

**Corrigé de l'examen du 19 Janvier 2021**

Ce corrigé renvoie à des références du cours et des TD qui ont été réactualisés en date du 7 février 2021 ;  
prière de consulter la dernière version disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>

**Correction de l'exercice 1.**

- (1) (a) En utilisant le tableau 2.2 du polycopié de cours, on détermine la valeur approchée avec la méthode élémentaire du trapèze :

$$I^T = 5/2 e^{-1} \quad (1)$$

soit

$$I^T = 0.91969860292861. \quad (2)$$

- (b) On note

$$a = 0, \quad b = 1. \quad (3)$$

Le tableau 2.3 du polycopié de cours fournit l'expression de l'erreur commise avec la méthode élémentaire du trapèze :

$$\mathcal{E}^T = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta), \quad (4)$$

où  $\eta$  appartient à  $]a, b[$ . On vérifie que  $f$  est bien de classe  $\mathcal{C}^2$ . On majore la valeur absolue de  $f''(\eta)$ , par le maximum de la valeur absolue de la dérivée correspondant et la majoration de l'erreur commise est donc donnée par

$$\mathcal{E}^T \leq \frac{(b-a)^3}{12} M_2 \quad (5)$$

Grâce à (3) et et aux valeurs de l'énoncé (3), on déduit donc la majoration de l'erreur commise suivante :

$$\mathcal{E}^T \leq 0.5000000000. \quad (6)$$

- (c) L'erreur réelle commise est égale à

$$|I^T - I| = |0.9066522942283 - 0.9196986029286| = 0.0130463087003$$

qui est inférieure à celle donnée par (6).

- (2) (a) En utilisant le tableau 2.4 du polycopié de cours, on détermine la valeur approchée avec la méthode composite des trapèzes avec  $N = 3$  :

$$I_3^T = 5/6 e^{-1} + \frac{7}{27} e^{-1/3} + \frac{22}{27} e^{-2/3} \quad (7)$$

soit

$$I_3^T = 0.91067345255893. \quad (8)$$

- (b) On note maintenant

$$A = 0, \quad B = 1. \quad (9)$$

Le tableau 2.5 du polycopié de cours fournit l'expression de l'erreur commise avec la méthode composite des trapèzes :

$$\mathcal{E}_3^T = -h^2 \frac{B-A}{12} f''(\eta), \quad (10)$$

où  $\eta$  appartient à  $[A, B]$  et

$$h = \frac{B - A}{N}, \quad (11)$$

soit

$$h = \frac{(1) - (0)}{3},$$

et donc

$$h = 0.3333333333333333. \quad (12)$$

On peut donc écrire

$$|\mathcal{E}_3^T| \leq h^2 \frac{B - A}{12} M_2. \quad (13)$$

En utilisant de nouveau les valeurs de l'énoncé (3), on déduit donc la majoration de l'erreur commise suivante :

$$\mathcal{E}_3^T \leq 5.555556 \cdot 10^{-2}. \quad (14)$$

(c) L'erreur réelle commise est égale à

$$|I_3^T - I| = |0.9066522942283 - 0.9106734525589| = 4.021157 \cdot 10^{-3}$$

qui est inférieure à celle donnée par (14).

(3) Pour que

$$|\mathcal{E}_3^T| \leq \varepsilon,$$

il suffit, d'après (13) que l'on ait :

$$h^2 \frac{B - A}{12} M_2 \leq \varepsilon,$$

soit, d'après (11),

$$\left(\frac{B - A}{N}\right)^2 \frac{B - A}{12} M_2 \leq \varepsilon,$$

soit encore

$$\frac{(B - A)^3}{12\varepsilon} M_2 \leq N^2,$$

et donc

$$N \geq \sqrt{\frac{M_2(B - A)^3}{12\varepsilon}}.$$

Il suffit donc de prendre

$$N = \left\lceil \sqrt{\frac{M_2(B - A)^3}{12\varepsilon}} \right\rceil. \quad (15)$$

où pour tout réel  $X$ ,

$\lceil X \rceil$  est le plus petit entier supérieur ou égal à  $X$ .

