

**Corrigé de l'examen de TD du 15
 Novembre 2016**
Correction de l'exercice 1.

(1) On vérifie que

$$\forall x \in I, \quad g'(x) = \frac{1}{x}. \quad (1)$$

Ainsi, pour tout x dans I , on a

$$|g'(x)| = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2.00000} \approx 0.50000.$$

ce qui permet donc d'écrire :

$$\exists k \in [0, 1[, \quad \forall x \in I, \quad |g'(x)| \leq k, \quad (2)$$

où

$$k \approx 0.50000 \quad (3)$$

(2) (a) Montrons que I est stable par g , c'est-à-dire, que tout $x \in I$, $g(x) \in I$. La fonction g est croissante, donc si $x \geq 2.00000$, alors $g(x) \geq g(2.00000) = 2.69315$. Puisque cette valeur est supérieure à 2.00000 , on a bien x dans I .

(b) On rappelle que l'on a montré (2).

Les deux hypothèses du théorème¹ B.1 ou B.2 de l'annexe B du corrigé de TD permettent donc d'affirmer d'une part que g a un unique point fixe α dans I et que toute suite définie par $x_0 \in I$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers α . De plus, on rappelle l'inégalité (B.3) de cette même annexe :

$$|x_n - \alpha| \leq k^n |x_0 - \alpha|, \quad (4)$$

Cette inégalité n'est pas exploitable en l'état car on n'a pas d'encadrement sur $|x_0 - \alpha|$. Utilisons alors l'inégalité de l'énoncé :

$$\forall n, \quad |x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k} |g(x_0) - x_0|. \quad (5)$$

Ainsi, pour avoir $|x_n - \alpha| \leq \varepsilon$, il suffit que

$$\frac{k^n}{1-k} |g(x_0) - x_0| \leq \varepsilon.$$

Si $g(x_0) - x_0 = 0$, c'est que x_0 est l'unique point fixe et il n'y a plus rien à faire que de prendre $n = 0$. Sinon, c'est équivalent à

$$n \ln k \leq \ln \left(\frac{\varepsilon(1-k)}{|g(x_0) - x_0|} \right)$$

et donc

$$n \geq \frac{1}{\ln(k)} \ln \left(\frac{\varepsilon(1-k)}{|g(x_0) - x_0|} \right) \quad (6)$$

Numériquement, pour $x_0 = 2$, on a

$$n = 18. \quad (7)$$

1. Le théorème B.2 est vrai même si I n'est pas borné! En effet $g(I) \subset I$ et puisque g est continue, $g(I)$ est borné et on peut considérer que g est une application de $g(I)$ borné dans $g(I)$.

Cela est trop grand. On peut affiner le tir en partant de x_0 , calculer par exemple les 6 premières itérations. On obtient

$$x_n \approx 3.144546946. \quad (8)$$

On admet que la majoration (2) est encore valable sur l'intervalle $\tilde{I} = [x_n, +\infty[$ que cet intervalle est g stable et que l'on a donc, tout x dans I

$$|g'(x)| = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{3.144546946} \approx 0.318010835,$$

ce qui est meilleur que (3). Enfin, si on applique de nouveau (5) mais avec cette valeur là et à partir de cette valeur de n , on a donc

$$\forall p \geq n, \quad |x_{n+p} - \alpha| \leq \frac{k^p}{1-k} |g(x_n) - x_n|, \quad (9)$$

et donc on obtient

$$p = 5. \quad (10)$$

À partir de cette valeur de p , on obtient donc

$$x_{n+p} \approx 3.146187878. \quad (11)$$

On peut aussi calculer la solution recherchée en tapant sous matlab :

`fzero('log(x)+2-x=0',3)`

ce qui donne

$$\alpha \approx 3.146193221. \quad (12)$$

Si, ensuite, *a posteriori*, on calcule $|\alpha - x_{n+p}|$, on obtient alors

$$\alpha \approx 5.3425 \cdot 10^{-6}, \quad (13)$$

ce qui est bien inférieur à $\varepsilon = 1.0 \cdot 10^{-5}$.

Correction de l'exercice 2.

- (1) Grâce à l'algorithme pyramidal donné en cours, on calcule les différences divisées ($f[x_0], \dots, f[x_0, \dots, x_2]$), données par (11, 7, 1).

On en déduit donc le polynôme P passant par les points $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq 2}$ donné par

$$P(x) = x^2 + 2x + 3. \quad (14)$$

- (2) Si on rajoute le point (x_i, y_i) pour $i = 3$, on obtient les différences divisées ($f[x_0], \dots, f[x_0, \dots, x_3]$), données par (11, 7, 1, 0). Le polynôme P passant par les points $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq 3}$ est alors donné par

$$P(x) = x^2 + 2x + 3, \quad (15)$$

identique au polynome donné par (14).

- (3) Si on rajoute le point (x_i, y_i) pour $i = 4$ (en plus du point déjà rajouté), on obtient les différences divisées ($f[x_0], \dots, f[x_0, \dots, x_4]$), données par (11, 7, 1, 0, 0). Le polynôme P passant par les points $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq 5}$ est alors donné par

$$P(x) = x^2 + 2x + 3, \quad (16)$$

identique au polynome donné par (14).

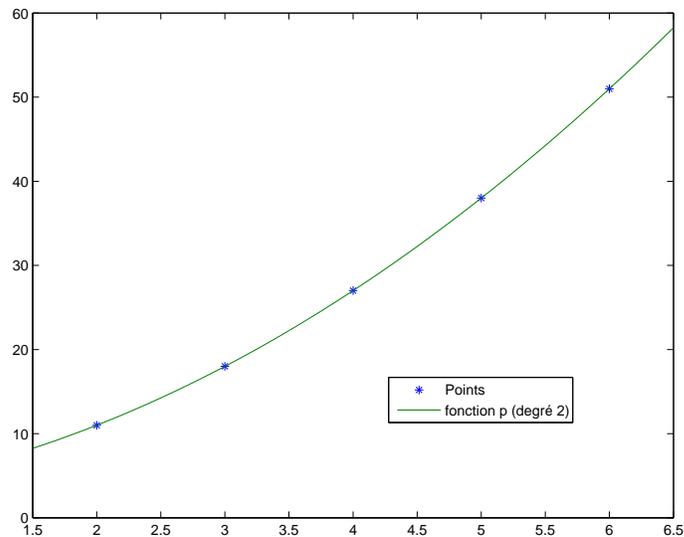


FIGURE 1. Les points (x_i, y_i) et la fonction polynomiale p .

(4)

Voir la figure 1.

On rappelle que le polynôme d'interpolation passant par $n + 1$ points $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq n}$ est de degré au plus n . Ici, les points (x_i, y_i) appartiennent déjà tous à une parabole et vérifient donc

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad y_i = p(x_i), \quad (17)$$

où p est un polynôme de degré 2. Ainsi, à partir du moment où l'on choisit assez de points le polynôme q est égal au polynôme d'interpolation P , ce qui explique que les polynômes calculés sont tous identiques. Cela est caractérisé par le fait que les différentes dérivées supplémentaires sont toutes nulles.