

Corrigé de l'examen du 12 décembre 2018
Correction de l'exercice 1.

- (1) Il est naturellement préférable d'utiliser la forme de Newton pour le calcul de l'interpolation, néanmoins, le calcul utilisant la forme de Lagrange est aussi présenté.
- (a) Chacun des polynômes de Lagrange l_i (de degré 2) est donné par la formule :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (1)$$

On a donc successivement

$$l_0(x) = \frac{(x - 3)(x - 5)}{(-1 - 3)(-1 - 5)},$$

$$l_1(x) = \frac{(x + 1)(x - 5)}{(3 + 1)(3 - 5)},$$

$$l_2(x) = \frac{(x + 1)(x - 3)}{(5 + 1)(5 - 3)}.$$

soit encore après calculs :

$$l_0(x) = 1/24 x^2 - 1/3 x + 5/8, \quad (2a)$$

$$l_1(x) = -1/8 x^2 + 1/2 x + 5/8, \quad (2b)$$

$$l_2(x) = 1/12 x^2 - 1/6 x - 1/4. \quad (2c)$$

Ensuite, le polynôme interpolateur de degré 2, $\Pi_2(g)$, est donné par la formule :

$$\Pi_2(g)(x) = \sum_{i=0}^n g(x_i) l_i(x). \quad (3)$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_2(g)(x) = g(x_0)l_0(x) + g(x_1)l_1(x) + g(x_2)l_2(x).$$

Après calculs, il vient :

$$\Pi_2(g)(x) = \frac{5}{24} x^2 - 1/6 x - 3/8. \quad (4)$$

(b)

Pour calculer le polynôme sous la forme de Newton, on détermine tout d'abord les différences divisées $g[x_i, \dots, x_{i+k}]$ données dans le tableau 1. Ensuite, on n'utilise plus que les différences divisées qui sont encadrées et le polynôme interpolateur est donné par la formule :

$$\Pi_2(g)(x) = \sum_{i=0}^n g[x_0, \dots, x_i](x - x_0) \dots (x - x_{i-1}). \quad (5)$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_2(g)(x) = g[x_0] + g[x_0, x_1](x - x_0) + g[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

$x_i \setminus k$	0	1	2
$x_0 = -1$	0		
		$1/4$	
$x_1 = 3$	1		$\frac{5}{24}$
		$3/2$	
$x_2 = 5$	4		

TABLE 1. Différences divisées de g .

On a successivement

$$\begin{aligned}x - x_0 &= x + 1, \\(x - x_0)(x - x_1) &= x^2 - 2x - 3.\end{aligned}$$

Après calculs, on retrouve donc bien le polynôme déterminé par la méthode de Lagrange (voir équation (4)).

(2) Pour $\alpha = 1$, on obtient alors :

$$\Pi_2(g)(\alpha) = -1/3 \approx -0.333333,$$

ce qui constitue une valeur approchée de $g(\alpha)$.

Correction de l'exercice 2.

On renverra aussi à l'exercice de TD 2.3 proche de cet exercice !

Pour toute la suite, les nœuds interpolant sont notés x_0, \dots, x_n .

(1) (a) Par linéarité des fonctions $f \mapsto \mathcal{I}(f)$ et $f \mapsto Q(f)$, l'exactitude de la formule de quadrature sur l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur à 1, de dimension 2, est équivalente à l'exactitude de la formule de quadrature pour les vecteurs de la base canonique de cet espace vectoriel, c'est-à-dire pour les fonctions définies par

$$e_0(x) = 1, \quad e_1(x) = x.$$

Cela donne le système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1/3\sqrt{3} & 1/3\sqrt{3} \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

où C est le vecteur des coefficients W_i recherchés. On peut le résoudre à la main ou matriciellement pour obtenir :

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Remarque 1.

La matrice intervenant dans le système linéaire (6) est en fait la matrice de Vandermonde suivante, correspondant aux points x_i :

$$D_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \dots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Notons que cette matrice peut s'inverser en théorie en utilisant les polynômes de Lagrange ! Voir [BM03, Exercice 2.5 p. 55]. Si on veut l'inverser directement, on notera que cette matrice est sensible à l'inversion numérique (car elle a un conditionnement important quand n grandit). Il est préférable d'utiliser la méthode de la question 1b pour la calculer pour n grand.

- (b) (i) Pour calculer $\Pi_1(f)$, le polynôme d'interpolation de f en fonction de $f(-1/3\sqrt{3})$, $f(1/3\sqrt{3})$, on utilise la forme de Newton, en prenant bien soin de laisser les valeurs de $f(-1/3\sqrt{3})$, $f(1/3\sqrt{3})$ génériques, comme le montre la suite.

$x_i \setminus k$	0	1
$x_0 = -1/3\sqrt{3}$	$f(-1/3\sqrt{3})$	
$x_1 = 1/3\sqrt{3}$	$f(1/3\sqrt{3})$	$1/2 (f(1/3\sqrt{3}) - f(-1/3\sqrt{3}))\sqrt{3}$

TABLE 2. Différences divisées de f .