Numériquement, on a donc en utilisant de nouveau les valeurs de l'énoncé (3),

$$N = 7072. \quad (16)$$

*Remarque 1.* Avec cette valeur de  $N$ , on a

$$\mathcal{E}_{7072}^T = 0.906652295013924,$$

et l'erreur réelle

$$|\mathcal{E}_{7072}^T - I| = 7.8565487 \cdot 10^{-10},$$

quantité qui est inférieure à  $\varepsilon$  donné par l'équation (5) de l'énoncé.

## Correction de l'exercice 2.

(1) (a) Définissons la fonction  $g$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \cos(x). \quad (17)$$

Posons

$$I = [\cos(1), 1] \quad (18)$$

qui est  $g$ -stable. Voir la définition 3.16 du polycopié de cours du cours. En effet,  $\cos(1) \approx 0.5403023$  appartient à  $[0, \pi/2]$  et 1 appartient à  $[0, \pi/2]$  et puisque  $\cos$  est décroissant sur  $[0, \pi/2]$ , pour tout  $x \in [\cos(1), 1]$ , on a  $\cos(x) \in [\cos(1), \cos(\cos(1))] \approx [\cos(1), 0.8575532] \subset [\cos(1), 1]$ .

*Remarque 2.* On peut aussi montrer cela sans calculer les valeurs approchées. En effet,  $1 \in ]0, \pi/2[$  et donc  $\cos(1) \in ]0, 1[$ . Ainsi,  $[\cos(1), 1] \subset [0, 1] \subset [0, \pi/2]$  et par décroissance de  $\cos$  sur  $[0, \pi/2]$ , on a  $g([\cos(1), 1]) = [\cos(1), \cos(\cos(1))] \subset [\cos(1), 1]$  puisque  $\cos(\cos(1)) \leq 1$  et  $\cos(\cos(1)) \neq 1$ , sinon  $\cos(1) = 0$ .

Si  $u_0 \in \mathbb{R}$ , on a  $u_1 = \cos(u_0) \in [-1, 1]$  et  $u_2$  appartient donc à  $\cos([-1, 1]) = \cos([0, 1]) = [\cos(1), \cos(0)] = I$ . Donc,

$$n \geq 2, \quad u_n \in I, \quad (19)$$

ce que l'on montre par récurrence, puisque  $I$  est  $g$ -stable. Si la suite  $u_n$  converge, la fonction  $g$  étant continue, c'est nécessairement vers un point fixe de  $g$ . Définissons la fonction  $h$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = x - \cos(x). \quad (20)$$

Puisque  $h(\cos(1))h(1) \approx -0.1458395 < 0$ , la fonction  $h$  étant continue, cela implique que  $h$  admet au moins une racine sur  $[\cos(1), 1]$  et donc  $g$  admet au moins un point fixe, noté  $\alpha$  et on vérifie que

$$\alpha \in I \quad (21)$$

On montrera plus bas que  $\alpha$  est unique.

*Remarque 3.* Un autre choix consiste à choisir

$$I = [1/2, 1]. \quad (22)$$

Si  $u_0 \in \mathbb{R}$ , on a  $u_1 = \cos(u_0) \in [-1, 1]$  et  $u_2$  appartient donc à  $\cos([-1, 1]) = \cos([0, 1]) = [\cos(1), \cos(0)]$ , qui est inclus dans  $I$ . En effet, on a  $0 < 1 < \pi/3 < \pi/2$  et donc  $\cos(1) > \cos(\pi/3) = 1/2$ . De plus,  $I$  est  $g$ -stable. En effet, si  $x$  est dans  $[1/2, 1]$ , on a  $\cos(x)$  dans  $[\cos(1), \cos(1/2)]$  inclus dans  $[\cos(\pi/3), \cos(0)] = I$ . Ainsi, (19) reste vraie. Enfin, (21) reste vraie puisque  $h(1/2)h(1) \approx -0.1735738 < 0$ .

Par la suite, on pourra donc supposer (quitte à appliquer la règle (26)) que  $u_2$  appartient à  $I$ .

