

Corrigé de l'examen du 08 Janvier 2020

Ce corrigé renvoie à des références du cours ; prière de consulter la dernière version disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>

On pourra télécharger le zip `examcorMNBifA19.zip` à l'adresse habituelle qui contient des fonctions matlab à faire tourner pour la résolution

- de l'exercice 3 ;
- des questions 3a et 3b de l'exercice 4 ;

Correction de l'exercice 1.

On obtient la matrice triangulaire supérieure suivante

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

avec un second membre égal à

$$c = \begin{pmatrix} 18 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La résolution du système triangulaire supérieur fournit donc la solution

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 2.

On rappelle que h est défini par

$$h = 0.01, \tag{1}$$

(1) Si on se place sur l'intervalle $[1, e^{1/e}[$, l'équation différentielle de l'énoncé s'écrit

$$\forall t \in [1, e^{1/e}[, \quad y'(t) = \frac{y^2(t)}{t(1 - y(t) \ln(t))}, \tag{2a}$$

$$y(1) = \xi_0 = 1. \tag{2b}$$

On pose

$$f(t, y) = \frac{y^2}{t(1 - y \ln(t))}, \tag{3}$$

qui est définie tant que $t > 0$ et $1 - y \ln(t) > 0$. Le schéma d'Euler s'écrit alors avec les notations habituelles du cours (et en notant $t_n = t_0 + nh$)

$$\forall n \in \{0, \dots, N - 1\}, \quad y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \tag{4a}$$

$$y_0 = \xi_0. \tag{4b}$$

On utilise donc (4a), pour n allant de 0 à 2. Voir les résultats dans le tableau 1.

n	y_n
0	1.00000000
1	1.01000000
2	1.02020253
3	1.03061698

TABLE 1. Approximations déterminées par le schéma d'Euler progressif (4).

(2) (a) On se place maintenant sur l'intervalle $[e^{-e}, 1]$ et l'équation différentielle de l'énoncé s'écrit

$$\forall t \in [e^{-e}, 1[, \quad y'(t) = \frac{y^2(t)}{t(1 - y(t) \ln(t))}, \quad (5a)$$

$$y(1) = \xi_0 = 1. \quad (5b)$$

On utilise alors le schéma (4), "à l'envers" ; il reste explicite et on l'utilise pour des valeurs négatives de n et un pas h négatif. En effet, le schéma (4a), provient de l'égalité

$$\forall n \in \{0, \dots, N - 1\}, \quad \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(t_n, y_n), \quad (6)$$

puisque l'on a

$$\forall n \in \{0, \dots, N - 1\}, \quad y'(t_n) \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{h}.$$

Si dans cette dernière équation, on approche la dérivée par un taux d'accroissement de y calculé sur $[t_{n-1}, t_n]$, on a donc

$$y'(t_n) \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{y_{n-1} - y_n}{-h},$$

et (6), donne alors

$$\frac{y_{n-1} - y_n}{-h} = f(t_n, y_n),$$

expression qu'on utilise pour des valeurs de n décroissant à partir de zéro : on a alors (en notant $t_n = t_0 + nh$)

$$\forall n = 0, -1, -2, -3, \dots \quad y_{n-1} = y_n - hf(t_n, y_n), \quad (7a)$$

$$y_0 = \xi_0. \quad (7b)$$

On utilise donc (7a), pour n allant de 0 à -2 , en décroissant.

(b)

n	y_n
0	1.00000000
-1	0.99000000
-2	0.98019753
-3	0.97058396

TABLE 2. Approximations déterminées par le schéma d'Euler progressif (7).

Voir les résultats dans le tableau 2.

Remarque 1.

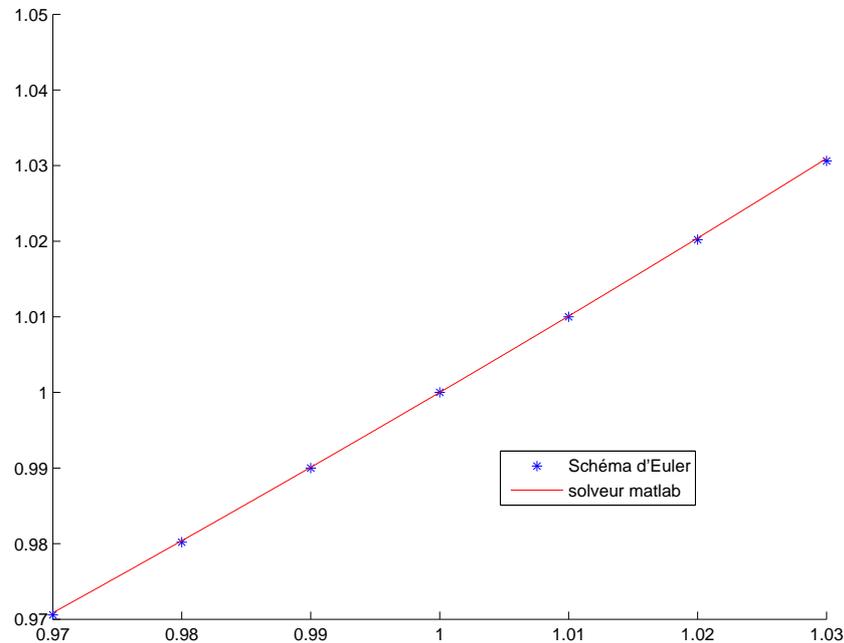


FIGURE 1. Les approximations fournies par le schéma d'Euler et un solveur de matlab sur l'intervalle $[0.970, 1.030]$.

On a aussi tracé sur les figures 1 et 2, les valeurs issues des tableaux 1 et 2, ainsi que les valeurs calculées en utilisant un solveur de matlab plus performant. On peut constater sur ces deux figures les bons résultats fournis par le schéma d'Euler.

Correction de l'exercice 3.

On pourra consulter :

- l'annexe F du polycopié de cours ou les exercices 2.3, 2.4 ou 2.5 des TD qui proposent une manière alternative pour étudier les formules de quadrature.
- Pour plus de détails sur les formules de Newton-Cotes, qui généralise les formules de quadrature étudiées ici on pourra consulter [CM84] et plus particulièrement le chapitre 2 et l'exercice 2.3 ou encore http://fr.wikipedia.org/wiki/Formule_de_Newton-Cotes
http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/mt40/medianMT40_A03.zip
http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/mt40/mediancorrigeMT40_A03.zip

Dans tout ce corrigé, on note $n = 1$.