Pour calculer le polynôme sous la forme de Newton, on détermine tout d'abord les différences divisées $f[x_i, \dots, x_{i+k}]$ données dans le tableau 2. Ensuite, on n'utilise plus que les différences divisées qui sont encadrées et le polynôme interpolateur de degré 1, $\Pi_1(f)$, est donné par la formule :

$$\Pi_1(f)(x) = \sum_{i=0}^n f[x_0, \dots, x_i](x - x_0)\dots(x - x_{i-1}). \tag{9}$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_1(f)(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0).$$

On a

$$x - x_0 = x + 1/3\sqrt{3},$$

Après calculs, il vient :

$$\Pi_1(f)(x) = 1/2 x\sqrt{3}f(1/3\sqrt{3}) - 1/2 x\sqrt{3}f(-1/3\sqrt{3}) + 1/2 f(-1/3\sqrt{3}) + 1/2 f(1/3\sqrt{3}). \tag{10}$$

- (ii) L'intégrale $\mathcal{I}(\Pi_1(f))$ définie par

$$\mathcal{I}(\Pi_1(f)) = \int_{-1}^1 \Pi_1(f)(x)dx, \tag{11}$$

s'obtient en intégrant le polynôme $\Pi_1(f)$ qui vient d'être déterminé. En intégrant les fonctions 1 et x , sur $[-1, 1]$, on obtient donc finalement

$$\mathcal{I}(\Pi_1(f)) = f\left(-1/3\sqrt{3}\right) + f\left(1/3\sqrt{3}\right). \quad (12)$$

- (iii) On cherche à trouver les coefficients W_i de telle sorte que la formule de quadrature intègre exactement les polynômes jusqu'au degré 1. Cela est donc équivalent à ce qu'elle soit exacte pour $\Pi_1(f)$, pour toute fonction f , puisque $\Pi_1(f)$ est un polynôme de degré au plus 1. C'est donc équivalent à l'égalité de $Q(\Pi_1(f))$ et de $\mathcal{I}(\Pi_1(f))$. Dans cette dernière égalité, chacune des valeurs de $\Pi_1(f)(x_i)$ est remplacée par définition par $f(x_i)$. D'après (12), on voit donc apparaître les coefficients W_i qui correspondent bien à ceux donnés par (7).
- (2) Pour déterminer le degré d'exactitude (que l'on appelle aussi l'ordre) de la méthode, on procède comme suit : on essaye les différents polynômes de degrés supérieur ou égal à 2 et on considère le plus grand degré intégré par la formule de quadrature. On obtient un ordre q donné par

$$q = 3. \quad (13)$$

Remarque 2. L'ordre obtenu dans (13) est élevé par rapport au nombre de points (1) de la méthode de quadrature. En fait, cet ordre est égal à $2n + 1$. C'est l'ordre optimal pour une formule à $n + 1$ points. Cette méthode correspond à la méthode de Gauss-Legendre à 1 points. Plus de détails dans [BM03, Section 3.3 et corollaire 3.49]. Cet ordre élevé explique la faible erreur (voir équation (14)).

- (3) Pour donner une approximation numérique de l'intégrale, on utilise la formule de quadrature déterminée ; on a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-1/3} \\ e^{-1/3} \end{pmatrix}, \\ &= 2e^{-1/3}, \\ &\approx 1.433062621147579. \end{aligned}$$

Si on utilise la fonction `quadl` de matlab pour déterminer une valeur très précise, on obtient

$$\mathcal{I} = 1.493648265624854,$$

ce qui correspond à une erreur donnée par

$$\varepsilon = 6.05855 \cdot 10^{-2}. \quad (14)$$

Correction de l'exercice 3.

En posant $\xi_0 = 0.2$ et

$$f(t, y) = \sin(t) + t^2 y^2, \quad (15)$$

l'équation différentielle

$$\forall t \in [0, T], \quad y'(t) = \sin(t) + t^2 y(t)^2, \quad (16a)$$

$$y(0) = 0.2, \quad (16b)$$

est équivalente à

$$\forall t \in [0, T], \quad y'(t) = f(t, y(t)), \quad (17a)$$

$$y(0) = \xi_0. \quad (17b)$$

On calcule pour $n \in \{1, 2, 3\}$, les approximations $y_n \approx y(t_n)$.

Les résultats sont donnés dans les tableaux 3 et 4 obtenus en utilisant les définitions 4.13 du polycopié de cours et 4.18 du polycopié de cours.

n	y_n
0	0.20000000
1	0.20000000
2	0.31054638
3	0.53095692

TABLE 3. Solutions approchées avec Euler explicite

n	y_n
0	0.20000000
1	0.25527319
2	0.42403748
3	0.75256085

TABLE 4. Solutions approchées avec RK2

Correction de l'exercice 4.

On obtient la matrice triangulaire supérieure suivante

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

avec un second membre égal à

$$c = \begin{pmatrix} 14 \\ -\frac{39}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

La résolution du système triangulaire supérieur fournit donc la solution,

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

où l'on a opéré la permutation des colonnes données par $\{3, 2, 1\}$. Après permutation des colonnes, on a donc la solution

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que

$$AX = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix} = B.$$

Correction de l'exercice 5.

