Corrigé de l'examen de TD du 10 Novembre 2020

Correction de l'exercice 1.

(1) Après calculs élémentaires, on obtient la forme canonique de p donnée par

$$p(x) = 3\,x^2 - 7\,x + 5. \tag{1}$$

(2) Les valeurs de p aux points $(x_i)_{0\leq i\leq 2}$ sont donc données par $(y_i)_{0\leq i\leq 2}$ avec

$$y_0 = 1, \quad y_1 = 3, \quad y_2 = 11. \tag{2}$$

(3) Il est naturellement préférable d'utiliser la forme de Newton pour le calcul de l'interpolation, néanmoins, le calcul utilisant la forme de Lagrange est aussi présenté.

(a) Chacun des polynômes de Lagrange l_i (de degré 2) est donné par la formule :

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \tag{3}$$

On a donc successivement

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x-2)\,(x-3)}{(1-2)\,(1-3)},\\
l_1(x) &= \frac{(x-1)\,(x-3)}{(2-1)\,(2-3)},\\
l_2(x) &= \frac{(x-1)\,(x-2)}{(3-1)\,(3-2)}.
\end{aligned}$$

soit encore après calculs :

$$l_0(x) = 1/2\,x^2 - 5/2\,x + 3, \tag{4a}$$
$$l_1(x) = -x^2 + 4\,x - 3, \tag{4b}$$
$$l_2(x) = 1/2\,x^2 - 3/2\,x + 1. \tag{4c}$$

Ensuite, le polynôme interpolateur de degré 2, $\Pi_2(p)$, est donné par la formule :

$$\Pi_2(p)(x) = \sum_{i=0}^{n} p(x_i) l_i(x). \tag{5}$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_2(p)(x) = p(x_0)l_0(x) + p(x_1)l_1(x) + p(x_2)l_2(x).$$

Après calculs, il vient :

$$\Pi_2(p)(x) = 3\,x^2 - 7\,x + 5. \tag{6}$$

$x_i \setminus k$	0	1	2
$x_0 = 1$	$\boxed{1}$		
		$\boxed{2}$	
$x_1 = 2$	3		$\boxed{3}$
		8	
$x_2 = 3$	11		

TABLE 1. Différences divisées de p.

(b)

Pour calculer le polynôme sous la forme de Newton, on détermine tout d'abord les différences divisées $p[x_i, ..., x_{i+k}]$ données dans le tableau 1. Ensuite, on n'utilise plus que les différences divisées qui sont encadrées et le polynôme interpolateur est donné par la formule :

$$\Pi_2(p)(x) = \sum_{i=0}^{n} p[x_0, ..., x_i](x - x_0)...(x - x_{i-1}). \tag{7}$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_2(p)(x) = p[x_0] + p[x_0, x_1](x - x_0) + p[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

On a successivement

$$x - x_0 = x - 1,$$
$$(x - x_0)(x - x_1) = x^2 - 3\,x + 2.$$

Après calculs, on retrouve donc bien le polynôme déterminé par la méthode de Lagrange (voir équation (6)).

(4) On peut constater *a posteriori* que le polynôme recherché donné par (6) correspond exactement au polynôme défini par l'équation par (1). Cela est tout à fait normal !

- Remarquons tout d'abord que le polynôme p étant de degré 2, il est égal à son pôlynôme interpolateur Π_2 ! Ainsi, les calculs des questions 2 et 3 étaient en fait inutiles ! On pouvait tout de suite écrire (avec la totalité des points !) cela !
- Remarquons aussi que le polynôme donné par l'équation (1) de l'énoncé était en fait donné sous sa forme de Newton (7) et que les différences divisées données dans le tableau 1 correspondaient tout simplement aux coefficients donnés dans l'énoncé, ici égaux à $\{1, 2, 3\}$. Ainsi, même les calculs de la question 1 étaient inutiles !

Correction de l'exercice 2.

La correction de cet exercice est grandement simplifiée par le fait que le polynôme donné est de degré 2 et que sa dérivée seconde est constante. Les erreurs d'intégration élémentaire ou composite sont donc exactement connues ! De plus, les erreurs réelles commises sont égales à ces mêmes erreurs. On pourra comparer, à ce titre, l'erreur donnée dans l'inéquation (16) à celle donnée dans la question 1)c) ii) ainsi que l'erreur donnée dans l'inéquation (25) à celle donné dans la question 2)c).