(b) On peut donc maintenant conclure sur la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

On a, pour tout  $x \in I$ ,  $|g'(x)| = |\sin(x)|$ . La fonction  $\sin$  est croissante sur  $I = [\cos(1), 1]$  et est comprise, sur cet intervalle, entre  $\sin(\cos(1)) \approx 0.5143953$  et  $\sin(1) \approx 0.8414710$ . L'inégalité de l'hypothèse (3.39b) du cours est donc vraie avec

$$k = \sin(1). \quad (23)$$

Il suffit donc d'appliquer la proposition 3.17 du cours qui implique à la fois la convergence de la suite et l'existence et l'unicité du point fixe  $\alpha$  de  $g$ .

*Remarque 4.* Le choix de  $I$  donné par (22) serait aussi valable.

*Remarque 5.* On aurait pu se passer de l'utilisation de la proposition 3.17 du cours et montrer la convergence de la suite à la main, en raisonnant comme suit :

(i)

Étudions donc tout d'abord la fonction  $g$ , définie par (17). Si on définit la fonction  $h$  par (20), alors, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = 1 + \sin(x), \quad (24)$$

qui est positive sur  $\mathbb{R}$  et nulle pour  $x = \pi/2 + 2k\pi$  où  $k$  entier. De plus  $h(\pm\infty) = \pm\infty$ . Ainsi  $h$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et n'admet qu'un seul zéro, noté  $\alpha$  et qui est donc l'unique point fixe de  $g$ .

(ii)

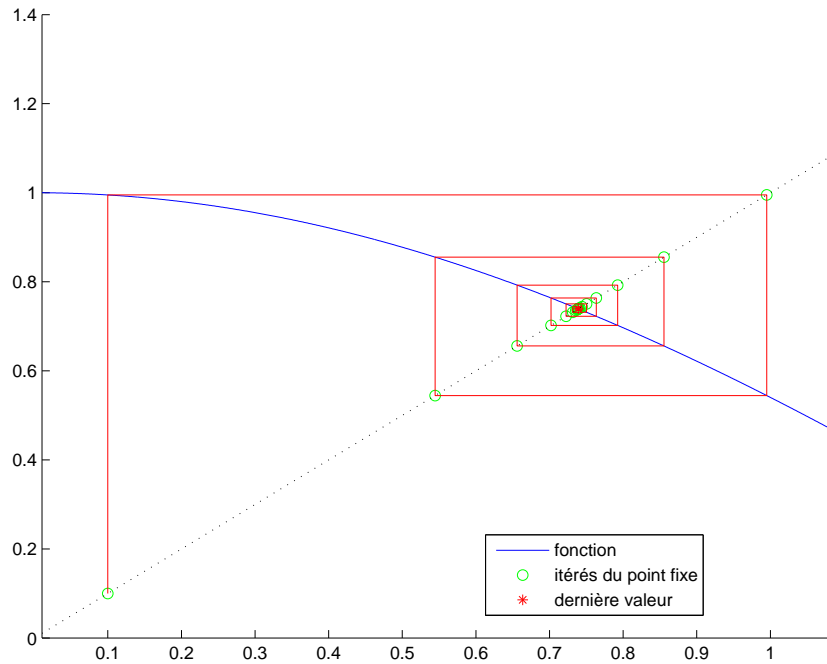


FIGURE 1. Le tracé graphique des valeurs de  $u_n$  pour  $u_0 = 0.100$ .

Voir par exemple les figures 1 et 2

On a, pour tout  $x \in I$ ,

$$x > \alpha \implies g(x) < \alpha, \quad (25a)$$

$$x < \alpha \implies g(x) > \alpha. \quad (25b)$$

En effet, si  $x \in ]\alpha, 1[ \subset ]0, \pi/2]$ , puisque  $g = \cos$  est décroissante sur  $[0, \pi/2]$ , on a  $g(x) \in ]\cos(1), \cos \alpha]$  et donc  $g(x) < \alpha$ . Il en est de même si  $x < \alpha$ . On peut supposer sans perte de généralité que  $u_0 \in I$ , quitte à appliquer la règle suivante :

$$\text{on remplace } u_0 \text{ par } u_2. \quad (26)$$

Ainsi, si  $u_0 = \alpha$ , alors la suite  $u_n$  est constante et égale à  $\alpha$ . Sinon, si  $u_0 < \alpha$ , alors d'après (25),  $u_1 = g(u_0) > \alpha$  et  $u_2 < \alpha$  et par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n} \in [\cos(1), \alpha[, \quad u_{2n+1} \in ]\alpha, 1]. \quad (27)$$

