

**Corrigé de l'examen de TD du 10
Novembre 2020****Correction de l'exercice 1.**

- (1) Après calculs élémentaires, on obtient la forme canonique de p donnée par

$$p(x) = 2x^2 - 5x + 7. \quad (1)$$

- (2) Les valeurs de p aux points $(x_i)_{0 \leq i \leq 2}$ sont donc données par $(y_i)_{0 \leq i \leq 2}$ avec

$$y_0 = 4, \quad y_1 = 5, \quad y_2 = 10. \quad (2)$$

- (3) Il est naturellement préférable d'utiliser la forme de Newton pour le calcul de l'interpolation, néanmoins, le calcul utilisant la forme de Lagrange est aussi présenté.

- (a) Chacun des polynômes de Lagrange l_i (de degré 2) est donné par la formule :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (3)$$

On a donc successivement

$$l_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)},$$

$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)},$$

$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}.$$

soit encore après calculs :

$$l_0(x) = 1/2 x^2 - 5/2 x + 3, \quad (4a)$$

$$l_1(x) = -x^2 + 4x - 3, \quad (4b)$$

$$l_2(x) = 1/2 x^2 - 3/2 x + 1. \quad (4c)$$

Ensuite, le polynôme interpolateur de degré 2, $\Pi_2(p)$, est donné par la formule :

$$\Pi_2(p)(x) = \sum_{i=0}^n p(x_i) l_i(x). \quad (5)$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_2(p)(x) = p(x_0)l_0(x) + p(x_1)l_1(x) + p(x_2)l_2(x).$$

Après calculs, il vient :

$$\Pi_2(p)(x) = 2x^2 - 5x + 7. \quad (6)$$

$x_i \setminus k$	0	1	2
$x_0 = 1$	4		
$x_1 = 2$	5	1	
$x_2 = 3$	10	5	2

TABLE 1. Différences divisées de p .

(b)

Pour calculer le polynôme sous la forme de Newton, on détermine tout d'abord les différences divisées $p[x_i, \dots, x_{i+k}]$ données dans le tableau 1. Ensuite, on n'utilise plus que les différences divisées qui sont encadrées et le polynôme interpolateur est donné par la formule :

$$\Pi_2(p)(x) = \sum_{i=0}^n p[x_0, \dots, x_i](x - x_0) \dots (x - x_{i-1}). \quad (7)$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_2(p)(x) = p[x_0] + p[x_0, x_1](x - x_0) + p[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

On a successivement

$$\begin{aligned} x - x_0 &= x - 1, \\ (x - x_0)(x - x_1) &= x^2 - 3x + 2. \end{aligned}$$

Après calculs, on retrouve donc bien le polynôme déterminé par la méthode de Lagrange (voir équation (6)).

(4) On peut constater *a posteriori* que le polynôme recherché donné par (6) correspond exactement au polynôme défini par l'équation par (1). Cela est tout à fait normal !

- Remarquons tout d'abord que le polynôme p étant de degré 2, il est égal à son polynôme interpolateur Π_2 ! Ainsi, les calculs des questions 2 et 3 étaient en fait inutiles ! On pouvait tout de suite écrire (avec la totalité des points !) cela !
- Remarquons aussi que le polynôme donné par l'équation (1) de l'énoncé était en fait donné sous sa forme de Newton (7) et que les différences divisées données dans le tableau 1 correspondaient tout simplement aux coefficients donnés dans l'énoncé, ici égaux à $\{4, 1, 2\}$. Ainsi, même les calculs de la question 1 étaient inutiles !

Correction de l'exercice 2.

La correction de cet exercice est grandement simplifiée par le fait que le polynôme donné est de degré 2 et que sa dérivée seconde est constante. Les erreurs d'intégration élémentaire ou composite sont donc exactement connues ! De plus, les erreurs réelles commises sont égales à ces mêmes erreurs. On pourra comparer, à ce titre, l'erreur donnée dans l'inéquation (16) à celle donnée dans la question 1)c) ii) ainsi que l'erreur donnée dans l'inéquation (25) à celle donnée dans la question 2)c).