- (1) (a) • Si la formule de quadrature $Q(f)$ est de degré d'exactitude au moins $r \geq n$, alors elle est exacte pour l_j , pour j fixé, le polynôme de Lagrange de f sur le support $\{x_0, \dots, x_n\}$ puisqu'il est de degré n . On a donc

$$\mathcal{I}(l_j) = Q(l_j),$$

et donc

$$\int_a^b l_j(x) dx = \sum_{i=0}^n W_i l_j(x_i).$$

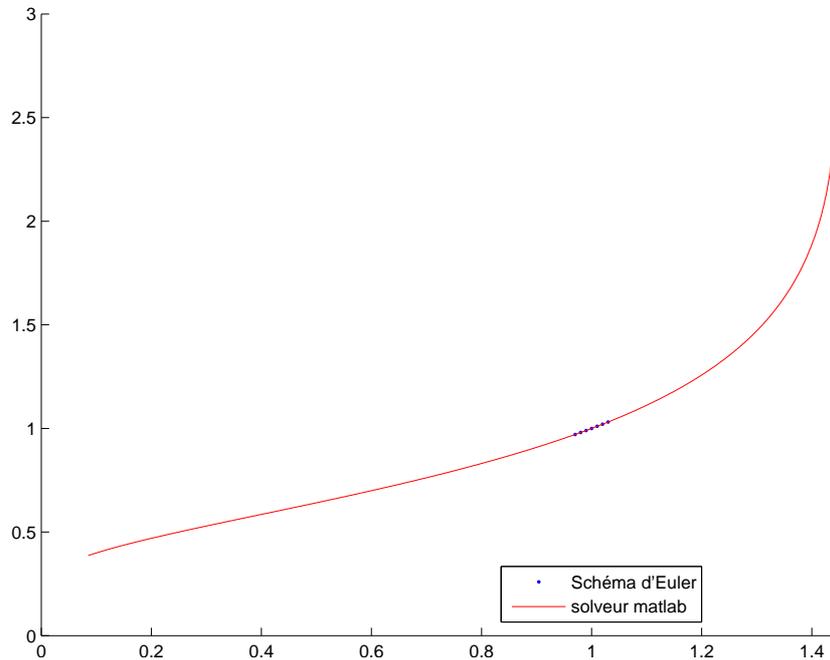


FIGURE 2. Les approximations fournies par le schéma d'Euler et un solveur de matlab sur l'intervalle $[0, e^{1/e}]$.

On utilise l'équation (1.13) du polycopié de cours et on obtient donc

$$\int_a^b l_j(x) dx = \sum_{i=0}^n W_i \delta_{ij},$$

et donc

$$\int_a^b l_j(x) dx = W_j.$$

- Réciproquement, soit P un polynôme de degré au plus n . Montrons que $\mathcal{I}(P) = Q(P)$. On a successivement

$$\begin{aligned} Q(p) &= \sum_{i=0}^n W_i P(x_i), \\ &= \sum_{i=0}^n \left(\int_a^b l_i(x) dx \right) P(x_i), \\ &= \int_a^b \left(\sum_{i=0}^n P(x_i) l_i(x) \right) dx. \end{aligned}$$

D'après l'équation (1.19) du polycopié de cours, on a donc

$$= \int_a^b \Pi_n(P)(x) dx.$$

Puisque P est un polynôme de degré au plus n , on a donc $\Pi_n(P) = P$, ce qui achève la preuve.

(b) Sous l'hypothèse (6) de l'énoncé, on obtient après calculs :

$$l_0(x) = -x + 1; \quad (8a)$$

$$l_1(x) = x. \quad (8b)$$

(c) Puisque que le degré d'exactitude de la formule de quadrature est au moins n , d'après le résultat de la question 1a, on a

$$W_0 = \int_a^b l_0(x)dx \text{ et } W_1 = \int_a^b l_1(x)dx, \quad (9)$$

et donc, d'après l'expression obtenue dans la question 1b et sous l'hypothèse (6) de l'énoncé, on obtient après calculs :

$$W_0 = 1/2; \quad (10a)$$

$$W_1 = 1/2. \quad (10b)$$

(d) Si on admet l'équation (7) de l'énoncé (dont on pourra par exemple trouver une preuve dans http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/mt40/medianMT40_A03.zip et http://utbmjb.chez-alice.fr/UTBM/mt40/mediancorrigeMT40_A03.zip), grâce à (10), on obtient donc l'expression suivante de $Q(f)$:

$$Q(f) = \frac{1}{2}(b-a)(f(a) + f(b)), \quad (11)$$

ce qui d'après le tableau 2.2 du polycopié de cours est exactement la méthode élémentaire du trapèze.

(2) (a) D'après la question 1a, les poids W_i ont été déterminés de telle sorte que la méthode soit de degré au moins n . Rien n'interdit qu'il ne soit pas plus grand. On essaye les différentes valeurs $p \geq n + 1$ et pour ces valeurs, on détermine successivement pour $f = X^p$, $\mathcal{I}(f) - Q(f)$. Si $\mathcal{I}(f) - Q(f)$ est non nulle pour $f = X^{n+1}$, le degré est exactement n . Sinon, on détermine la plus grande valeur de p pour laquelle $\mathcal{I}(f) - Q(f)$ est nulle ce qui fournit le degré. Ici, on obtient, après calculs,

$$\mathcal{I}(X^2) - Q(X^2) = 1/6 (a-b)^3 \neq 0. \quad (12)$$

On obtient donc le degré r défini par

$$r = 1. \quad (13)$$

Remarque 2. Ce degré est conforme au tableau de la remarque 2.15 du polycopié de cours.

(b) (i) Si on applique la formule (8) de l'énoncé à la fonction $f = X^{r+1}$, on a $f^{(r+1)}(\xi) = (r+1)!$, indépendamment de ξ et donc

$$\mathcal{I}(X^{r+1}) - Q(X^{r+1}) = \alpha(b-a)^{r+2}(r+1)!$$

Le terme $\mathcal{I}(X^{r+1}) - Q(X^{r+1})$ est exactement la première erreur non nulle, déterminé en question 2a. On a donc

$$\alpha = \frac{\mathcal{I}(X^{r+1}) - Q(X^{r+1})}{(b-a)^{r+2}(r+1)!}. \quad (14)$$