De même, on montre que, si  $u_0 > \alpha$ ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n+1} \in [\cos(1), \alpha[, \quad u_{2n} \in ]\alpha, 1]. \quad (28)$$

Enfin, si on pose

$$f(x) = g(g(x)) - x, \quad (29)$$

on a

$$f'(x) = g'(g(x))g'(x) - 1$$

et donc

$$f'(x) = \sin(\cos(x)) \sin(x) - 1. \quad (30)$$

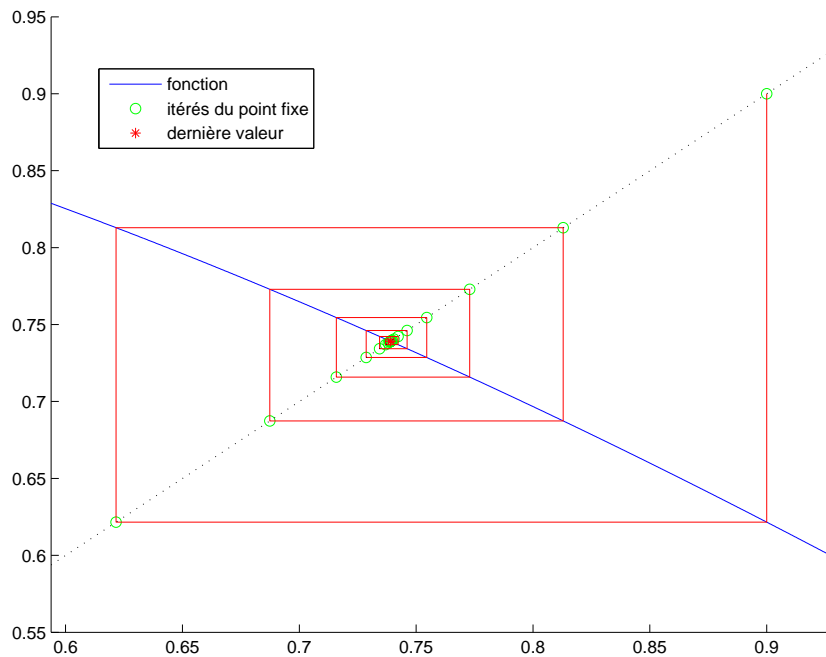


FIGURE 2. Le tracé graphique des valeurs de  $u_n$  pour  $u_0 = 0.900$ .

Pour  $x \in I$ ,  $\cos(x) \in I$ ,  $\sin(x) \in [\sin(\cos(1)), \sin(1)]$  et  $\sin(\cos(x)) \in [\sin(\cos(1)), \sin(1)] \approx [0.5143953, 0.8414710]$ . On a donc  $\sin(\cos(x))\sin(x) < \sin^2(1)$  et  $f'(x) \leq \sin^2(1) - 1 \approx -0.2919266 < 0$  et donc  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ . Or  $f(\alpha) = g(g\alpha) - \alpha = 0$ , donc pour tout  $x \in I$

$$x > \alpha \implies g(g(x)) < x, \tag{31a}$$

$$x < \alpha \implies g(g(x)) > x. \tag{31b}$$

*Remarque 6.* Comme précédemment, on peut montrer cela sans les valeurs numériques. En effet, si  $x \in [\cos(1), 1]$ , on a  $\cos(x) \in [\cos(1), 1] \subset ]0, 1[$  et donc  $\sin(\cos(x)) \in ]0, 1[$ . Il en est de même pour  $\sin(x)$ . Ainsi, en particulier  $0 < \sin(\cos(x))\sin(x) < 1$  et  $f'(x) < 0$ .

*Remarque 7.* Ce raisonnement est encore valable pour le choix (22).

