x_q > \alpha$ ou $x_q < -\alpha$ où α est le réel positif tel que $g(\alpha) = 1$, c'est-à-dire $\alpha = \sqrt{5}$. On aurait donc, en particulier car $\alpha < 3/2$, $x_q < -3/2$ ou $x_q > 3/2$, ce qui n'est pas possible d'après (D.24a). Ainsi, $x_{q+1} \in]-1,1[$. On a donc montré

$$x_{q+1} \in]-1,1[. \tag{D.25}$$

ce qui est exactement (D.24a) à l'ordre $q+1$. En procédant par récurrence, on peut donc montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$x_{q-1+2p} \in]-1,1[, \tag{D.26a}$$

$$x_{q-2p} \in]-3/2,-1[. \tag{D.26b}$$

Étudions maintenant les fonctions suivantes :

$$g^2(x) = g(g(x)) = 1/8\,x^4 - 3/4\,x^2 - 3/8, \tag{D.27a}$$

$$(g^2)'(x) = 1/2\,x\left(x^2-3\right), \tag{D.27b}$$

$$(g^2)'(x) - 1 = 1/2\,x^3 - 3/2\,x - 1. \tag{D.27c}$$

La fonction $g^2(x)$ est représentée sur la figure D.1. On cherche sa position par rapport à la droite $y = x$. On étudie donc la fonction $g^2(x) - x$ représentée en figure D.2. De façon classique, on étudie la dérivée de $g^2(x) - x$, donnée par (D.27c). On note $h = (g^2)'(x) - 1$. On détermine aisément les zéros de

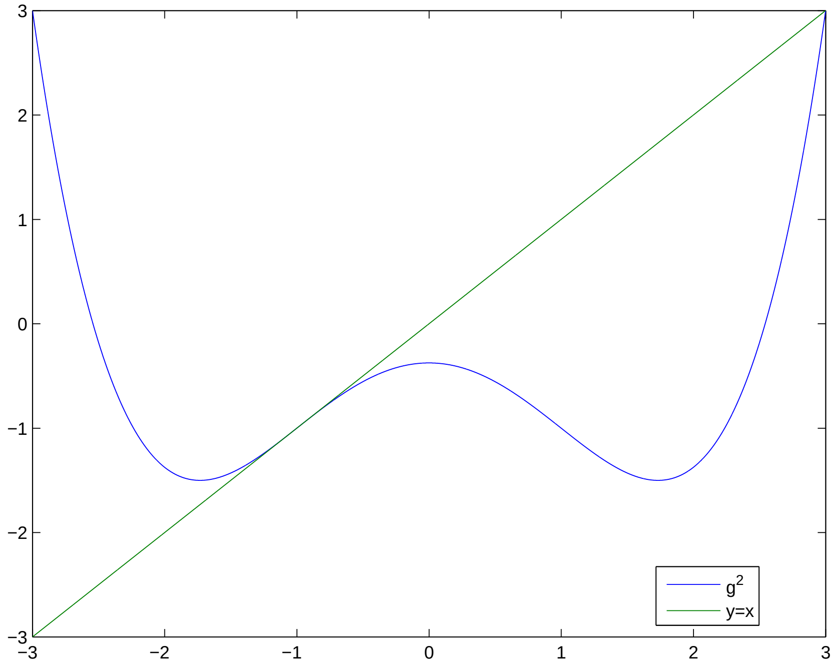


FIGURE D.1. La fonction g^2 associée à g défini par (3.5).

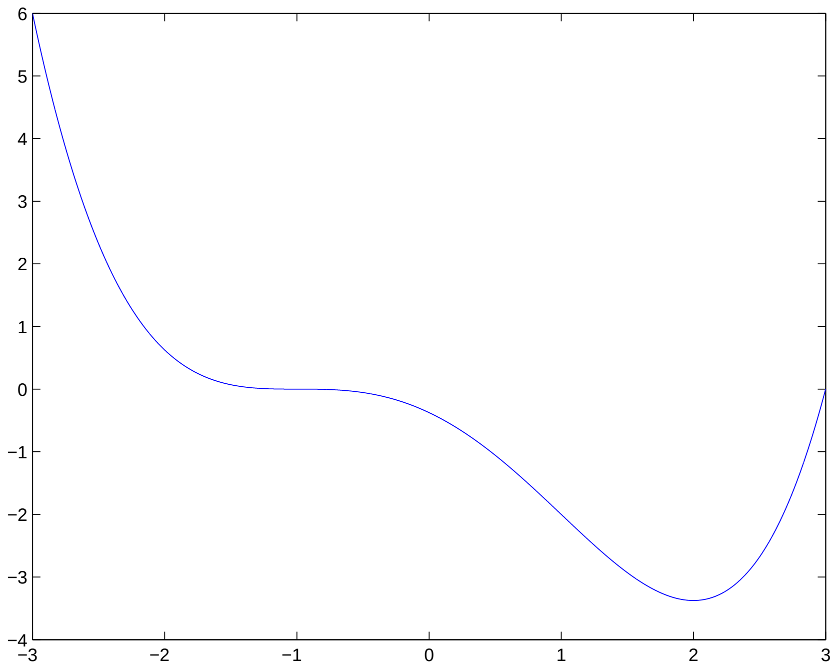


FIGURE D.2. La fonction $g^2(x) - x = 1/8\, x^4 - 3/4\, x^2 - 3/8 - x$.