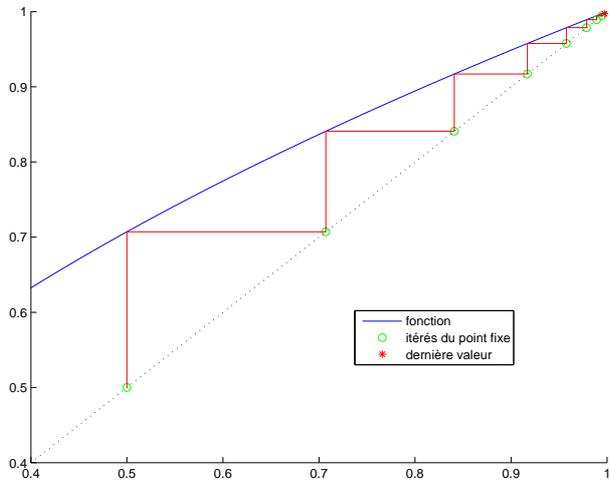
(ii) Ainsi, en utilisant (12) et (13), on aboutit donc à

$$\alpha = \frac{1/6 (a-b)^3}{\alpha(b-a)^{r+2}(r+1)!} = \frac{1/6 (a-b)^3}{(b-a)^{r+2}(r+1)!} = \frac{1/6 (a-b)^3}{(b-a)^3 2!},$$

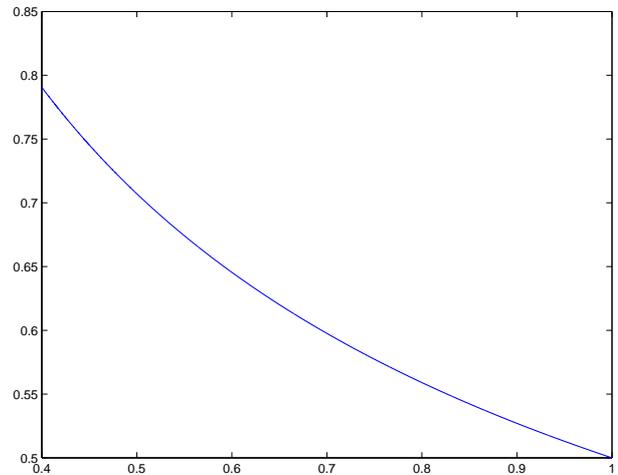
et donc, après simplification,

$$\alpha = -1/12. \quad (15)$$

Grâce à la formule (8) de l'énoncé et (15), on vient donc de montrer l'expression de l'erreur commise dans la méthode élémentaire du trapèze, comme annoncé dans le tableau 2.3 du polycopié de cours. Cette façon de procéder peut se programmer informatiquement et constitue une



(a) Le graphe de la fonction g et les premières valeurs de la suite x_n .



(b) Le graphe de la fonction $|g'|$.

FIGURE 3. Les graphes des fonctions g et $|g'|$.

preuve rigoureuse (en admettant néanmoins l'équation (8) de l'énoncé) de l'expression de l'erreur commise.

Plus de détails pourront être trouvés dans l'annexe F du polycopié de cours et particulièrement dans la remarque F.5 du polycopié de cours.

Correction de l'exercice 4.

Sur cette question, on pourra le papier très complet [Cam10], disponible à l'url <http://citron.9grid.fr/docs/tetration.pdf> ou les pages suivantes : <http://mathvault.ca/derivative-tetration-hyperexponentiation/>, <http://en.wikipedia.org/wiki/Tetration> ou <https://fr.wikipedia.org/wiki/T%C3%A9tation>.

Il existe d'autres pages moins détaillées comme

<http://math.stackexchange.com/questions/1634746/solving-equation-with-infinite-exponent-tower>

<http://mathforum.org/library/drmath/view/70270.html>

<http://math.stackexchange.com/questions/1318481/is-this-a-valid-proof-for-xxxx-dots-y?noredirect=1&lq=1>

<https://math.stackexchange.com/questions/1317314/derivative-of-xxx-to-infinity>

Attention, cette dernière est erronée puis reprise !

Plus de détails plus fins pourront être trouvés dans [Kno81].

On pourra télécharger le zip de fonction matlab à l'adresse <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MNBif/examcorMNBifA19.zip> qui contient des fonctions matlab à faire tourner pour la résolution des questions 3a et 3b.

(1)

(a) (i)(A) On a

$$g'(x) = 1/2 \frac{1}{\sqrt{x}}. \quad (16)$$

(B) Sur la figure 3(a), on constate que la fonction g semble avoir un point fixe, correspondant à la valeur

$$r = 1.$$

(C) Sur la figure 3(b), on constate que les valeurs de la fonction $|g'|$ sont inférieures à 0.790569.

Démontrons cela rigoureusement. La dérivée de la fonction g est monotone et g' prend donc ses valeurs entre $g'(a)$ et $g'(b)$. Sa valeur maximale est donc donnée par

$$\alpha = 0.7905694150421$$

(D) Sur la figure 3(a), on constate que l'intervalle $[a, b]$ est g -stable.

Démontrons cela rigoureusement. La fonction g est croissante ; ainsi, sur l'intervalle $[a, b]$, elle prend les valeurs $[g(a), g(b)]$. On vérifie que $g(a) = 0.6324555320337$ et $g(b) = 1$ sont bien dans l'intervalle $[a, b]$.

(ii) D'après les points 1(a)iC et 1(a)iD, les deux hypothèses du théorème 3.15 du polycopié de cours sont vérifiées et donc g admet un point fixe unique r dans $I = [a, b]$ et, pour tout x_0 de I , la suite (x_n) est définie et converge vers r . Cette valeur est nécessairement celle donnée dans l'énoncé, par unicité de celle-ci !

(b) Appliquons le résultat de la proposition 3.17 du polycopié de cours ; on choisit n défini par (3.43) du polycopié de cours, où la valeur de k a été donnée plus haut, ce qui donne numériquement

$$n = 8. \tag{17}$$

(c) On obtient alors progressivement :

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.50000000000000 ; \\ x_1 &= g(x_0) = 0.7071067811865 ; \\ x_2 &= g(x_1) = 0.8408964152537 ; \\ x_3 &= g(x_2) = 0.9170040432047 ; \\ x_4 &= g(x_3) = 0.9576032806986 ; \\ x_5 &= g(x_4) = 0.9785720620877 ; \\ x_6 &= g(x_5) = 0.9892280131940 ; \\ x_7 &= g(x_6) = 0.9945994234836 ; \\ x_8 &= g(x_7) = 0.9972960560855. \end{aligned}$$

Remarque 3. Si on calcule l'erreur réellement commise, en utilisant la valeur de x_n déterminée ci-dessus et la valeur de r donnée dans l'énoncé, on a

$$|x_n - r| = |0.9972960560855 - 1| = 0.0027039439145,$$

ce qui est bien inférieur à la valeur de ε donnée dans l'énoncé.

Remarque 4. Si on utilise la majoration donnée par (H.13) du polycopié de cours, on obtient

$$|x_n - r| \leq 0.0101793883594,$$

qui est bien inférieur à la valeur de ε donnée dans l'énoncé.

