Informatique 3A MNBif — Automne

Corrigé de l'examen de TD du 14 novembre 2017

Correction de l'exercice 1.

(1) Les différences divisées valent

$$f[x_0] = 1,$$
$$f[x_0, x_1] = 1,$$
$$f[x_0, x_1, x_2] = 0,$$

(2) On conclue grâce à la formule du cours sur le calcul de $\Pi_2 g(\alpha) = 2.900000$.

Correction de l'exercice 2.

(1) La valeur exacte de I est $\pi^2/4 - 2$ soit 0.467401.

(2) Comme d'habitude, on sait que l'erreur est majorée par Mh^α où α est l'ordre de la méthode. On a donc

$$\log_{10}(\varepsilon(h)) \approx \alpha \log_{10}(h) + \log_{10}(M),$$

et le points alignés du graphique de l'énoncé forment un nuage de pente α, ici égale à 1.999888. L'ordre est donc 2.

Correction de l'exercice 3.

(1) La forme de la formule d'intégration (élémentaire) de Simpson sur l'intervalle $[a, b]$ est du type

$$\int_a^b f \approx (b-a)\left(\alpha f(a) + \beta f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \gamma f(b)\right), \tag{1}$$

où α, β et γ sont des constantes. Plus précisément, on a

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right). \tag{2}$$

(2) Cette formule est bien une formule de quadrature à $n+1 = 3$ point(s) puisque du type

$$\int_a^b f \approx \sum_{i=0}^{n} W_i f(x_i), \tag{3}$$

où les poids sont donnés par

$$W_0 = \alpha,$$
$$W_1 = \beta,$$
$$W_2 = \gamma$$

et les points donnés par

$$x_0 = a,$$
$$x_1 = \frac{a+b}{2},$$
$$x_2 = b.$$

Plus précisément, les poids sont donnés par

$$W_0 = \frac{1}{6}(b-a),$$
$$W_1 = \frac{2}{3}(b-a),$$
$$W_2 = \frac{1}{6}(b-a)$$

(3) D'après le cours, elle est de degré (d'exactitude) 3.

(4) Pour déterminer son degré, on peut, comme en TD, déterminer le plus haut degré du polynôme exactement intégré par la formule de quadrature (1) et obtenir 3.

On peut aussi raisonner un peu plus efficacement et observer que la méthode de Simpson est fondée sur une interpolation de degré 2 et intègre donc au moins les polynômes de degré 2. On montre ensuite à la main que les polynômes de degré 3 sont intégrés exactement, mais pas ceux de degré 4.

On peut aussi raisonner encore plus efficacement et observer que l'erreur d'intégration est donnée par

$$-\frac{(b-a)^5}{2280} f^{(4)}(\eta), \tag{4}$$

où $\eta \in]a, b[$. Cette quantité est nulle si f est polynomiale d'ordre inférieur à 3. Si f est égale par exemple à x^4, alors $f^{(4)}(\eta)$ est constant et est non nul !

(5) Cette méthode de quadrature à 3 point(s) devrait logiquement être de degré 2. Tout se passe donc comme si l'un des points comptait double !

Cet apparente « duplication » de point est systématiquement utilisé dans les méthodes d'intégrations Gaussienne, qui sont à $n+1$ points et de degré $2n+1$, comme si chaque point comptait deux fois ! Pour plus de détails, lire par exemple [o1, Section 3.3].

Références

[o1] J. Bastien et J.-N. Martin. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4 ième étage). Paris : Dunod, 2003. 392 pages.