Pour plus de détails, on pourra consulter [BM03, Exercice 4.9 et TP 4.N] ainsi que https://www.univers-ti-nspire.fr/files/pdf/14-th_point_fixe-TNS21.pdf.

Soit la fonction g définie par

$$\forall x \in I = [0, 1], \quad g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, 1/2], \\ 2(1-x), & \text{si } x \in [1/2, 1]. \end{cases} \quad (18)$$

(1) (a) Si on résoud $g(x) = x$, on a deux cas :

- Si $x \in [0, 1/2]$, cela est équivalent à $2x = x$ et donc $x = 0$ qui est bien dans $[0, 1/2]$.
- Si, au contraire, on a $x \in [1/2, 1]$, cela est équivalent à $2(1-x) = x$ et donc $3x = 2$, soit encore $x = 2/3$ qui est bien dans $[0, 1/2]$.

Ainsi,

$$\text{les points fixes de } g \text{ sont } 0 \text{ et } 2/3. \quad (19)$$

(b) Soit $x \in [0, 1]$. On a deux cas :

- Si $x \in [0, 1/2]$, alors $g(x) = 2x \in [0, 2 \times 1/2] = [0, 1]$.
- Si $x \in [1/2, 1]$, alors $g(x) = 2(1-x) \in [0, 2 \times 1/2] = [0, 1]$.

Ainsi

$$I \text{ est } g\text{-stable}. \quad (20)$$

(c) De cela, on peut déduire par récurrence sur n , que si $x_0 \in I$, alors, pour tout n , x_n est dans I , et c'est tout !

(d) Puisque g est continue, les seules limites possibles de x_n sont les points fixes, c'est-à-dire 0 et $2/3$.

$$\text{Les seules limites possibles de } x_n \text{ sont } 0 \text{ et } 2/3. \quad (21)$$

(2) (a) g est dérivable sauf en $1/2$. Il est clair que

$$\forall x \in I \setminus \{1/2\}, \quad |g'(x)| = 2, \quad (22)$$

et donc l'hypothèse (9) de l'énoncé n'est pas vérifiée.

(b) Ainsi, les hypothèses de la proposition 3.15 du cours ne sont pas assurées. Celle-ci assurait que la convergence du point fixe avait lieu ; si les hypothèses ne sont pas vérifiées, on ne peut donc affirmer que la méthode converge (ou diverge d'ailleurs!).

(3) (a) D'après (22), l'hypothèse (10c) de la proposition 1 de l'énoncé n'est pas vérifiée.

(b) Comme précédemment, on ne peut pas affirmer que la méthode du point fixe ne converge pas (ou converge!).

Remarque 3. On peut en fait réduire I à $I_1 = [0, \varepsilon]$ ou $I_2 = [2/3 - \varepsilon, 2/3 + \varepsilon]$ (avec $0 < \varepsilon < 1/3$), ce qui rend vraie l'hypothèse (10c) de la proposition 1 page 3 de l'énoncé. Malheureusement, dans ce cas, l'hypothèse (10b) de la proposition 1 page 3 de l'énoncé, n'est pas valable. En effet, si par exemple, x n'appartient pas à I_1 , on ne peut affirmer que $g(x)$ (qui existe) n'appartient pas à I_1 . En effet, x peut appartenir à $[1 - \varepsilon/2, 1]$. Dans ce cas, $g(x)$ appartient à $[2(1-1), 2(1-1 + \varepsilon/2)] = [0, \varepsilon] = I_1$. De même, si x n'appartient pas à I_2 , il peut appartenir à $[1/3 - \varepsilon/2, 1/3 + \varepsilon/2]$ et dans ce cas $g(x)$ appartient à $[2(1/3 - \varepsilon/2), 2(1/3 + \varepsilon/2)] = [2/3 - \varepsilon, 2/3 + \varepsilon] = I_2$.

(4) (a)

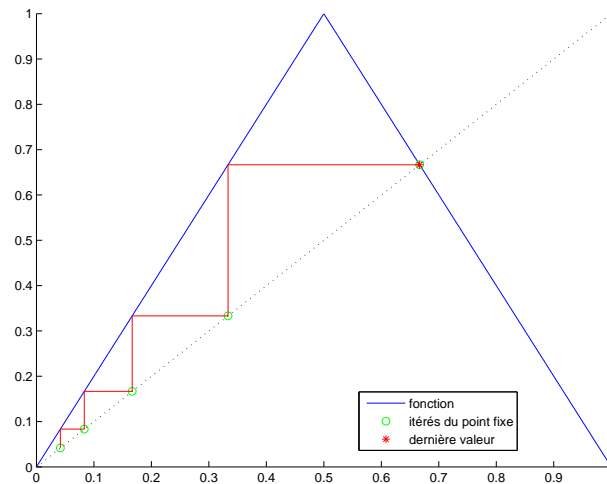
On obtient les valeurs données dans les tableaux 5 ou 6. Voir aussi la figure 1. On constate qu'une fois les 4 premières valeurs de x_n passées ($\{1/24, 1/12, 1/6, 1/3\}$), la valeur de x_n est constamment égale à $2/3$, point fixe de g .