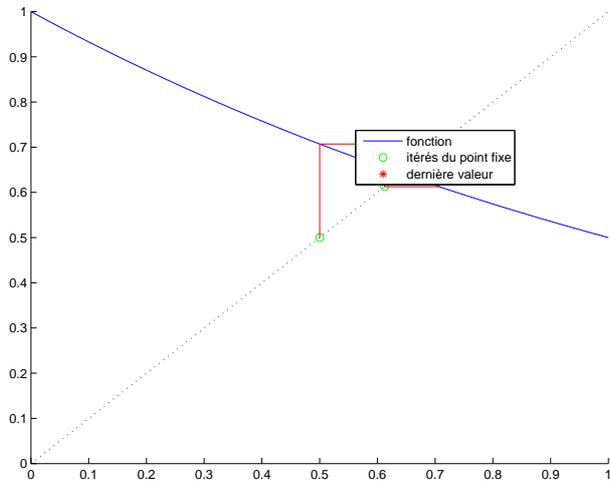
(2)

(a) (i)(A) On a

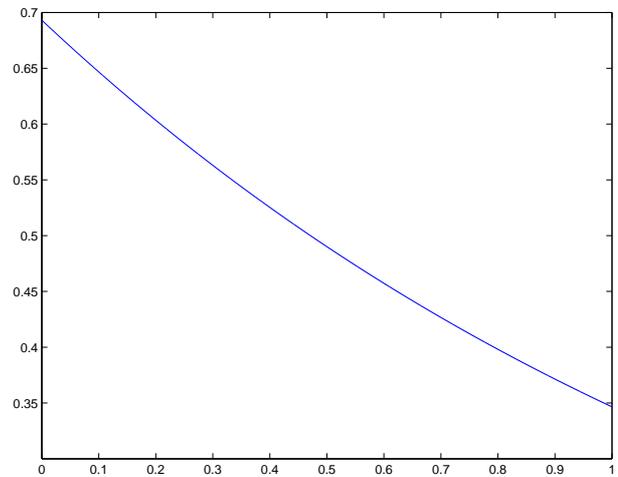
$$g'(x) = -(1/2)^x \ln(2). \tag{18}$$

(B) Sur la figure 4(a), on constate que la fonction g semble avoir un point fixe, correspondant à la valeur

$$r = \frac{\text{Lambert } W(\ln(2))}{\ln(2)}.$$



(a) Le graphe de la fonction g et les premières valeurs de la suite x_n .



(b) Le graphe de la fonction $|g'|$.

FIGURE 4. Les graphes des fonctions g et $|g'|$.

(C) Sur la figure 4(b), on constate que les valeurs de la fonction $|g'|$ sont inférieures à 0.693147. Démontrons cela rigoureusement. La dérivée de la fonction g est monotone et g' prend donc ses valeurs entre $g'(a)$ et $g'(b)$. Sa valeur maximale est donc donnée par

$$\alpha = 0.6931471805599$$

(D) Sur la figure 4(a), on constate que l'intervalle $[a, b]$ est g -stable.

Démontrons cela rigoureusement. La fonction g est croissante ; ainsi, sur l'intervalle $[a, b]$, elle prend les valeurs $[g(a), g(b)]$. On vérifie que $g(a) = 1$ et $g(b) = 0.5000000000000$ sont bien dans l'intervalle $[a, b]$.

(ii) D'après les points 2(a)iC et 2(a)iD, les deux hypothèses du théorème 3.15 du polycopié de cours sont vérifiées et donc g admet un point fixe unique r dans $I = [a, b]$ et, pour tout x_0 de I , la suite (x_n) est définie et converge vers r . Cette valeur est nécessairement celle donnée dans l'énoncé, par unicité de celle-ci !

(b) Appliquons le résultat de la proposition 3.17 du polycopié de cours ; on choisit n défini par (3.43) du polycopié de cours, où la valeur de k a été donnée plus haut, ce qui donne numériquement

$$n = 7. \tag{19}$$

(c) On obtient alors progressivement :

$$\begin{aligned} x_0 &= 0.5000000000000 ; \\ x_1 &= g(x_0) = 0.7071067811865 ; \\ x_2 &= g(x_1) = 0.6125473265361 ; \\ x_3 &= g(x_2) = 0.6540408600421 ; \\ x_4 &= g(x_3) = 0.6354978458134 ; \\ x_5 &= g(x_4) = 0.6437186417229 ; \\ x_6 &= g(x_5) = 0.6400610211772 ; \\ x_7 &= g(x_6) = 0.6416858070430. \end{aligned}$$

Remarque 5. Si on calcule l'erreur réellement commise, en utilisant la valeur de x_n déterminée ci-dessous et la valeur de r donnée dans l'énoncé, on a

$$|x_n - r| = \left| 0.6416858070430 - \frac{\text{LambertW}(\ln(2))}{\ln(2)} \right| = 0.0005000625380,$$

ce qui est bien inférieur à la valeur de ε donnée dans l'énoncé.

Remarque 6. Si on utilise la majoration donnée par (H.13) du polycopié de cours, on obtient

$$|x_n - r| \leq 0.0036702147431,$$

qui est bien inférieur à la valeur de ε donnée dans l'énoncé.

- (3) (a) On pourra faire tourner la fonction matlab `etudefonctionh.m` pour obtenir les différentes courbes des corrigés de cette question.

Pour x fixé, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = h_n(x). \quad (20)$$

- (i)(A) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc définie par

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = G_x(u_n), \\ u_0 & \text{est donné.} \end{cases} \quad (21)$$

avec

$$\forall y, \quad G_x(y) = y^x = e^{x \ln y}, \quad (22a)$$

$$u_0 = x. \quad (22b)$$

- (B) À x fixé, la fonction G_x est définie sur \mathbb{R}_+^* . Puisque $u_1 = G_x(x)$, il est nécessaire que

$$x \in \mathbb{R}_+^*, \quad (23)$$

hypothèse que l'on fera pour toute la suite. Étudions donc G_x sur \mathbb{R}_+^* , qui y est de classe \mathcal{C}^∞ .

On a

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad G'_x(y) = \frac{x}{y} e^{x \ln y}, \quad (24)$$

qui est strictement positive. De plus, on a

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0^+} G_x(y) &= 0, \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} G_x(y) &= +\infty. \end{aligned}$$

On peut donc prolonger G_x sur \mathbb{R}_+ en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad G_x(0) = 0. \quad (25)$$

Voir le tableau de variation 3. Puisque G_x est strictement croissante, on déduit de ce tableau que

$$G_x(]0, 1[) =]0, 1[, \quad (26a)$$

$$G_x([0, 1]) = [0, 1], \quad (26b)$$

$$G_x(]1, +\infty[) =]1, +\infty[, \quad (26c)$$

et donc en particulier que

$$\text{La fonction } G_x \text{ laisse stable chacun des intervalles }]0, 1[, [0, 1] \text{ et }]1, +\infty[. \quad (27)$$

y	0	1	$+\infty$
Variations de G_x	0	1	$+\infty$
Signe de G'_x		+	

TABLE 3. Tableau de variation de G_x

(C) Pour $x \geq 0$, résolvons l'équation, en y , sur \mathbb{R}_+ :

$$G_x(y) = y. \quad (28)$$

Si $x > 0$, c'est donc équivalent à

$$e^{x \ln(y)} = y \quad (29)$$

ce qui est équivalent (car $y > 0$) à

$$x \ln(y) = \ln(y). \quad (30)$$

Si $y \neq 1$, cela implique $x = 1$. Donc, par contraposition, $x \neq 1$ implique $y = 1$. Dans ce cas (28) est vérifiée. Si $y = 1$, cela est vrai pour toute valeur de x .

