

**Examen de TD du 14 novembre 2017**

Durée : 1,5 heure(s)

**Documents autorisés :** OUI  NON *Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Livres interdits***Calculatrice autorisée :** OUI  NON *Tout type***Exercice 1.**On connaît les valeurs d'une fonction  $f$  aux points  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$  et  $x_2 = 2$  :

$$f(x_0) = 2, \quad f(x_1) = 2, \quad f(x_2) = 1.$$

- (1) Construire  $p$  le polynôme d'interpolation de degré 2, interpolant la fonction  $f$  aux nœuds  $x_0$ ,  $x_1$  et  $x_2$ .
- (2) Pour  $\alpha = 0.8$ , donner une valeur approchée de  $f(\alpha)$ .

**Exercice 2.**On recherche l'approximation de l'intégrale  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x) dx$ . par une méthode d'intégration composite.

- (1) Essayez de calculer la valeur exacte de  $I$ .
- (2)

Pour différentes valeurs du pas  $h$ , on a calculé les erreurs d'intégration commises  $\varepsilon(h) = |I - I_a(h)|$  où  $I_a(h)$  est l'approximation de l'intégrale  $I$ .Sur la figure 1 page suivante, le graphique représente un nuage de points où chaque point  $a$  pour abscisse  $\log_{10}(h)$  et pour ordonnée  $\log_{10}(\varepsilon(h))$ . Déduire de ce graphique, l'ordre de la méthode d'intégration. Justifiez-le!**Exercice 3.***On pourra utiliser les résultats rappelés page 3.*

- (1) Rappeler la formule d'intégration (élémentaire) du point milieu sur l'intervalle  $[a, b]$ .
- (2) Cette formule est-elle est une formule de quadrature ?
- (3) Quel est son degré (d'exactitude) ?

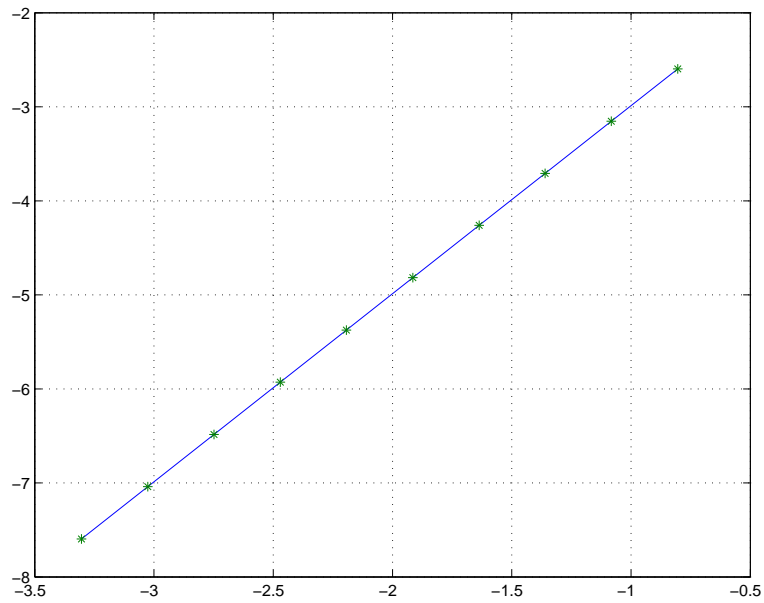


FIGURE 1. Graphique de l'erreur.

- (4) Calculer ce degré.
- (5) Vu le nombre de point utilisé, ce degré est-il logique ?

### Corrigé

Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>

*Erreurs des méthodes d'intégration*

Méthodes élémentaires sur  $[a, b]$ . Dans le tableau qui suit,  $\eta$  appartient à  $]a, b[$ .

méthode	erreur
rectangle	$\frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta)$
milieu	$\frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta)$
trapèze	$-\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)$
Simpson	$-\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta)$

Méthodes composites (composées) sur  $[A, B]$  avec un pas  $h = (B - A)/N$ . Dans le tableau qui suit,  $\eta$  appartient à  $]a, b[$ .

méthode	erreur
rectangle	$h \frac{B-A}{2} f'(\eta)$
milieu	$h^2 \frac{B-A}{24} f''(\eta)$
trapèze	$-h^2 \frac{B-A}{12} f''(\eta)$
Simpson	$-h^4 \frac{B-A}{2880} f^{(4)}(\eta)$