h : -1 et 2. On constate que -1 est une racine double de h, puisque $h\,(-1) = 0$ et $h'\,(-1) = 0$. Ainsi h est strictement négative sur $[-3, -1[\cup]-1, 2]$, nulle en -1 et strictement positive sur $[2, 3]$. Puisque

$h = \left(g^2(x) - x\right)'$, on en déduit que $g^2(x) - x$ est strictement décroissante sur $[-3, 2]$ et strictement croissante sur $[2, 3]$. On connaît aussi, en $x = -1$,

$$g^2(x) - x = 0,$$

en $x = 2$

$$,g^2(x) - x = -\frac{27}{8},$$

et en $x = 3$,

$$g^2(x) - x = 0.$$

On en déduit que $g^2(x) - x$ est strictement positive sur $[-3, -1[$, nulle en -1, strictement négative sur $]-1, 3[$ et nulle en 3, autrement dit

$$\forall x \in [-3, -1[, \quad g^2(x) > x, \tag{D.28a}$$

$$\forall x \in]-1, 3[, \quad g^2(x) < x. \tag{D.28b}$$

Si on applique (D.28) à $x = x_{2n}$, on remarque que $x_{2n+2} = g^2(x_{2n})$ et donc, pour tout n

$$x_{2n} \in [-3, -1[\Longrightarrow x_{2n+2} > x_{2n}, \tag{D.29a}$$

$$x_{2n} \in]-1, 3[\Longrightarrow x_{2n+2} < x_{2n}. \tag{D.29b}$$

Si de même, on applique (D.28) à $x = x_{2n+1}$, on a : Si on applique (D.28) à $x = x_{2n}$, on remarque que $x_{2n+2} = g^2(x_{2n})$ et donc, pour tout n

$$x_{2n-1} \in [-3, -1[\Longrightarrow x_{2n+1} > x_{2n-1}, \tag{D.30a}$$

$$x_{2n+1} \in]-1, 3[\Longrightarrow x_{2n+1} < x_{2n-1}. \tag{D.30b}$$

Il ne reste plus qu'à conclure en utilisant (D.26). Par exemple si q est impair, $q - 1$ est pair et on a donc, si k est assez grand

$$x_{2k} \in] - 1, 1[,$$

et donc, d'après (D.29a),

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq N, \quad x_{2k+2} < x_{2k}. \tag{D.31}$$

De même, on a aussi si k est assez grand

$$x_{2k+1} \in] - 3/2, -1[,$$

et donc, d'après (D.30a),

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq N, \quad x_{2k+1} > x_{2k-1}. \tag{D.32}$$

Si q est pair, on montre de la même façon que

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq N, \quad x_{2k+2} > x_{2k}, \tag{D.33a}$$

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq N, \quad x_{2k+1} < x_{2k-1}. \tag{D.33b}$$

Dans les deux cas, la suite (x_{2n}) est donc monotone et dans un borné ($[-3, 3]$) donc convergente. Il est de même pour la suite (x_{2n+1}). Enfin, on conclue en remarquant que $x_{2n+2} = g^2(x_{2n})$ et que la limite l de x_{2n} est donc un point fixe de g^2, qui d'après ce qu'on a vu ne peut être que -1 ou 3. D'après (D.26), la convergence vers 3 est impossible et donc (x_{2n}) converge vers -1. Il en est de même de (x_{2n+1}). Les deux suites extraites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) convergent donc toutes les deux vers -1 et il en est de même pour (x_n). Ainsi h est positive ou nulle à l'extérieur de ces racines et négative ou nulle entre ces racines. Puisque $h = \left(g^2(x) - x\right)'$, on en déduit que $g^2(x) - x$ est strictement croissante sur $[-3, -1]$ et sur $[-1, 3]$ et strictement décroissante sur $[-1, 2]$. Dans ce dernier cas, on a donc montré que la suite convergeait (en étant éventuellement stationnaire) vers -1.

