Informatique 3A MNBif — Automne 2020

Examen du 19 Janvier 2021

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐
Un formulaire manuscrit d'une feuille A4 recto-verso

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐
Tout type

Exercice 1.
Soit f donnée par

$$\forall x \in [0,1]\,, \quad f(x) = e^{-x}\left(x + 4\,x^2\right), \tag{1a}$$

et l'intégrale I

$$I = \int_0^1 f(x)dx. \tag{1b}$$

(1) (a) Déterminer I^T, l'approximation de I par la méthode élémentaire du trapèze.

(b) On note

$$M_p = \max_{x\in[0,1]} \left| f^{(p)}(x) \right|, \tag{2}$$

le maximum de la valeur absolue de la dérivée p-ième de f sur l'intervalle d'étude. On donne ci-dessous les valeurs numériques de M_1 et M_2 :

$$M_1 = 2.1297786519540\,; \tag{3a}$$

$$M_2 = 6. \tag{3b}$$

Donnez l'expression de l'erreur commise avec la méthode élémentaire du trapèze et fournissez-en une majoration.

(c) On donne la valeur exacte de I :

$$I = 9 - 22\,e^{-1}, \tag{4a}$$

soit encore

$$I = 0.9066522942283. \tag{4b}$$

En déduire l'erreur commise réelle, c'est-à-dire $\left|I^T - I\right|$ et vérifier qu'elle est inférieure au majorant de l'erreur donné plus haut.

(2) (a) Déterminer I_3^T, l'approximation de I par la méthode composite des trapèzes avec $N = 3$ sous-intervalles.

(b) Donnez l'expression de l'erreur commise avec la méthode composite des trapèzes puis fournissez-en une majoration.

(c) Déterminer l'erreur réelle erreur commise, c'est-à-dire $\left|I_3^T - I\right|$ et vérifier qu'elle est inférieure au majorant de l'erreur donné plus haut.

(3) Déterminer le nombre N de sous-intervalles qu'il faudrait utiliser pour avoir une approximation de I par la méthode composite des trapèzes avec une erreur inférieure à

$$\varepsilon = 10^{-8}. \tag{5}$$

Exercice 2.

(1) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

(a) Montrer que l'intervalle $I = [\cos(1), 1]$ est stable par la fonction g donnée par $g(x) = \cos(x)$. Par la suite, on pourra donc supposer (quitte à poser $u_0 = u_2$) que u_2 appartient à I.

(b) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) (i) On pose

$$\varepsilon_1 = 10^{-1} \text{ et } \varepsilon_2 = 10^{-15}. \tag{6}$$

Notons α la limite de la suite. Déterminer deux entiers n_1 et n_2 tels que

$$|u_{n_1} - \alpha| \leq \varepsilon_1 \text{ et } |u_{n_2} - \alpha| \leq \varepsilon_2. \tag{7}$$

(ii) Pour $u_0 = 10$, calculer numériquement les $n_1 + 1$ premières valeurs de u_n. Déterminer l'écart entre u_{n_1} et α, solution de $x = \cos(x)$ déterminé de façon exacte donné par

$$\alpha = 0.7390851332151606 \tag{8}$$

et conclure.

(2) On veut maintenant déterminer de façon numérique la valeur de α donnée par (8) mais plus rapidement que dans la question 1.

(a) Quelle méthode itérative [1] pourriez-vous utiliser pour répondre à cette question ?

(b) On définit la fonction h par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = x - \cos(x). \tag{9}$$

On *admet* que h admet un unique zéro sur $\mathbb{R}$. On note (w_n) la suite associée à cette méthode. Précisez la fonction G telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad w_{n+1} = G(w_n). \tag{10}$$

(c) (i) Pourquoi la méthode étudiée est-elle quadratique au voisinage de l'unique zéro de h sur l'intervalle I, défini par

$$I = [0, \pi/2]\,? \tag{11}$$

1. Il n'y a pas d'ambiguïté sur cette question, car on n'a vu qu'une seule méthode répondant à cela !

(ii) Démontrer que l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |w_{n+1} - l| \leq D\,|w_n - l|^2 \tag{12}$$

est satisfaite pour

$$D = \frac{1}{2} \max_{x \in I} \left|G''(x)\right|, \tag{13}$$

en admettant que la méthode étudiée converge pour tout x_0 appartenant à l'intervalle I vers l'unique zéro de h.

(iii) En fait, l'intervalle I est un peu trop grand. On se place désormais sur l'intervalle J défini par

$$J = [\nu, \pi/2 - \nu], \text{ où } \nu = 0.3000, \tag{14}$$

sur lequel tout ce qui a été fait précédemment est encore valable. On fournit alors la majoration suivante de la constante D, valable sur l'intervalle J :

$$D \leq 0.73741536. \tag{15}$$

On considère les nombres ε_1 et ε_2 définis par (6). Déterminer deux entiers m_1 et m_2 tels que

$$|u_{m_1} - \alpha| \leq \varepsilon_1 \text{ et } |u_{m_2} - \alpha| \leq \varepsilon_2, \tag{16}$$

et comparer avec les résultats de la question 1(c)i.

Commentez !

(iv) Déterminez les $m_1 + 1$ premières valeurs de la suite w_n pour $w_0 = 0.3000$ et concluez grâce à la valeur de α donnée par (8).

Exercice 3.

On étudie l'équation différentielle

$$\forall t \in [0, T], \quad y'(t) = 2\,y(t), \tag{17a}$$

$$y(0) = 1, \tag{17b}$$

avec $T = 2$.

Faire *cinq* itérations avec un pas $h = 0.100$ avec les méthodes d'Euler explicite et implicite pour le problème (17).

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`