Dans ce cas-là, la suite converge donc vers $2/3$.

n	x_n
0	1/24
1	1/12
2	1/6
3	1/3
4	2/3
5	2/3

TABLE 5. Valeurs de x_n pour $x_0 = 1/24$.

n	x_n
0	0.041666666666667
1	0.083333333333333
2	0.166666666666667
3	0.333333333333333
4	0.666666666666667
5	0.666666666666667

TABLE 6. Valeurs (numériques) de x_n pour $x_0 = 1/24$.FIGURE 1. méthode du point fixe pour $x_0 = 1/24$.

(b)

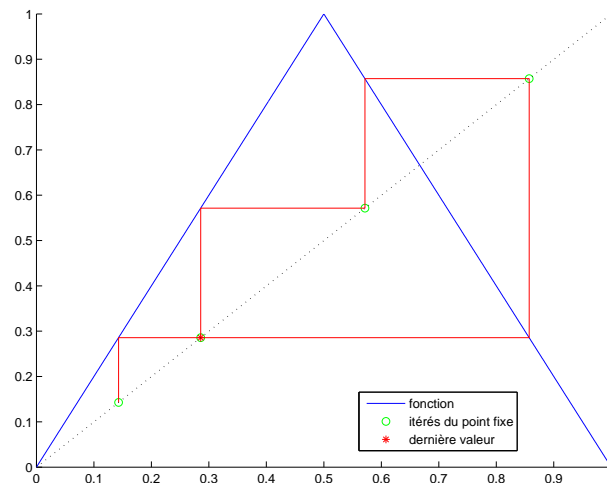
On obtient les valeurs données dans les tableaux 7 ou 8. Voir aussi la figure 2.

On constate qu'une fois la première valeur de x_n passée ($\{1/7\}$), les valeurs de x_n présentent un cycle : $\{2/7, 4/7, 6/7\}$, puisque $g(6/7) = 2/7$.

n	x_n
0	$1/7$
1	$2/7$
2	$4/7$
3	$6/7$
4	$2/7$

TABLE 7. Valeurs de x_n pour $x_0 = 1/7$.

n	x_n
0	0.142857142857143
1	0.285714285714286
2	0.571428571428571
3	0.857142857142857
4	0.285714285714286

TABLE 8. Valeurs (numériques) de x_n pour $x_0 = 1/7$.FIGURE 2. méthode du point fixe pour $x_0 = 1/7$.

Dans ce cas-là, la suite ne converge pas, puisqu'elle "oscille" en permanence.

(c)

(i)

n	a_n	b_n
0	0	1/4
1	2	-1/2
2	4	-1
3	-6	2
4	-12	4
5	26	-8
6	-50	16
7	-100	32
8	202	-64
9	-402	128
10	-804	256
11	-1608	512
12	-3216	1024
13	6434	-2048
14	12868	-4096
15	25736	-8192
16	51472	-16384
17	102944	-32768
18	205888	-65536
19	-411774	131072
20	823550	-262144
21	1647100	-524288
22	-3294198	1048576
23	6588398	-2097152
24	-13176794	4194304
25	26353590	-8388608
26	-52707178	16777216
27	105414358	-33554432
28	-210828714	67108864
29	-421657428	134217728
30	-843314856	268435456
31	1686629714	-536870912
32	-3373259426	1073741824
33	-6746518852	2147483648
34	-13493037704	4294967296
35	26986075410	-8589934592
36	-53972150818	17179869184
37	-107944301636	34359738368
38	-215888603272	68719476736
39	-431777206544	137438953472
40	863554413090	-274877906944
41	-1727108826178	549755813888
42	3454217652358	-1099511627776
43	6908435304716	-2199023255552
44	-13816870609430	4398046511104
45	27633741218862	-8796093022208
46	-55267482437722	17592186044416
47	-110534964875444	35184372088832
48	-221069929750888	70368744177664
49	442139859501778	-140737488355328
50	884279719003556	-281474976710656
51	-1768559438007110	562949953421312
52	-3537118876014220	1125899906842624
53	-7074237752028440	2251799813685248
54	-14148475504056880	4503599627370496
55	28296951008113762	-9007199254740992
56	-56593902016227522	18014398509481984
57	-113187804032455044	36028797018963968
58	-226375608064910088	72057594037927936
59	452751216129820178	-144115188075855872
60	905502432259640356	-288230376151711744

TABLE 9. Valeurs de $x_n = a_n + \pi b_n$ pour $x_0 = 1/4\pi$.

