Informatique 3A MNBif — Automne 2018

Examen du 12 Décembre 2018

Durée : 2 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐
Un formulaire manuscrit d'une feuille A4 recto-verso

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐
calculatrices scientifiques tout type

Exercice 1.
On connaît les valeurs d'une fonction g aux points $x_0 = -1$, $x_1 = 3$ et $x_2 = 5$:

$$g(x_0) = 0, \quad g(x_1) = 1, \quad g(x_2) = 4.$$

(1) Construire le polynôme de degré au plus 2 (noté $\Pi_2 g$), interpolant la fonction g aux nœuds x_0, x_1 et x_2.

(2) Pour $\alpha = 1$, donner une valeur approchée de $g(\alpha)$.

Exercice 2.
Soit f, une fonction continue sur l'intervalle $[-1, 1]$. On considère la formule de quadrature

$$Q(f) = W_0 f(x_0) + W_1 f(x_1). \tag{1}$$

où les points x_0 et x_1 sont donnés par

$$x_0 = -1/3\sqrt{3}, \tag{2}$$

$$x_1 = 1/3\sqrt{3}, \tag{3}$$

pour approcher numériquement l'intégrale

$$\mathcal{I}(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx. \tag{4}$$

(1) (a) Trouver les poids W_0 et W_1, pour que la formule (1) intègre exactement les polynômes jusqu'au degré 1.

(b) On propose dans cette question de procéder autrement pour éviter le calcul de l'inverse d'une matrice.

(i) Calculer $\Pi_1(f)$, le polynôme d'interpolation de f sur le support $\{x_0, x_1\}$ en fonction de $f(x_0)$ et $f(x_1)$.

(ii) Calculer

$$\mathcal{I}\big(\Pi_1(f)\big) = \int_{-1}^{1} \Pi_1(f)(x)dx, \tag{5}$$

en fonction de $f(x_0)$ et $f(x_1)$.

(iii) En justifiant et en utilisant l'égalité de $Q\left(\Pi_1(f)\right)$ et de $\mathcal{I}\big(\Pi_1(f)\big)$, en déduire de nouveau l'expression des poids W_0 et W_1.

(2) Calculer le degré d'exactitude de cette formule.

(3) Utiliser la formule mise au point pour approcher l'intégrale donnée par

$$\mathcal{I}(f) = \int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx. \tag{6}$$

Exercice 3.
On étudie l'équation différentielle

$$\forall t \in [0,T], \quad y'(t) = \sin(t) + t^2 y(t)^2, \tag{7a}$$

$$y(0) = 0.2, \tag{7b}$$

avec $T = 1$. On pose, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $h = T/N$ et, pour tout $n \in \{0, ..., N\}$, $t_n = hn$. On choisit $N = 3$. Déterminer y_n, les approximations de $y(t_n)$, pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$, avec le schéma d'Euler progressif (dit aussi d'Euler explicite) et de Runge-Kutta d'ordre 2 pour le problème (7).

Exercice 4.
Résoudre le système linéaire suivant par une méthode d'élimination de Gauss avec pivotage global (total) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.
Soit la fonction g définie par

$$\forall x \in I = [0,1], \quad g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, 1/2], \\ 2(1-x), & \text{si } x \in [1/2, 1]. \end{cases} \tag{8}$$

(1) (a) Montrer que les points fixes de g sont 0 et 2/3.

(b) Montrer que I est g-stable (i.e., si $x \in I$ alors $g(x) \in I$).

(c) Que peut-on en déduire sur la suite de la méthode du point fixe définie par $x_{n+1} = g(x_n)$?

(d) Quelles sont les seules limites possibles de cette suite ?

(2) (a) Est-ce que l'on peut affirmer que l'hypothèse suivante

$$\text{il existe un réel } k \text{ de } [0,1[\text{ tel que } \forall x \in I, \quad \left|g'(x)\right| \leq k \tag{9}$$

est vérifiée ?

(b) Peut-on affirmer que la méthode du point fixe converge ?

(3) (a) Est-ce que l'on peut affirmer que l'hypothèse (10c) de la proposition 1 (rappelée page 3) est vérifiée ?

(b) Peut-on affirmer que la méthode du point fixe ne converge pas ?

(4) (a) Calculer les 6 premières valeurs de la suite x_n du point fixe pour $x_0 = 1/24$. On s'efforcera de calculer les différentes valeurs de x_n sous forme de fraction. On pourra faire un petit graphique.

Est-ce que dans ce cas, la suite du point fixe converge ?

(b) Calculer les 5 premières valeurs de la suite x_n du point fixe pour $x_0 = 1/7$. On s'efforcera de calculer les différentes valeurs de x_n sous forme de fraction. On pourra faire un petit graphique.

Est-ce que dans ce cas, la suite du point fixe converge ?

(c) *Question facultative*

(i) Calculer les 9 premières valeurs de la suite x_n du point fixe pour $x_0 = 1/4\,\pi$. Avec du courage, on pourra déterminer x_n sous la forme $a_n + \pi b_n$ où a_n et b_n sont des entiers (pour $n \geq 2$).

(ii) Que remarquez-vous ?

Annexe A. Un rappel théorique

Proposition 1 (condition suffisante de divergence de la méthode du point fixe)**.** *Supposons qu'il existe un intervalle $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$ tel que $r \in I$ et sur lequel g vérifie les trois hypothèses suivantes :*

$$g \text{ est définie sur } I, \tag{10a}$$

$$\text{pour tout } x \notin I, \text{ si } g(x) \text{ est défini, il n'appartient pas à } I, \tag{10b}$$

$$\text{il existe un réel } k > 1 \text{ tel que } \forall x \in I, \quad |g'(x)| \geq k. \tag{10c}$$

Alors, pour tout x_0 dans $I \setminus \{r\}$, la méthode du point fixe ne converge pas.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`