Examen du 08 Janvier 2020

Durée : 2 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐
Un formulaire manuscrit d'une feuille A4 recto-verso

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐
Tout type

Attention :
Ce sujet est long et les exercices sont classés par ordre de difficulté croissante. La dernière partie de l'exercice 4, à partir de la page 3 est longue mais facultative. Enfin, n'hésitez pas à admettre certains résultats et passer à la suite !

Exercice 1.
Résoudre le système linéaire suivant par une méthode d'élimination de Gauss avec pivotage partiel :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.
On cherche à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\forall t \in \left[e^{-e}, e^{1/e}\right[, \quad y'(t) = \frac{y^2(t)}{t(1 - y(t)\ln(t))}, \tag{1a}$$

$$y(1) = \xi_0 = 1. \tag{1b}$$

(1) On se place tout d'abord sur l'intervalle $[1, e^{1/e}[$. On pose $h = 0.01$. Déterminer les approximations y_0, y_1, y_2 et y_3 de la solution exacte aux instants $t_0 = 1$, $t_1 = 1 + h$, $t_2 = 1 + 2h$, et $t_3 = 1 + 3h$, en utilisant le schéma d'Euler explicite.

Malgré le fait qu'à la différence du cours, t_0 n'est pas nul, la définition du schéma d'Euler explicite est la même qu'en cours !

(2) (a) On se place maintenant sur l'intervalle $[e^{-e}, 1]$. Serait-ce possible d'utiliser le schéma d'Euler explicite pour déterminer les approximations y_0, y_{-1}, y_{-2} et y_{-3} de la solution exacte aux instants $t_0 = 1$, $t_{-1} = 1 - h$, $t_{-2} = 1 - 2h$, et $t_{-3} = 1 - 3h$?

(b) Déterminer numériquement ces valeurs !

Exercice 3.
Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Considérons $n = 1$ et le support d'interpolation à 2 points, défini par

$$x_0 = a, \quad x_1 = b. \tag{2}$$

Soit f, une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. On considère la formule de quadrature

$$Q(f) = W_0 f(x_0) + W_1 f(x_1) \tag{3}$$

pour approcher numériquement l'intégrale

$$\mathcal{I}(f) = \int_a^b f(x)dx. \tag{4}$$

(1) (a) Montrer que le degré d'exactitude de la formule de quadrature Q est *supérieur ou égal* à l'entier n ssi

$$W_0 = \int_a^b l_0(x)dx, \quad W_1 = \int_a^b l_1(x)dx, \tag{5}$$

où l_0 et l_1 sont les polynômes de Lagrange sur le support $\{x_0, x_1\}$.

(b) Déterminer les polynômes de Lagrange, en supposant, pour simplifier que

$$a = 0, \quad b = 1. \tag{6}$$

(c) On suppose que le degré d'exactitude de la formule de quadrature est au moins n. En déduire la valeur des poids W_0 et W_1, toujours sous l'hypothèse (6).

(d) *Pour toute la suite, on admettra*, que sans l'hypothèse (6), les poids W_0 et W_1 sont donnés par

$$W_0 = (b-a)\widetilde{W_0}, \quad W_1 = (b-a)\widetilde{W_1}, \tag{7}$$

où les poids $\widetilde{W_0}$ et $\widetilde{W_1}$ sont ceux déterminés dans la question 1c, sous l'hypothèse (6).
Quelle formule du cours reconnaissez-vous ?

(2) (a) La formule de quadrature Q étudiée peut-elle être de degré d'exactitude strictement plus grand que n ? Déterminer dans ce cas le degré $r \in \mathbb{N}$ d'exactitude.

(b) (i) *On admet* que si le degré d'exactitude de la formule de quadrature est égal à r, alors, on a :

Il existe $\alpha \neq 0$ tel que, pour toute fonction $f \in C^{r+1}[a, b]$,

$$\mathcal{I}(f) - Q(f) = \alpha(b-a)^{r+2} f^{(r+1)}(\xi), \text{ où } \xi \in [a, b]. \tag{8}$$

Comment ce résultat et les calculs d'ordre de la question 2a permettent-ils de déterminer la constante α de ce résultat ? On utilisera la formule (8) pour une fonction f judicieusement choisie.

(ii) Grâce à cela retrouver le résultat du cours sur l'erreur commise dans la méthode élémentaire du trapèze.

Exercice 4.

(1) On considère la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x}. \tag{9}$$

et on pose

$$a = 2/5, \quad b = 1. \tag{10}$$

(a) Montrer que g a un unique point fixe r sur $[a, b]$ et que la méthode du point fixe est convergente pour tout point de $x_0 \in [a, b]$ vers $r = 1$.