n	x_n
0	0.785398163397448
1	0.429203673205103
2	0.858407346410207
3	0.283185307179586
4	0.566370614359173
5	0.867258771281654
6	0.265482457436692
7	0.530964914873384
8	0.938070170253233
9	0.123859659493535
10	0.247719318987069
11	0.495438637974138
12	0.990877275948276
13	0.018245448103448
14	0.036490896206895
15	0.072981792413791
16	0.145963584827581
17	0.291927169655162
18	0.583854339310324
19	0.832291321379352
20	0.335417357241296
21	0.670834714482593
22	0.658330571034814
23	0.683338857930372
24	0.633322284139257
25	0.733355431721486
26	0.533289136557027
27	0.933421726885945
28	0.133156546228109
29	0.266313092456218
30	0.532626184912436
31	0.934747630175127
32	0.130504739649746
33	0.261009479299491
34	0.522018958598983
35	0.955962082802035
36	0.088075834395931
37	0.176151668791861
38	0.352303337583722
39	0.704606675167445
40	0.590786649665111
41	0.818426700669779
42	0.363146598660442
43	0.726293197320884
44	0.547413605358232
45	0.905172789283535
46	0.189654421432930
47	0.379308842865860
48	0.758617685731720
49	0.482764628536561
50	0.965529257073122
51	0.068941485853756
52	0.137882971707512
53	0.275765943415025
54	0.551531886830049
55	0.896936226339902
56	0.206127547320196
57	0.412255094640392
58	0.824510189280785
59	0.350979621438431
60	0.701959242876861

TABLE 10. Valeurs (numériques) de x_n pour $x_0 = 1/4\pi$.

On obtient les 60 premières valeurs données dans les tableaux 9 ou 10. Voir aussi la figure 3.

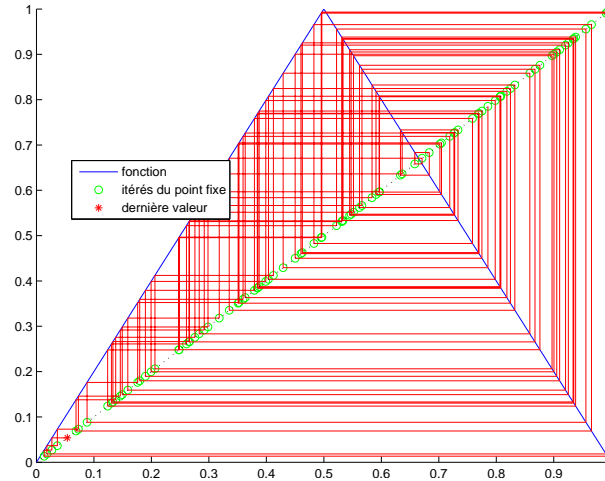


FIGURE 3. méthode du point fixe pour $x_0 = 1/4 \pi$.

On peut montrer que, si $x_0 = 1/4 \pi$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \exists!(a_n, b_n) \in \mathbb{Z}, \quad x_n = a_n + \pi b_n. \quad (23)$$

En effet, c'est vrai pour $n = 0$ avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 1/4$ (qui n'est pas entier!). On démontre ensuite que (23) est vrai par récurrence sur n avec a_n et b_n dans \mathbb{Q} . Pour l'existence, on suppose que cela est vrai pour n . Pour $n + 1$, on a, si $x_n \in [0, 1/2]$,

$$x_{n+1} = g(x_n) = 2x_n = 2a_n + \pi(2b_n),$$

et donc

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n, \\ b_{n+1} &= 2b_n. \end{aligned}$$

Au contraire, si $x_n \in [1/2, 1]$, on a

$$x_{n+1} = g(x_n) = 2(1 - x_n) = 2(1 - a_n) + \pi(-2b_n),$$

et donc

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2(1 - a_n), \\ b_{n+1} &= -2b_n. \end{aligned}$$

On a donc les formules de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n, & b_{n+1} = 2b_n, & \text{si } a_n + \pi b_n \in [0, 1/2], \\ a_{n+1} = 2(1 - a_n), & b_{n+1} = -2b_n, & \text{si } a_n + \pi b_n \in [1/2, 1]. \end{cases} \quad (24)$$

Il est clair que, si a_n et b_n sont rationnels, il en est de même pour a_{n+1} et b_{n+1} . L'unicité vient du fait que, si

$$a_n + \pi b_n = a'_n + \pi b'_n,$$

alors

$$(a_n - a'_n) + \pi(b_n - b'_n) = 0,$$

et l'irrationalité de π entraîne la nullité de $a_n - a'_n$ et de $b_n - b'_n$. Enfin, on constate dans le tableau 9, que, pour $n = 2$, a_n et b_n sont entiers et (24) entraîne par récurrence sur n que cela est vrai pour tout $n \geq 2$.

- (ii) On constate que les premières valeurs de x_n sont toutes deux à deux distinctes. On peut montrer qu'il en est de même pour toutes les valeurs de x_n .