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $u_{2n} < \alpha$ , alors, d'après (31), on a  $u_{2n+2} > u_{2n}$ . En combinant cela, (27) et (28), on montre donc par récurrence que si  $u_0 < \alpha$ ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n} \in [\cos(1), \alpha[ \text{ et la suite } u_{2n} \text{ est croissante;} \tag{32a}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n+1} \in ]\alpha, 1] \text{ et la suite } u_{2n+1} \text{ est décroissante;} \tag{32b}$$

De même, si  $u_0 > \alpha$ ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n+1} \in [\cos(1), \alpha[ \text{ et la suite } u_{2n+1} \text{ est croissante;} \tag{33a}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n} \in ]\alpha, 1] \text{ et la suite } u_{2n} \text{ est décroissante;} \tag{33b}$$

Dans tous les cas, les deux suites  $u_{2n}$  et  $u_{2n+1}$  sont monotones, bornées (car dans  $I$ ) et donc convergentes, chacune vers un zéro de  $f$ , puisque à la limite  $f(l) = g(g(l)) - l = 0$ . Puisque  $f$  est strictement décroissante,  $f$  n'admet au plus qu'un seul zéro; or  $\alpha$  est un zéro de  $f$  donc les deux suites  $u_{2n}$  et  $u_{2n+1}$  convergent toutes les deux vers  $\alpha$  et  $u_n$  aussi.

*Remarque 8.* Ce résultat pouvait être démontré en utilisant la proposition I.2 du polycopié de cours.

◇

(c) (i) On pose

$$\varepsilon_1 = 10^{-1} \text{ et } \varepsilon_2 = 10^{-15}. \tag{34}$$

On considère la valeur de  $k$  donnée par (23) et  $a$  et  $b$  définis par

$$a = \cos(1) \text{ et } b = 1. \quad (35)$$

Utilisons la proposition 3.19 du cours. Ainsi, les deux entiers  $n_1$  et  $n_2$  tels que  $|u_n - l| \leq \varepsilon_1$  et  $|u_n - l| \leq \varepsilon_2$  sont donnés respectivement par

$$n_1 = 9 \text{ et } n_2 = 196. \quad (36)$$

Attention, puisque que  $u_0$ , n'est pas dans l'intervalle  $I = [a, b]$  et puisque l'on a appliqué la règle (26), il faut rajouter 2 à chacun des entiers définis précédemment de sorte que

$$n_1 = 11 \text{ et } n_2 = 198. \quad (37)$$

(ii)

| $n$ | $u_n$              |
|-----|--------------------|
| 0   | 10.000000000000000 |
| 1   | -0.839071529076452 |
| 2   | 0.668153917531387  |
| 3   | 0.784966720933852  |
| 4   | 0.707411791257438  |
| 5   | 0.760046415906649  |
| 6   | 0.724804033046625  |
| 7   | 0.748629360225378  |
| 8   | 0.732622462482921  |
| 9   | 0.743423001354606  |
| 10  | 0.736156148510940  |
| 11  | 0.741054959438722  |

TABLE 1. 12 premières valeurs de la méthode du point fixe pour  $g(x) = \cos(x)$ .

Donnons dans le tableau (1), les  $n_1 + 1$  premières valeurs de  $u_n$ .

Rappelons que  $\alpha$ , unique solution de  $x = \cos(x)$  déterminé de façon exacte<sup>1</sup>, est donné par

$$\alpha = 0.7390851332151606$$

On a

$$|\alpha - u_{n_1}| \approx 1.9698 \cdot 10^{-3},$$

ce qui est bien inférieur à la valeur de  $\varepsilon_1 = 10^{-1}$  donnée dans l'énoncé.

On pourrait remarquer que pour  $n = 198$ , on a

$$|\alpha - u_n| \approx 3.9540 \cdot 10^{-16},$$

ce qui est strictement inférieur à la valeur de  $\varepsilon_2 = 10^{-15}$  donnée dans l'énoncé.

- (2) (a) La seule méthode connue d'ordre strictement plus grand que 1 est, dans ce cours, la méthode de Newton, censée être quadratique, donc convergeant plus rapidement que la méthode du point fixe précédemment et qui n'est que linéaire.

1. en fait très précise grâce à l'une des fonction `solve` ou `fzero` de matlab.