Nous reviendrons plus tard sur le cas $x = 0$.

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \text{ l'unique point fixe de } G_x \text{ est } y = 1; \quad (31a)$$

$$\text{si } x = 1, \text{ tout réel } y > 0 \text{ est point fixe de } G_y. \quad (31b)$$

(D) • Si $x = 1$, d'après (21), on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = G_1(u_n) = u_n \text{ et } u_0 = x = 1,$$

on a donc

$$\text{pour } x = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1. \quad (32)$$

• Si $x \neq 1$, d'après (21) et (31a) et la continuité de G_x , si u_n converge,

$$\text{la seule limite possible de } u_n \text{ est } 1. \quad (33)$$

• Nous reviendrons plus tard sur le cas $x = 0$.

(E) Étudions maintenant la convergence effective de la suite u_n .

Nous avons deux méthodes.

• Le cas $x = 1$ est déjà traité (voir (32)).

Nous raisonnons à la main, en étudiant la fonction $y \mapsto G_x(y)/y$ définie sur \mathbb{R}_+^* . Supposons donc $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On a,

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{G_x(y)}{y} = e^{x \ln(y) - \ln(y)} = e^{\ln(y)(x-1)} > 0,$$

et donc

$$\forall (x, y) \in (]0, 1[\times]0, 1])^2 \cup (]1, +\infty[\times]1, +\infty[)^2, \quad G_x(y) > y. \quad (34)$$

De cela, de (27) et de (22), nous obtenons par une récurrence immédiate que,

$$\forall x > 1, \quad u_n > 1 \text{ et } u_{n+1} > u_n, \quad (35a)$$

$$\forall x < 1, \quad 0 < u_n < 1 \text{ et } u_{n+1} > u_n. \quad (35b)$$

Dans le second cas, la suite u_n est croissante et majorée et converge donc vers $l > 0$. D'après (31a), cette limite l ne peut être que 1. On a donc

$$\text{pour } x \in]0, 1[, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1. \quad (36)$$

Dans le premier cas, la suite u_n est croissante et ne peut pas être majorée. Si c'était le cas, elle convergerait vers $l > 1$, qui serait point fixe de G_x sur $]1, +\infty[$ ce qui est impossible d'après (31a). On a donc

$$\text{pour } x \in]1, +\infty[, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty. \quad (37)$$

Concluons par le cas le cas $x = 0$. La suite u_n n'est pas définie en toute rigueur dans ce cas. Conformément à matlab ou à la propriété

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(x)} = 1,$$

on peut poser

$$0^0 = 1. \quad (38)$$

Ainsi, par définition u_n vaut 1 et

$$\text{pour } x = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1. \quad (39)$$

- On peut aussi utiliser la proposition 3.15 du polycopié de cours pour montrer la convergence de la suite u_n pour $x \in]0, 1[$.

D'après (24), on a

$$\forall y \in]0, 1[, \quad G'_x(y) = \frac{x}{y} e^{x \ln y} = x e^{-\ln(y)} e^{x \ln y},$$

et donc

$$\forall y \in]0, 1[, \quad G'_x(y) = x e^{\ln(y)(x-1)}. \quad (40)$$

Puisque $x \in]0, 1[$, la fonction $y \mapsto \ln(y)(x-1)$ est décroissante sur $]0, 1[$ et donc G'_x est décroissante sur $]0, 1[$. Compte tenu de

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} G'_x(y) = +\infty, \quad (41a)$$

$$G'_x(1) = 0. \quad (41b)$$

on peut obtenir le tableau de variation de G'_x .

Voir le tableau 4. Il nous montre qu'il existe un unique réel noté ξ_x tel que $G'_x(\xi_x) = 1$. Il est donné par

$$x e^{\ln(\xi_x)(x-1)} = 1,$$

ce qui est successivement équivalent à

$$e^{\ln(\xi_x)(x-1)} = \frac{1}{x} \iff \ln(\xi_x)(x-1) = -\ln(x),$$

$$\iff \ln(\xi_x) = \frac{\ln(x)}{1-x},$$

$$\iff \xi_x = e^{\frac{\ln(x)}{1-x}}$$

y	0	ξ_x	1
Variations de G'_x	$+\infty$	\downarrow 1	0

TABLE 4. Tableau de variation de G'_x sur $[0, 1]$.

et donc $\xi_x = H(x)$ où

$$\forall x \in]0, 1[, \quad H(x) = e^{\frac{\ln(x)}{1-x}}. \quad (42)$$

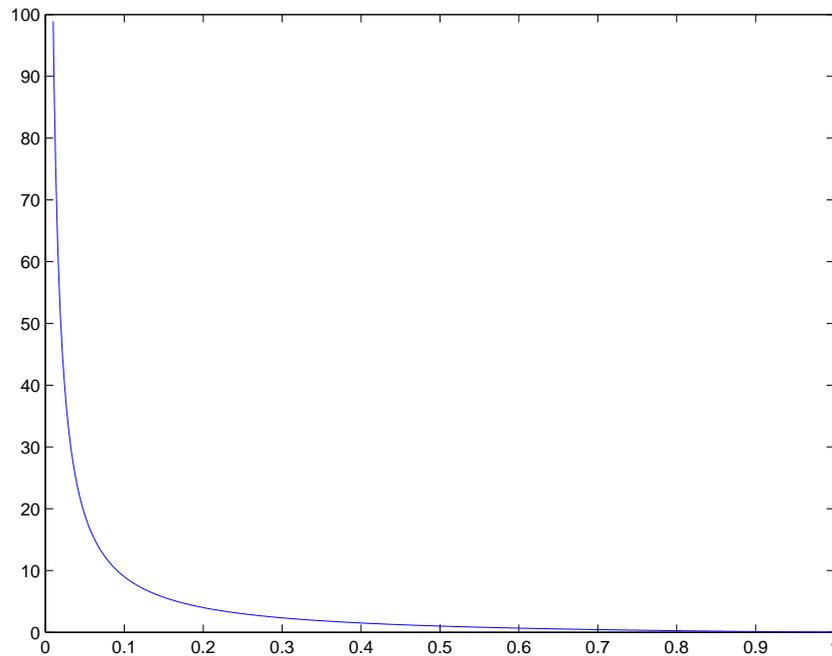
On a donc montré que

$$\forall x \in]0, 1[, \quad \forall y \in [H(x), 1], \quad 0 \leq G'_x(y) \leq 1. \quad (43)$$

Remarquons aussi que G_x laisse l'intervalle $]H(x), 1[$ stable. En effet, compte tenu de la monotonie de G_y , c'est équivalent à

$$\forall x \in]0, 1[, \quad G_x(H(x)) > H(x). \quad (44)$$

Cette propriété est admise.