Remarque 4. Sur le tableau 9, on constate que les valeurs de $|a_n|$ et de $|b_n|$ sont de plus en plus grandes. Plus précisément, montrons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = +\infty, \quad (25a)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |b_n| = +\infty. \quad (25b)$$

En fait, montrons tout d'abord par récurrence sur n que

$$\forall n \geq 2, \quad |b_n| = 2^{n-2}. \quad (26)$$

ce qui implique (25b). Dans le tableau 9, on constate que (26) est vrai pour $n = 2$. Supposons maintenant (26) vraie pour $n \geq 2$. Montrons-la pour $n + 1$. D'après (24) et la récurrence, on a donc

$$|b_{n+1}| = 2|b_n| = 2 \times 2^{n-2} = 2^{n-1},$$

ce qui est bien (26) à l'ordre $n + 1$. Montrons maintenant que

$$\forall n \geq 2, \quad |a_n| \geq 2^{n-2}(|a_2| - 2) + 2. \quad (27)$$

ce qui implique, d'après la valeur de $|a_2|$ donnée dans le tableau 9, (25a). Montrons d'abord

$$\forall n \geq 2, \quad |a_{n+1}| \geq 2|a_n| - 2. \quad (28)$$

On a si $a_n + \pi b_n \in [0, 1/2]$

$$|a_{n+1}| = 2|a_n| \geq 2|a_n| - 2.$$

Si $a_n + \pi b_n \in [1/2, 1]$, on a alors, d'après une inégalité triangulaire,

$$|a_{n+1}| = |2(1 - a_n)| = 2|1 - a_n| = 2|a_n - 1| \geq 2(|a_n| - 1) = 2|a_n| - 2.$$

Concluons enfin en montrant (27). On a pour $\alpha = 2$,

$$\alpha = 2\alpha - 2, \quad (29)$$

et donc en soustrayant (28) à (29), on a

$$\forall n \geq 2, \quad |a_{n+1}| - \alpha \geq 2|a_n| - 2\alpha,$$

soit

$$\forall n \geq 2, \quad |a_{n+1}| - \alpha \geq 2(|a_n| - \alpha),$$

et par une récurrence immédiate

$$\forall n \geq 2, \quad |a_n| - \alpha \geq 2^{n-2}(|a_2| - \alpha),$$

et, puisque $\alpha = 2$, (27) en découle.

Remarque 5. On renvoie à l'annexe A où sont faites quelques remarques sur cet exercice.

Annexe A. Quelques remarques sur l'exercice 5

- (1) Dans cet exercice, on étudie une méthode de point fixe dont la convergence ne peut être *a priori* affirmée (la proposition 3.15 page 67 du cours ne s'applique pas.) et la divergence ne peut être *a priori* affirmée (la proposition 3.10 page 66 du cours ne s'applique pas.) En fait, pour tout x_0 appartenant à $I = [0, 1]$, la suite est soit convergente, soit divergente. Plus précisément, on montre que, pour tout $x_0 \in I$, seuls les trois cas exclusifs suivants peuvent se présenter :

- (a) La suite (x_n) possède une infinité de valeurs distinctes ;
 (b) il existe $p \geq 0$ tel que x_0, x_1, \dots, x_p sont deux à deux distincts, puis la suite est stationnaire, c'est-à-dire

$$\forall q \geq p + 1, \quad x_q = x_p. \quad (30)$$

- (c) il existe $p \geq 1$ tel que x_0, x_1, \dots, x_p sont deux à deux distincts, puis la suite est cyclique mais non stationnaire, c'est-à-dire : il existe $r \in \{0, \dots, p - 1\}$ tel que

$$x_{p+1} = x_r, \quad x_{p+2} = x_{r+1}, \quad \dots \quad x_{p+k} = x_{p-1} \text{ avec } k = p - 1 - r. \quad (31)$$

Dans ce cas, on dit que la suite est cyclique d'ordre $k + 1$. Naturellement, les valeurs suivantes des itérés se déduisent par périodicité.

Dans le cas 1a, on peut appliquer alors la proposition 3.9 page 65 du cours et il y a divergence. Dans le cas 1c, il y a aussi divergence. Au contraire, dans le cas 1b, il y a convergence. On peut même expliciter la partition U, V et W de I telle que le 1a a lieu si $x_0 \in U$, le 1b a lieu si $x_0 \in V$, le 1c a lieu si $x_0 \in W$. On a : $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup I \subset U$ et en particulier, $\pi/4$ appartient à U . Par exemple, $1/24$ appartient à V . Par exemple, $1/7$ ou $1/84$ appartiennent à W . Les ensembles V et W sont dénombrables. On peut donc affirmer que, pour presque tout $x_0 \in I$, la suite du point fixe est divergente. L'ensemble des x_0 où il y a convergence est cependant dense dans I .

- (2) Sur le plan numérique, les arrondis de calculs rendent les choses plus complexes.

La divergence a en théorie lieu par exemple avec $x_0 = \pi/4$. Si on fait les calculs en symboliques, on obtient bien toutes les valeurs de x_n différentes comme le montre la figure 4(a), ce qui n'est plus vrai pour la figure 4(b). Dans ce dernier cas, pour $n = 51$, on a $x_n = 0$, c'est-à-dire une convergence vers 0.

Si on prend $P = 318310$ points équirépartis dans $[0, 1]$ définis par $x_i = ih$ où i est un entier et $h = \pi/1000000$, on observe dans tous les cas, une convergence vers zéro, alors que, dans ces cas, on devrait observer une divergence !