(b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite associée à la méthode du point fixe. Déterminer l'entier n à partir duquel $|x_n - r| \leq \varepsilon$ où $\varepsilon = 1.\,10^{-1}$.

(c) Calculer les termes de la suite correspondant en choisissant $x_0 = 1/2$.

(2) On considère la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = (1/2)^x\,. \tag{11}$$

et on pose

$$a = 0, \quad b = 1. \tag{12}$$

(a) Montrer que g a un unique point fixe r sur $[a, b]$ et que la méthode du point fixe est convergente pour tout point de $x_0 \in [a, b]$ vers $r = \frac{\mathit{LambertW}(\ln(2))}{\ln(2)}$.

(b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite associée à la méthode du point fixe. Déterminer l'entier n à partir duquel $|x_n - r| \leq \varepsilon$ où $\varepsilon = 1.\,10^{-1}$.

(c) Calculer les termes de la suite correspondant en choisissant $x_0 = 1/2$.

(3) *Les questions suivantes sont facultatives*

On cherche à donner un sens à l'expression

$$y = x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}, \tag{13}$$

où la puissance est prise "un nombre infini de fois".

Cette notation est ambigüe puisqu'elle peut correspondre aux deux définitions suivantes : on prend la puissance à chaque fois par "au-dessus" :

$$y = \left((((x^x)^x)^x)^x\right)^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}, \tag{14}$$

ou, au contraire, par "en-dessous"

$$y = {}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x^{\left(x^{\left(x^{(x^x)}\right)}\right)}}}}}. \tag{15}$$

Dans le premier cas, on définira donc une suite, à x fixé, définie par :

$$h_0(x) = x, \tag{16a}$$

$$h_1(x) = x^x = (h_0(x))^x, \tag{16b}$$

$$h_2(x) = (x^x)^x = (h_1(x))^x, \tag{16c}$$

et ainsi de suite ... On a donc la relation de récurrence suivante :

$$\forall x, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad h_{n+1}(x) = (h_n(x))^x, \tag{17a}$$

avec l'initialisation suivante

$$\forall x, \quad h_0(x) = x. \tag{17b}$$

Dans le second cas, on définira donc une suite, à x fixé, définie par :

$$f_0(x) = x, \tag{18a}$$
$$f_1(x) = x^x = x^{f_0(x)}, \tag{18b}$$
$$f_2(x) = x^{(x^x)} = x^{f_1(x)}, \tag{18c}$$
$$f_3(x) = x^{\left(x^{(x^x)}\right)} = x^{f_2(x)}, \tag{18d}$$

et ainsi de suite ... On a donc la relation de récurrence suivante :

$$\forall x, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_{n+1}(x) = x^{f_n(x)}, \tag{19a}$$

avec l'initialisation suivante

$$\forall x, \quad f_0(x) = x. \tag{19b}$$

(a) Pour x fixé, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = h_n(x). \tag{20}$$

(i)(A) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = G_x(u_n), \\ u_0 \text{ est donné.} \end{cases} \tag{21}$$

On précisera (à x fixé) u_0 et la fonction (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) G_x.

(B) Étudier la fonction G_x. On montrera notamment que G_x laisse stable les intervalles $[0, 1]$ et $]1, +\infty[$.

(C) Quels sont les points fixes de G_x ?

(D) En déduire les limites possibles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(E) Montrer que si $x \in [0, 1]$, la suite u_n tend vers 1 et que si $x \in]1, +\infty[$, la suite u_n tend vers $+\infty$.

(F) Quel est le lien avec la question 1 ?

(G) En déduire finalement l'expression de y défini par (14).

(ii) Les résultats de la question 3(a)i, peuvent être en fait établis beaucoup plus rapidement !

(A) Montrer que l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad h_n(x) = x^{(x^n)}. \tag{22}$$

(B) Conclure alors sur la convergence de la suite $h_n(x)$.

(b) Pour x fixé, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = f_n(x). \tag{23}$$

(i) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = G_x(v_n), \\ u_0 \text{ est donné.} \end{cases} \tag{24}$$

On précisera (à x fixé) u_0 et la fonction (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) G_x.

(ii) Étudier la fonction G_x.

(iii) Quels sont les points fixes de G_x ?

(iv) En déduire les limites possibles de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(v) Étudier la convergence de la suite v_n.

(vi) Quel est le lien avec la question 2 ?

(vii) En déduire finalement l'expression de y défini par (15).

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`