Dans tous les cas, on a donc montré que la suite ne convergeait jamais vers 3, sauf si $x_0 = 3$ ou $x_0 = -3$.

n	x_n
5000	-1.0198650041406
5001	-0.9799376866647
5002	-1.0198610651272
5003	-0.9799417039188
5004	-1.0198571284603
5005	-0.9799457187643
5006	-1.0198531941377
5007	-0.9799497312035
5008	-1.0198492621570
5009	-0.9799537412389
5010	-1.0198453325160
9991	-0.9858147386628
9992	-1.0140846505176
9993	-0.9858161607923
9994	-1.0140832485604
9995	-0.9858175824946
9996	-1.0140818470222
9997	-0.9858190037700
9998	-1.0140804459030
9999	-0.9858204246186
10000	-1.0140790452024
10001	-0.9858218450407

TABLE D.1. Valeurs de n et des x_n pour les itérés du point fixe pour g définie par (3.5).

Remarquons que la convergence de la suite est très lente, comme le montre la figure D.3 et le tableau D.1 où l'on a choisit $x_0 = 1/2$ et $n = 10000$.

Cela s'explique par le fait que $g'(-1) = 1$ et que les majorations habituelles du cours ne fonctionnent plus ici.

Concluons par quelques autres simulations illustrant les différents cas vus.

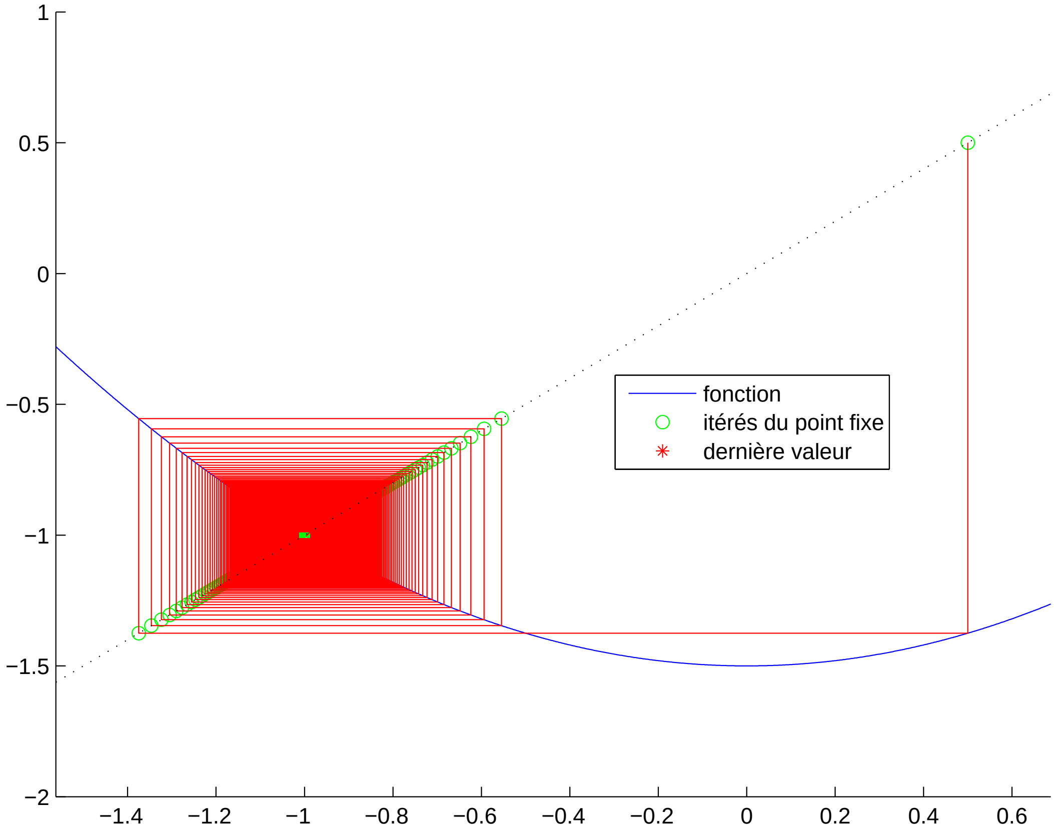


FIGURE D.3. Les itérés du point fixe pour g défini par (3.5).

Nous choisirons successivement x_0 dans

$$x_1 = 3 = 3\,; \tag{D.34a}$$

$$x_2 = 5/2 = 2.5000000000000\,; \tag{D.34b}$$

$$x_3 = 2 = 2\,; \tag{D.34c}$$

$$x_4 = \sqrt{5} = 2.2360679774998\,; \tag{D.34d}$$

$$x_5 = 6/5 = 1.2000000000000\,; \tag{D.34e}$$

$$x_6 = \frac{7}{10} = 0.7000000000000\,; \tag{D.34f}$$

$$x_7 = -4/5 = -0.8000000000000\,; \tag{D.34g}$$

$$x_8 = -6/5 = -1.2000000000000\,; \tag{D.34h}$$

$$x_9 = -5/2 = -2.5000000000000\,; \tag{D.34i}$$

$$x_{10} = -\frac{29}{10} = -2.9000000000000. \tag{D.34j}$$

Voir la figure D.4.