Si on prend cette fois-ci $P = 1000000$ points aléatoirement répartis dans $[0, 1]$, on observe dans tous les cas, une convergence vers zéro !

- (3) Pour éviter d'avoir ce problème d'arrondis ou d'avoir des temps de calculs trop long dûs aux symbolique, on peut utiliser une autre fonction g définie par

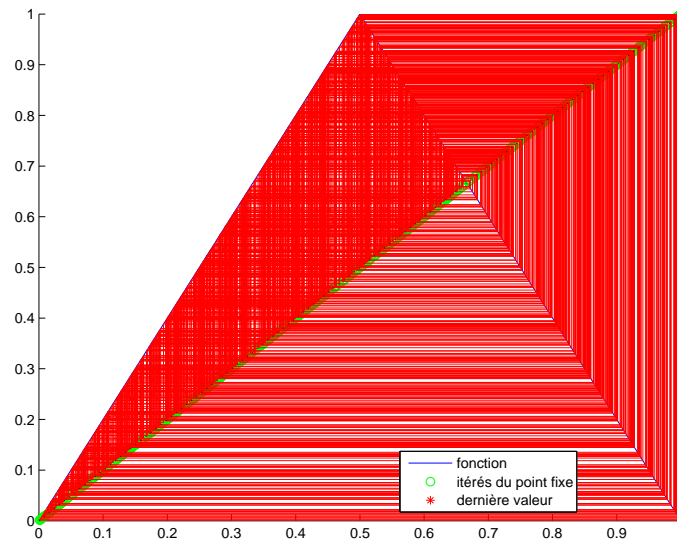
$$\forall x \in [0, 1], \quad g(x) = -4x^2 + 4x. \quad (32)$$

Comme précédemment, la fonction g définit une suite (x_n) , qui en général ne converge pas. On peut aussi définir la partition U, V et W de I qui traduit les trois cas précédemment évoqués. Cependant la détermination analytique de U et V n'est pas possible ici. Les calculs se passent beaucoup mieux comme le montre la suite.

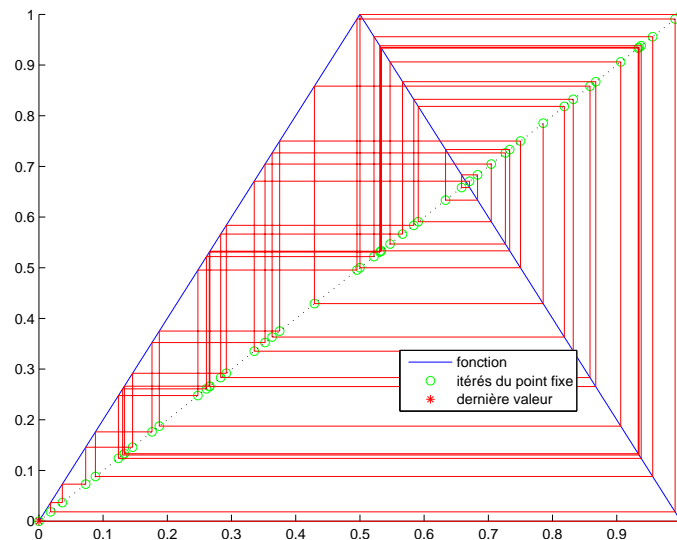
La divergence a de nouveau en théorie lieu par exemple avec $x_0 = \pi/4$, ce qui est bien observé cette fois-ci sur la figure 5 page 15.

Si on prend $P = 319$ points équirépartis dans $[0, 1]$ définis par $x_i = ih$ où i est un entier et $h = \pi/1000$, on n'observe que dans 0.31 % des cas, une convergence vers zéro, alors que, dans ces cas, on devrait observer une divergence !

Si on prend cette fois-ci $P = 1000$ points aléatoirement répartis dans $[0, 1]$, on observe dans tous les cas, une divergence (aucune valeur égale).



(a) en symbolique



(b) en numérique

FIGURE 4. calculs pour $x_0 = \pi/4$

- (4) Pour les deux fonctions g définies précédemment, on parle de comportement chaotique de la suite x_n . En effet, elle peut converger ou pas. En cas de divergence, les valeurs qu'elles prend, si elles sont en nombre infini, occupent "tout" $[0, 1]$ de façon imprévisible.

(a)

Plus précisément, on considère les deux valeurs initiales très proches $u_0 = \pi/4$ et $u_0 = \pi/4 + \varepsilon$ où

$$\varepsilon = 1.10^{-12},$$

et on trace les valeurs $|u_n(u_0) - u_n(u_0 + \varepsilon)|$ sur la figure 6. Cet écart apparaît imprévisible et ne reste jamais très longtemps proche de zéro.