FIGURE 5. La fonction $g_x(H(x))/H(x) - 1$ sur $]0, 1[$.

On consultera la figure 5 pour s'en convaincre.

Si $x_0 \in [H(x), 1]$, la suite u_n est donc à valeur dans $]H(x), 1[$. Puisqu'elle est strictement croissante, elle est dans un intervalle du type $[H(x) + \eta, 1]$ où $\eta > 0$. D'après la monotonie de G'_x et (43), on a donc

$$\forall y \in [H(x) + \eta, 1], \quad 0 \leq G'_x(y) \leq k \text{ où } k \in [0, 1[. \quad (45)$$

Ainsi, la proposition 3.15 du polycopié de cours s'appliquent : la convergence de la suite u_n pour $x \in]0, 1[$ a lieu vers l'unique point fixe de G_x qui est donc ici égal à 1.

(F) Nous avons déjà montré cette convergence dans le cas particulier de la question 1.

(G) Considérons h définie par

$$\forall y \in \mathbb{R}_+, \quad h(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } y \in [0, 1], \\ +\infty, & \text{si } y \in]1, +\infty[. \end{cases} \quad (46)$$

D'après la définition de h_n , (32), (36), (37) et (39), on a donc démontré que,

$$\forall y \in \mathbb{R}_+, \quad (((x^x)^x)^x)^{x^{\dots}} = \begin{cases} 1, & \text{si } y \in [0, 1], \\ +\infty, & \text{si } y \in]1, +\infty[, \end{cases} \quad (47)$$

l'expression

$$(((x^x)^x)^x)^{x^{\dots}}$$

étant à prendre comme la limite quand n tend vers l'infini de

$$(((x^x)^x)^x)^x,$$

où la puissance est "prise n fois" (par "dessus").

Cette propriété est corroborée par le graphique 6.

Remarque 7. On peut montrer que la convergence de la suite de fonction h_n vers 1 est uniforme sur tout intervalle $[0, \alpha]$ où $\alpha \in [0, 1[$. La convergence uniforme sur $[0, 1]$ n'a pas été étudiée avec cette méthode. Voir le corrigé de la question 3(a)ii et notamment la remarque 8.

(ii) La méthode de la question 3(a)i était surtout intéressante d'un point de vue didactique, puisqu'elle reposait sur l'utilisation du théorème du point fixe. Il est en fait beaucoup plus pertinent d'utiliser la méthode suivante :

(A) Montrons que l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad h_n(x) = x^{(x^n)}. \quad (48)$$

Il suffit en effet de rappeler que

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}_+, \quad (a^b)^c = a^{bc}. \quad (49)$$

En effet, par définition,

$$(a^b)^c = e^{c \ln(a^b)} = e^{c \ln(e^{b \ln a})} = e^{cb \ln a} = a^{bc}.$$

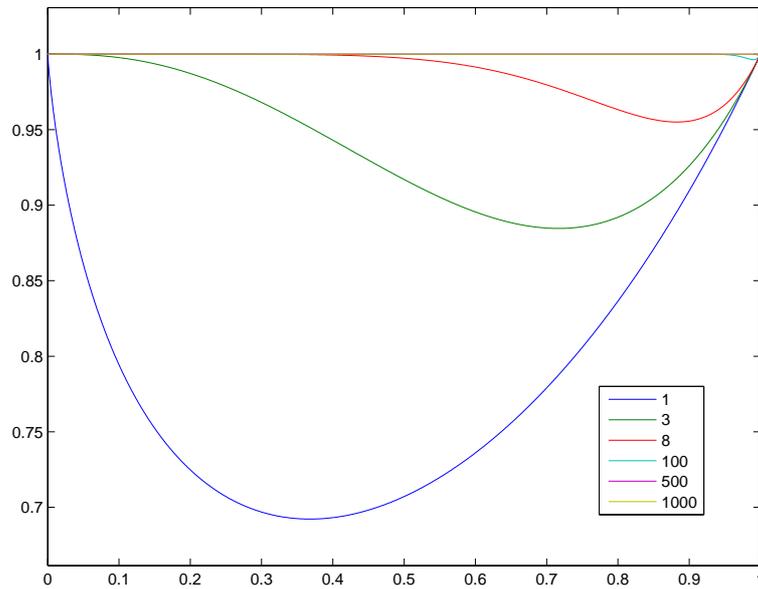
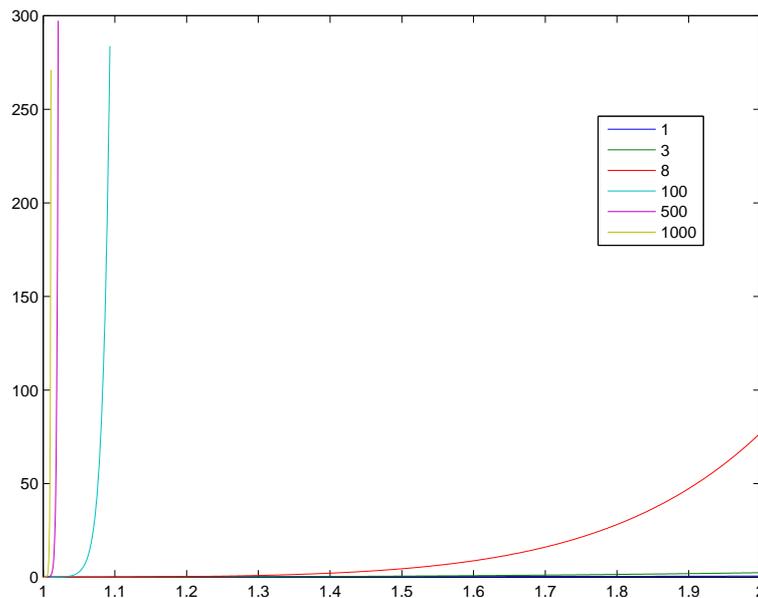
Ainsi, on peut montrer (48), par récurrence sur n . Avec la convention (38), pour $n = 0$, on a bien $h_0(x) = x$. Supposons (48) vraie pour n et montrons-là pour $n + 1$. Par définition, on a

$$h_{n+1}(x) = (h_n(x))^x,$$

et donc, d'après l'hypothèse de récurrence et en utilisant (49), on a

$$h_{n+1}(x) = \left(x^{(x^n)}\right)^x = x^{(x \times x^n)} = x^{(x^{n+1})},$$

ce qui permet de conclure.