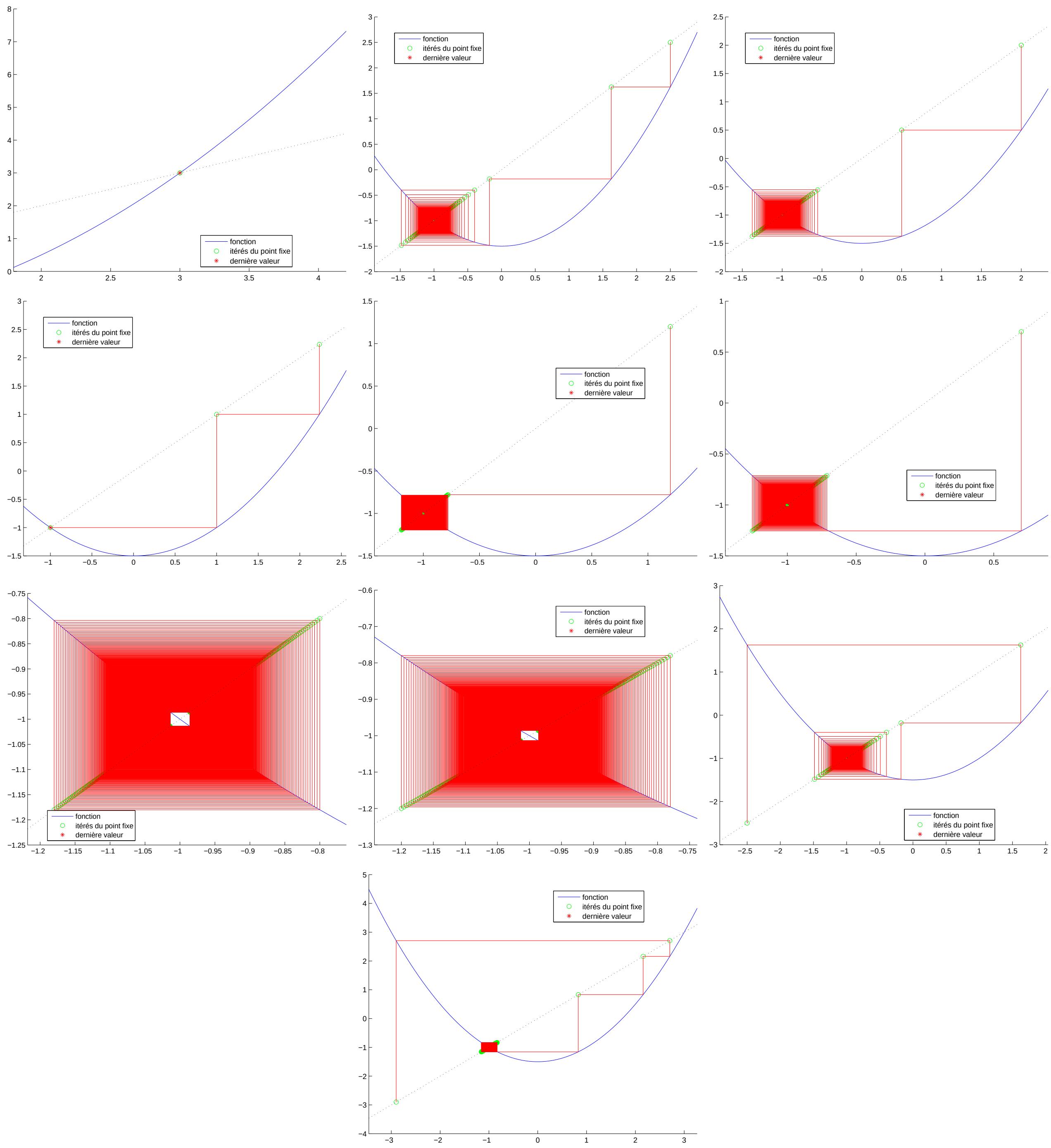


FIGURE D.4. . Les itérés du point fixe pour g défini par (3.5) pour différentes valeurs de x_0 données par (D.34).

Bibliographie

[Bas19] J. Bastien. *Outils Mathématiques pour l'Ingénieur 3*. Notes de cours de l'UV OMI3 de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`. 2019. 229 pages.

[BM03] J. Bastien et J.-N. Martin. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4 ième étage). Voir `https://www.dunod.com/sciences-techniques/introduction-analyse-numerique-applications-sous-matlab`. Paris : Dunod, 2003. 392 pages.

[Mon90] J.-M. Monier. *Analyse, tome 1 (mathématiques supérieures)*. Dunod, 1990.