(b)

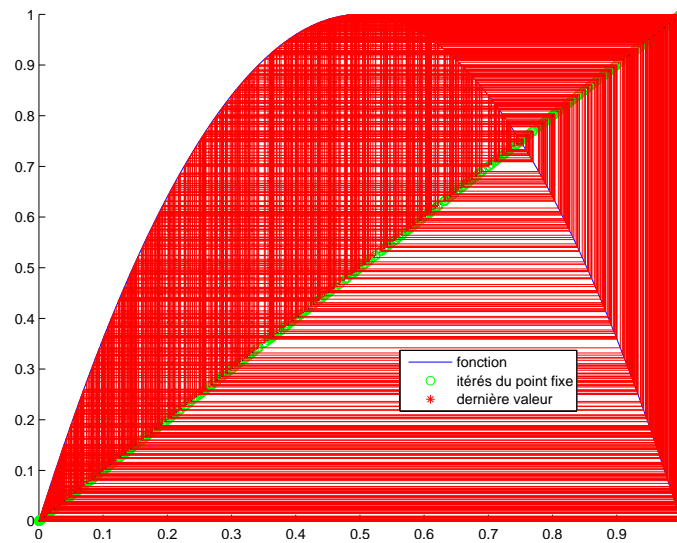


FIGURE 5. calculs pour $x_0 = \pi/4$ et g définie par (32).

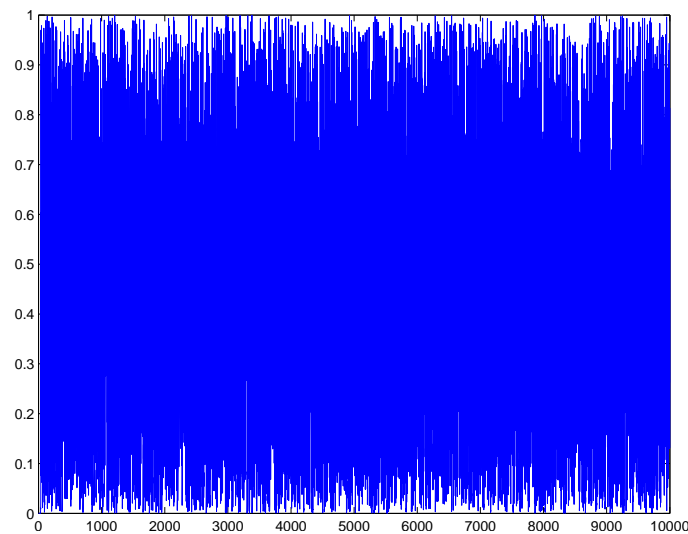


FIGURE 6. Écarts entre x_n pour $x_0 = \pi/4$ et $x_0 = \pi/4 + \varepsilon$ et g définie par (32).

Faisons varier n dans $\{1000, 10000, 100000\}$. Par exemple, pour $n = 10000$, les valeurs (toutes différentes) prises par x_n sont représentées en figure 7. Si on calcule les différentes valeurs de ρ , défini comme le rapport de l'écart maximal divisé par $h = 1/(n+1)$, on obtient

$$\begin{aligned} \text{pour } n = 1000, \quad \rho &= 10.66, \\ \text{pour } n = 10000, \quad \rho &= 11.32, \\ \text{pour } n = 100000, \quad \rho &= 15.41. \end{aligned}$$

Cela signifie que, si n augmente, les valeurs que prend x_n , si elles sont en nombre infini, occupent "de plus en plus" $[0, 1]$ et cela, de façon imprévisible, comme le montre par exemple la figure 8.

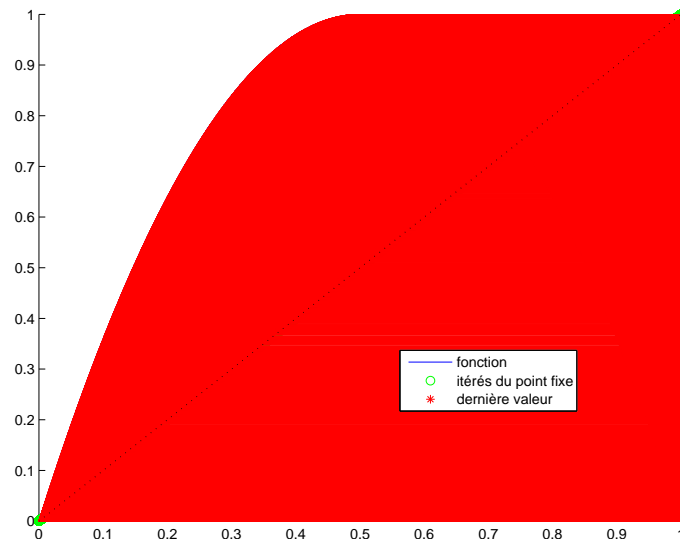


FIGURE 7. 10000 premières valeurs de x_n pour $x_0 = \pi/4$ et g définie par (32).



FIGURE 8. Zoom des valeurs entre 0.50000 et 0.50154 de x_n pour $x_0 = \pi/4$ et g définie par (32).

Références

- [BM03] J. BASTIEN et J.-N. MARTIN. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4 ième étage). Voir <https://www.dunod.com/sciences-techniques/introduction-analyse-numerique-applications-sous-matlab>. Paris : Dunod, 2003. 392 pages.