(1) (a) En utilisant le tableau 2.2 du polycopié de cours, on détermine la valeur approchée avec la méthode élémentaire du trapèze :

$$I^T = 2 \tag{8}$$

soit

$$I^T = 2. \tag{9}$$

(b) On obtient les dérivées successives de f :

$$f'(x) = 1 + 2\,x\,; \tag{10a}$$
$$f''(x) = 2. \tag{10b}$$

On en déduit

$$M_2 = \max_{x\in[0,1]} \left|f^{(2)}(x)\right|, \tag{11}$$

le maximum de la valeur absolue de la dérivée 2-ième de f sur l'intervalle d'étude, donné numériquement par

$$M_2 = 2. \tag{12}$$

On note

$$a = 0, \quad b = 1. \tag{13}$$

Le tableau 2.3 du polycopié de cours fournit l'expression de l'erreur commise avec la méthode élémentaire du trapèze :

$$\mathcal{E}^T = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta), \tag{14}$$

où η appartient à $]a, b[$. On vérifie que f est bien de classe $\mathcal{C}^2$. On majore la valeur absolue de $f''(\eta)$, par le maximum de la valeur absolue de la dérivée correspondant et la majoration de l'erreur commise est donc donnée par

$$\mathcal{E}^T \leq \frac{(b-a)^3}{12} M_2 \tag{15}$$

Grâce à (13) et (12), on déduit donc la majoration de l'erreur commise suivante :

$$\mathcal{E}^T \leq 0.1666666667. \tag{16}$$

(c) (i) On obtient

$$I = \frac{11}{6}. \tag{17}$$

(ii) L'erreur réelle commise est égale à

$$\left|I^T - I\right| = |1.8333333333333 - 2| = 0.1666666666667$$

qui est inférieure à celle donnée par (16).

(2) (a) En utilisant le tableau 2.4 du polycopié de cours, on détermine la valeur approchée avec la méthode composite des trapèzes avec $N = 3$:

$$I_3^T = \frac{50}{27} \tag{18}$$

soit

$$I_3^T = 1.85185185185185. \tag{19}$$

(b) On note maintenant

$$A = 0, \quad B = 1. \tag{20}$$

Le tableau 2.5 du polycopié de cours fournit l'expression de l'erreur commise avec la méthode composite des trapèzes :

$$\mathcal{E}_3^T = -h^2 \frac{B-A}{12} f''(\eta), \tag{21}$$

où η appartient à $[A, B]$ et

$$h = \frac{B-A}{N}, \tag{22}$$

soit

$$h = \frac{(1)-(0)}{3},$$

et donc

$$h = 0.3333333333333. \tag{23}$$

On peut donc écrire

$$\left|\mathcal{E}_3^T\right| \leq h^2 \frac{B-A}{12} M_2. \tag{24}$$

En utilisant de nouveau (12), on déduit donc la majoration de l'erreur commise suivante :

$$\mathcal{E}_3^T \leq 1.851852\,10^{-2}. \tag{25}$$

(c) L'erreur réelle commise est égale à

$$\left|I_3^T - I\right| = |1.8333333333333 - 1.8518518518519| = 1.851852\,10^{-2}$$

qui est inférieure à celle donnée par (25).

(3) Pour que

$$\left|\mathcal{E}_3^T\right| \leq \varepsilon,$$

il suffit, d'après (24) que l'on ait :

$$h^2 \frac{B-A}{12} M_2 \leq \varepsilon,$$

soit, d'après (22),

$$\left(\frac{B-A}{N}\right)^2 \frac{B-A}{12} M_2 \leq \varepsilon,$$

soit encore

$$\frac{(B-A)^3}{12\varepsilon} M_2 \leq N^2,$$

et donc

$$N \geq \sqrt{\frac{M_2 (B-A)^3}{12\varepsilon}}.$$

Il suffit donc de prendre

$$N = \left\lceil \sqrt{\frac{M_2 (B-A)^3}{12\varepsilon}} \right\rceil. \tag{26}$$

où pour tout réel X,

$$\lceil X \rceil \text{ est le plus petit entier supérieur ou égal à } X.$$

Numériquement, on a donc en utilisant de nouveau (12),

$$N = 4083. \tag{27}$$

Remarque 1. Avec cette valeur de N, on a

$$\mathcal{E}_{4083}^T = 1.833333343330803,$$

et l'erreur réelle

$$\left|\mathcal{E}_{4083}^T - I\right| = 9.9974696\,10^{-9},$$

quantité qui est inférieure à ε donné par l'équation (4) de l'énoncé.

Correction de l'exercice 3.
On renverra aussi au corrigé de l'exercice 1.1 de TD et à l'annexe A de ce même corrigé.
Il est légitime de considérer que si I et J sont deux ensembles finis non vides et disjoints, on a

$$\sum_{i\in I\cup J} x_i = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in J} x_i \tag{28}$$

Si on applique formellement (28) à J vide, on aurait donc, puisque $I\cup\emptyset = I$

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in \emptyset} x_i$$

et donc on a, par soustraction

$$\sum_{i\in \emptyset} x_i = 0,$$

ce qui légitime de choisir si I est un ensemble vide, la somme

$$S = \sum_{i\in I} x_i,$$

conventionnnellement nulle.