(a) : différentes fonctions h_n sur l'intervalle $(0, 1)$.(b) : différentes fonctions $\ln_{10}(h_n)$ sur l'intervalle $(1, 2)$.FIGURE 6. Le comportement de h_n quand n grandit.

On peut aussi écrire (48) sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad h_n(x) = e^{x^n \ln x}. \quad (50)$$

(B) Concluons alors sur la convergence de la suite $h_n(x)$.

- Si $x > 1$, x^n tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini et donc, d'après (50), on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x) = +\infty. \quad (51)$$

- Si $x = 0$ ou $x = 1$, avec la convention (38), on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = 1. \tag{52}$$

- Enfin, si $x \in]0, 1[$, x^n tend vers 0 quand n tend vers l'infini et donc, d'après (50), on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = 1. \tag{53}$$

Remarque 8. On pourrait montrer, grâce à l'expression (50), la convergence uniforme de la fonction h_n vers la fonction constante égale à 1 sur $[0, 1]$.

- (b) On pourra faire tourner la fonction matlab `etudefonctionf.m` pour obtenir les différentes courbes des corrigés de cette question.

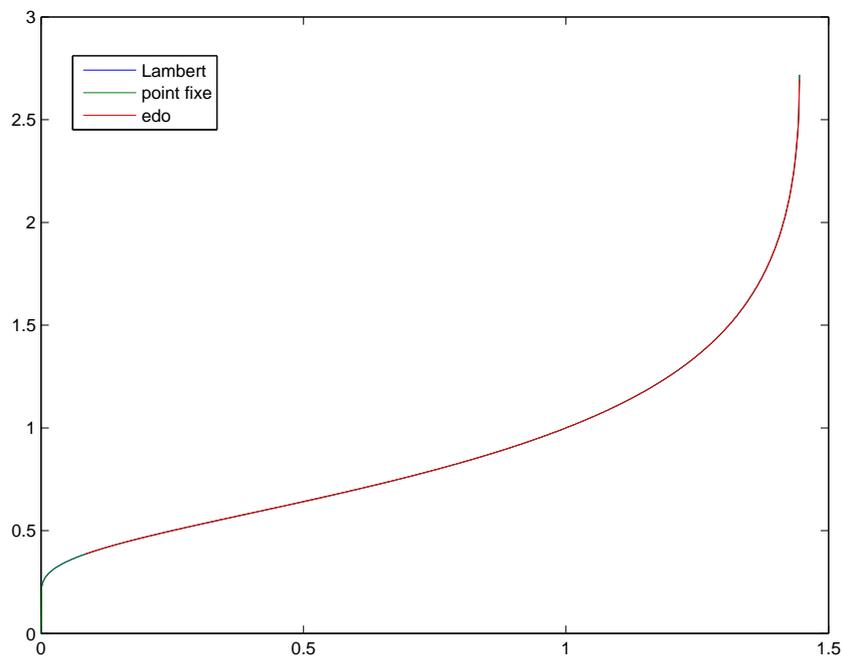


FIGURE 7. La fonction obtenue par résolution d'edo, recherche de point fixe ou en utilisant la fonction de Lambert sur $[0, e^{1/e}]$.

Correction en cours de rédaction

Remarque 9. Dans <https://math.stackexchange.com/questions/1317314/derivative-of-xxx-to-infinity> est établie la propriété suivante : Si y est dérivable, on a

$$\forall x \in [e^{-e}, e^{1/e}], \quad y'(x) = \frac{y^2(x)}{x(1 - y(x) \ln(x))}, \tag{54a}$$

$$y(1) = 1. \tag{54b}$$

Remarque 10. $f_n(x)$ est parfois aussi noté ${}^n x$ ou $x \uparrow \uparrow n$.

Références

[Cam10] J.-B. CAMPESATO. “Sur le problème de la tétration infinie ou infinite power tower”. disponible sur <http://citron.9grid.fr/docs/tetration.pdf>. 2010.

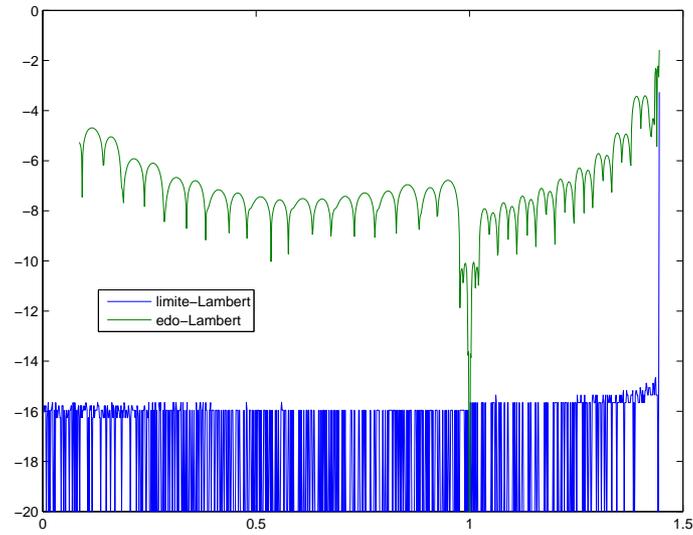


FIGURE 8. Logarithme décimal de l'écart entre les trois modes de calculs de la figure 7.

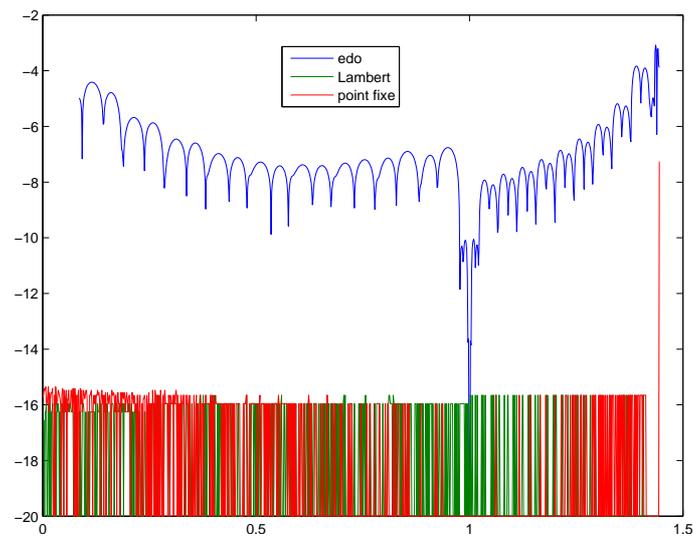


FIGURE 9. Logarithme décimal de l'écart entre $f(x)$ et $x^{f(x)}$ pour les trois modes de calculs de la figure 7.