- (b) On rappelle que la fonction  $h$  est définie par (20). La valeur de  $\alpha$  définie dans la question (1) est donc un zéro de la fonction  $h$  qui est unique sur  $\mathbb{R}$  d'après l'étude faite dans la remarque 5 page 3 et qui comme précédemment est noté  $\alpha$ . Pour l'intervalle  $I$  définie par

$$I = [0, \pi/2], \quad (38)$$

on a

$$\text{signe}(h(0)h(\pi/2)) = -1, \quad (39)$$

et l'unique zéro de  $h$  est donc dans l'intérieur de l'intervalle  $I$ . La relation liant  $w_{n+1}$  à  $w_n$  est donnée par la définition (3.90) du polycopié de cours appliquée à la fonction  $h$ . On a donc ici d'après (20) et (24),

$$x - \frac{h(x)}{h'(x)} = x - \frac{x - \cos(x)}{1 + \sin(x)} = \frac{x + x \sin(x) - x + \cos(x)}{1 + \sin(x)},$$

et donc

$$w_{n+1} = G(w_n), \quad (40a)$$

où

$$G(x) = \frac{x \sin(x) + \cos(x)}{1 + \sin(x)}. \quad (40b)$$

- (c) Cette correction est très proche de la la correction de l'exercice 3.3 page 39 de TD et notamment de la question 2 page 39 auxquelles on renvoie pour plus de détail.

- (i) Voir la proposition 3.51 du cours. On y a vu que la la méthode de Newton est quadratique ssi  $h'(\alpha) \neq 0$  et si  $h''(\alpha) \neq 0$ . On sait que  $h'(\alpha)$  est non nul, (d'après la question 1 puisque  $h' > 0$ ), et le cours assure que  $G'(\alpha) = 0$ . Ainsi, la méthode est au moins quadratique.

De plus, elle est exactement quadratique si et seulement si  $G''(\alpha) \neq 0$ , ce qui est équivalent à  $h''(\alpha) \neq 0$ .

D'après (24),  $h'$  est on nul à l'intérieur de l'intervalle  $I$  auquel on sait que la racine  $\alpha$  appartient. Ainsi, d'après la proposition 3.51 du polycopié de cours, la méthode de Newton est au moins quadratique. Enfin, d'après (24), on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h''(x) = \cos(x), \quad (41)$$

qui est non nul à l'intérieur de l'intervalle  $I$  à laquelle on sait que la racine  $\alpha$  appartient.

Ainsi, d'après la proposition 3.51 du polycopié de cours, la méthode de Newton est exactement quadratique.

- (ii) Voir les propositions 3.35 et 3.51 du cours.

On y a vu que le développement de Taylor de la fonction  $g$  sur  $[x^*, x_n]$  permet de montrer que

$$|x_{n+1} - x^*| \leq D |x_n - x^*|^2, \quad (42)$$

avec

$$D = \frac{1}{2} \max_{x \in I} |G''(x)| \quad (43)$$

en admettant d'abord *a priori* que la suite  $x_n$  converge et que les  $x_n$  sont dans l'intervalle  $I$ .

La constante  $D$  est donnée par la formule (3.96) du cours qui peut aussi être remplacée avantageusement par (3.100).

*Remarque 9.* Justifions maintenant rigoureusement la convergence de la suite  $w_n$  pour tout  $x_0$  appartenant à  $I$ . Il suffit pour cela d'invoquer la proposition R.1 du polycopié de cours, appliquée à la fonction  $h$ , dont les différentes hypothèses sont vérifiées sur l'intervalle  $I$ . En effet, :

- (A) l'hypothèse 1) est clairement vérifiée;

- (B) l'hypothèse 2) est clairement vérifiée d'après (39) ;  
 (C) l'hypothèse 3) est vérifiée d'après (24), puisque le sinus est positif ou nul sur  $I$  ;  
 (D) l'hypothèse 4) est vérifiée d'après (41). Attention, en  $\pi/2$ , le cosinus s'annule mais on peut montrer que si on part de  $x_0 = \pi/2$  ou de  $x_0 < \pi/2$ , on reste dans tous les cas dans un intervalle strictement inclus dans  $[0, \pi/2[$ .  
 (E) l'hypothèse 5) est vérifiée d'après les valeurs numériques suivantes :

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1} \frac{|h(0)|}{|h'(0)|} \approx 0.63661977236758 < 1,$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1} \frac{|h(\frac{\pi}{2})|}{|h'(\frac{\pi}{2})|} \approx 0.50000000000000 < 1.$$

◇

- (iii) Il suffit de raisonner comme dans la question 4 page 39 de la correction de l'exercice de TD 3.3 ou dans la proposition 3.30 du polycopié de cours.

La constante  $D$  est donnée par la formule (3.100) du cours qui fournit donc sur l'intervalle  $I$  :

$$D = \max_{x \in I} \frac{|\cos(x)|}{|1 + \sin(x)|}.$$

On a donc, pour tout  $x \in I = [0, \pi/2]$  :

$$\frac{|\cos(x)|}{|1 + \sin(x)|} = \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)} \leq \frac{\cos(x)}{1} \leq \cos x \leq 1.$$

Dans ce cas, il est nécessaire pour appliquer la proposition 3.30 du polycopié de cours que la majoration (3.51) du polycopié de cours soit vérifiée ; or, ici, en prenant  $e_0 = \pi/2$  et  $p = 2$  (méthode quadratique), on a

$$|e_0|D^{\left(\frac{1}{p-1}\right)} = \frac{\pi}{2},$$

qui n'est pas majoré strictement par 1. Si au contraire, on se place sur l'intervalle  $J = [\nu, \pi/2 - \nu]$  avec  $0 < \nu < \pi/4$ , on a clairement pour tout  $x \in J$  :

$$\frac{|\cos(x)|}{|1 + \sin(x)|} = \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)}$$

et donc

$$D \leq \frac{\cos(\nu)}{1 + \sin \nu}. \quad (44)$$

Avec le choix de  $\nu$  donné dans l'énoncé, on vérifie d'une part que la proposition R.1 du polycopié de cours, s'applique pour la fonction  $h$ , comme fait dans la remarque 9, et d'autre part que l'on a bien, d'après (44), le résultat donné dans l'énoncé :

$$D \leq 0.73741536. \quad (45)$$

◇

Dans ce cas, la majoration (3.51) du polycopié de cours est vérifiée puisque numériquement en prenant  $p = 2$  (méthode quadratique), on a

$$\left(\frac{\pi}{2} - 2\nu\right) D^{\left(\frac{1}{p-1}\right)} = 0.715880114974; \quad (46)$$

et on peut donc appliquer la proposition 3.30 du polycopié de cours. Il ne reste plus qu'à appliquer l'équation (3.53) du polycopié de cours rappelée ici :

$$n = \left\lceil \frac{1}{\ln p} \ln \left( \frac{\ln \frac{\varepsilon}{\gamma}}{\ln \delta} \right) \right\rceil, \quad (47)$$

avec  $\gamma$  et  $\delta$  définis par l'équation (3.49) du polycopié de cours c'est-à-dire

$$\gamma = C^{\left(\frac{1}{1-p}\right)}, \quad (48a)$$

$$\delta = |e_0|C^{\left(\frac{1}{p-1}\right)}, \quad (48b)$$



Numériquement, on a pour  $p = 2$ , on a pour  $|e_0| = \frac{\pi}{2} - 2\nu$ , on a

$$\begin{aligned} \gamma &= 0.737415351928, \\ \delta &= 0.715880114974. \end{aligned}$$

puis pour les deux entiers  $m_1$  et  $m_2$ , associé à  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ , on a

$$\begin{aligned} m_1 &= 3, \\ m_2 &= 7, \end{aligned}$$

qui sont des valeurs beaucoup plus faibles que celles données par (36)! Cela nous montre *a posteriori* l'efficacité accrue de la méthode de Newton!

(iv) Concluons par des simulations numériques.