- [CM84] M. CROUZEIX et A. L. MIGNOT. *Analyse numérique des équations différentielles*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1984, pages viii+171.
- [Kno81] R. A. KNOEBEL. "Exponentials reiterated". In : *The American Mathematical Monthly* 04 (1981), pages 235–252.

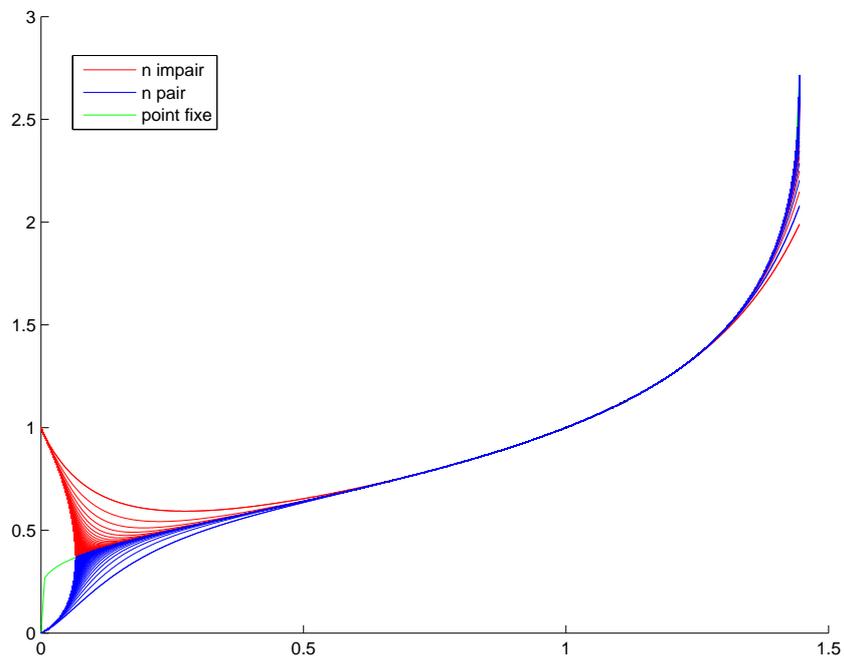


FIGURE 10. Plusieurs fonctions f_n sur $[0, e^{1/e}]$.

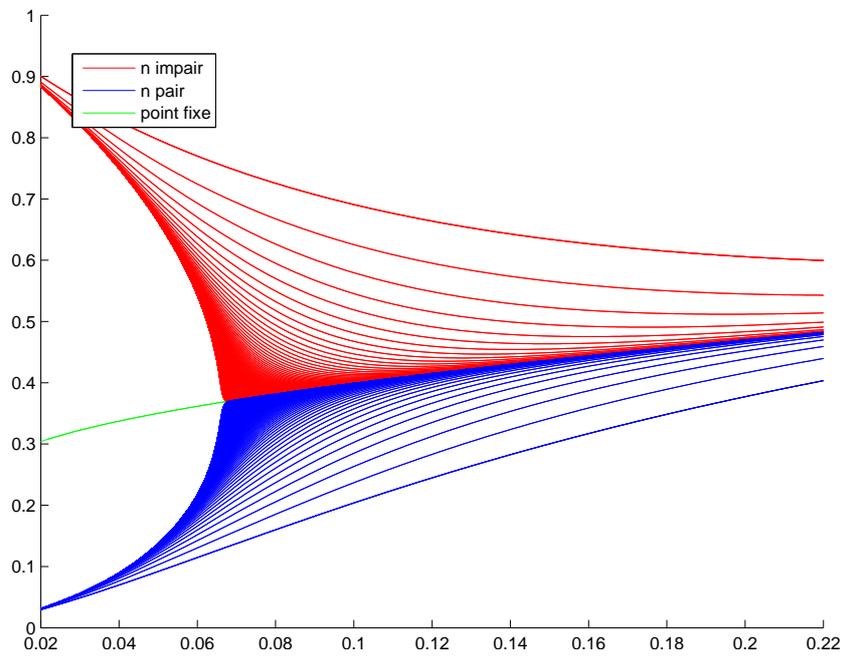


FIGURE 11. Plusieurs fonctions f_n sur $[0.02, 0.22]$.

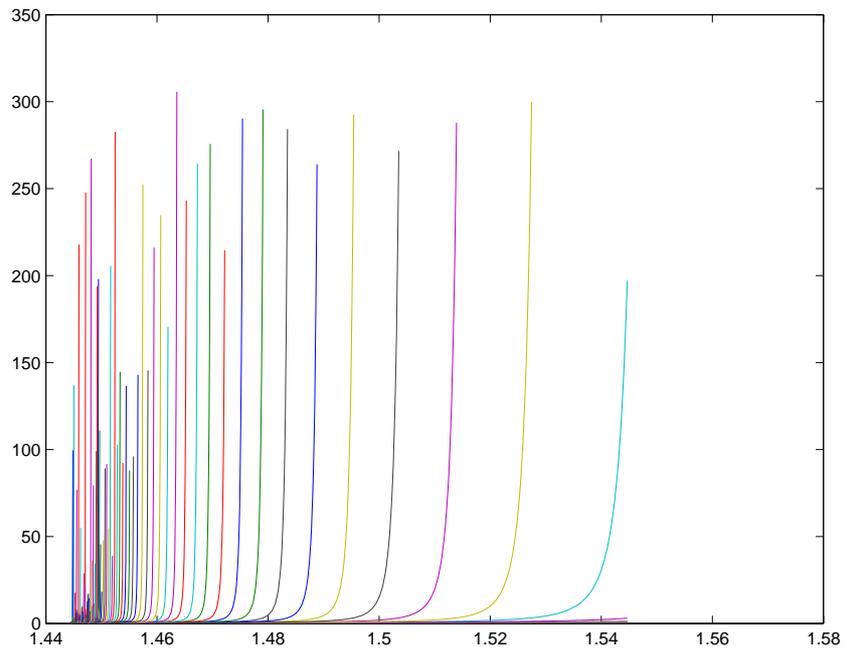


FIGURE 12. Plusieurs fonctions $\ln_{10}(f_n)$ sur $[e^{1/e}, e^{1/e} + 0.1]$.