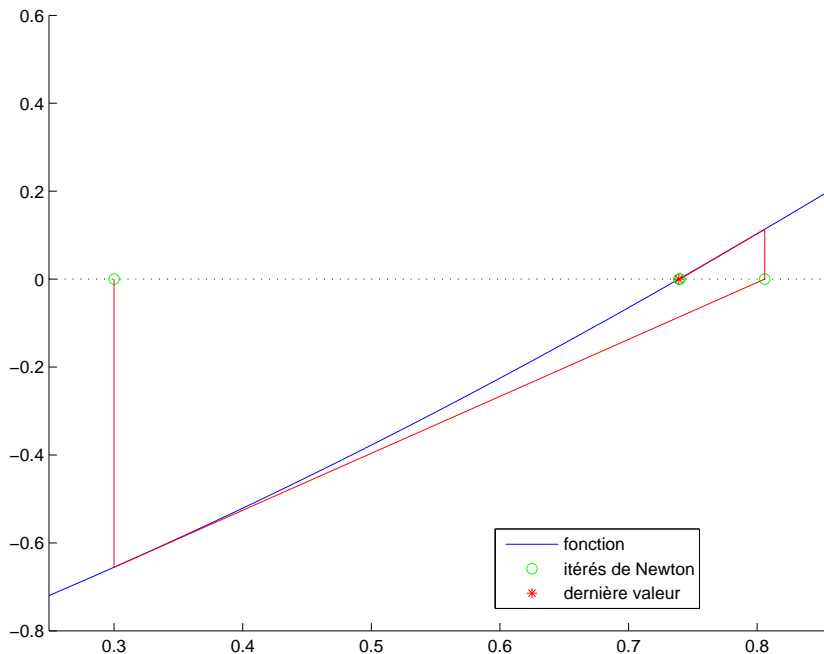


FIGURE 3. Le tracé graphique des valeurs de  $w_n$  de la méthode de Newton pour  $w_0 = 0.3000$ .

| $n$ | $w_n$              |
|-----|--------------------|
| 0   | 0.3000000000000000 |
| 1   | 0.805848141739496  |
| 2   | 0.740002131837112  |
| 3   | 0.739085318708854  |
| 4   | 0.739085133215168  |
| 5   | 0.739085133215161  |

TABLE 2. 6 premières valeurs de la méthode de Newton.

Voir la figure 3 page précédente et le tableau 2 page précédente

Enfin, on a

$$|\alpha - u_{m_1}| \approx 9.1699 \cdot 10^{-4},$$

ce qui est bien inférieur à la valeur de  $\varepsilon_1 = 10^{-1}$  donnée dans l'énoncé.

On pourrait remarquer que pour  $n = 5$ , on a

$$|\alpha - u_n| \approx 3.0638 \cdot 10^{-17},$$

ce qui est strictement inférieur à la valeur de  $\varepsilon_2 = 10^{-15}$  donnée dans l'énoncé.

### Correction de l'exercice 3.

En posant  $\xi_0 = 1$  et

$$f(t, y) = 2y,$$

l'équation différentielle

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T], \quad y'(t) &= 2y(t), \\ y(0) &= 1, \end{aligned}$$

est équivalente à

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T], \quad y'(t) &= f(t, y(t)), \\ y(0) &= \xi_0. \end{aligned}$$

On calcule pour  $n \in \{1, \dots, N = 5\}$ , les approximations  $y_n \approx y(t_n)$ .

| $n$ | $y_n$      |
|-----|------------|
| 0   | 1.00000000 |
| 1   | 1.20000000 |
| 2   | 1.44000000 |
| 3   | 1.72800000 |
| 4   | 2.07360000 |
| 5   | 2.48832000 |

TABLE 3. Solutions approchées avec Euler explicite

| $n$ | $y_n$      |
|-----|------------|
| 0   | 1.00000000 |
| 1   | 1.25000000 |
| 2   | 1.56250000 |
| 3   | 1.95312500 |
| 4   | 2.44140625 |
| 5   | 3.05175781 |

TABLE 4. Solutions approchées avec Euler implicite

Les résultats sont donnés dans les tableaux 3 et 4, obtenus en utilisant les définitions 4.13 du polycopié de cours et 4.14 du polycopié de cours.

On pourra pour avoir plus de détails sur cet exercice consulter [BM03, Exercice 5.6 et sa correction pages 214 et 320].

## Références

- [BM03] J. BASTIEN et J.-N. MARTIN. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab*. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4 ième étage). Voir <https://www.dunod.com/sciences-techniques/introduction-analyse-numerique-applications-sous-matlab>. Paris : Dunod, 2003. 392 pages.