(1) (a) En utilisant le tableau 2.2 du polycopié de cours, on détermine la valeur approchée avec la méthode élémentaire du trapèze :

$$I^T = 4 \quad (8)$$

soit

$$I^T = 4. \quad (9)$$

(b) On obtient les dérivées successives de f :

$$f'(x) = 1 + 6x; \quad (10a)$$

$$f''(x) = 6. \quad (10b)$$

On en déduit

$$M_2 = \max_{x \in [0,1]} |f^{(2)}(x)|, \quad (11)$$

le maximum de la valeur absolue de la dérivée 2-ième de f sur l'intervalle d'étude, donné numériquement par

$$M_2 = 6. \quad (12)$$

On note

$$a = 0, \quad b = 1. \quad (13)$$

Le tableau 2.3 du polycopié de cours fournit l'expression de l'erreur commise avec la méthode élémentaire du trapèze :

$$\mathcal{E}^T = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta), \quad (14)$$

où η appartient à $]a, b[$. On vérifie que f est bien de classe \mathcal{C}^2 . On majore la valeur absolue de $f''(\eta)$, par le maximum de la valeur absolue de la dérivée correspondant et la majoration de l'erreur commise est donc donnée par

$$\mathcal{E}^T \leq \frac{(b-a)^3}{12} M_2 \quad (15)$$

Grâce à (13) et (12), on déduit donc la majoration de l'erreur commise suivante :

$$\mathcal{E}^T \leq 0.5000000000. \quad (16)$$

(c) (i) On obtient

$$I = 7/2. \quad (17)$$

(ii) L'erreur réelle commise est égale à

$$|I^T - I| = |3.50000000000000 - 4| = 0.50000000000000$$

qui est inférieure à celle donnée par (16).

(2) (a) En utilisant le tableau 2.4 du polycopié de cours, on détermine la valeur approchée avec la méthode composite des trapèzes avec $N = 3$:

$$I_3^T = \frac{32}{9} \quad (18)$$

soit

$$I_3^T = 3.55555555555556. \quad (19)$$

(b) On note maintenant

$$A = 0, \quad B = 1. \quad (20)$$

Le tableau 2.5 du polycopié de cours fournit l'expression de l'erreur commise avec la méthode composite des trapèzes :

$$\mathcal{E}_3^T = -h^2 \frac{B-A}{12} f''(\eta), \quad (21)$$

où η appartient à $[A, B]$ et

$$h = \frac{B-A}{N}, \quad (22)$$

soit

$$h = \frac{(1) - (0)}{3},$$

et donc

$$h = 0.333333333333. \quad (23)$$

On peut donc écrire

$$|\mathcal{E}_3^T| \leq h^2 \frac{B-A}{12} M_2. \quad (24)$$

En utilisant de nouveau (12), on déduit donc la majoration de l'erreur commise suivante :

$$\mathcal{E}_3^T \leq 5.555556 \cdot 10^{-2}. \quad (25)$$

(c) L'erreur réelle commise est égale à

$$|I_3^T - I| = |3.500000000000 - 3.55555555555556| = 5.555556 \cdot 10^{-2}$$

qui est inférieure à celle donnée par (25).

(3) Pour que

$$|\mathcal{E}_3^T| \leq \varepsilon,$$

il suffit, d'après (24) que l'on ait :

$$h^2 \frac{B-A}{12} M_2 \leq \varepsilon,$$

soit, d'après (22),

$$\left(\frac{B-A}{N}\right)^2 \frac{B-A}{12} M_2 \leq \varepsilon,$$

soit encore

$$\frac{(B-A)^3}{12\varepsilon} M_2 \leq N^2,$$

et donc

$$N \geq \sqrt{\frac{M_2(B-A)^3}{12\varepsilon}}.$$

Il suffit donc de prendre

$$N = \left\lceil \sqrt{\frac{M_2(B-A)^3}{12\varepsilon}} \right\rceil. \quad (26)$$

où pour tout réel X ,

$\lceil X \rceil$ est le plus petit entier supérieur ou égal à X .

Numériquement, on a donc en utilisant de nouveau (12),

$$N = 7072. \quad (27)$$

Remarque 1. Avec cette valeur de N , on a

$$\mathcal{E}_{7072}^T = 3.500000009997364,$$

et l'erreur réelle

$$|\mathcal{E}_{7072}^T - I| = 9.9973642 \cdot 10^{-9},$$

quantité qui est inférieure à ε donné par l'équation (4) de l'énoncé.

Correction de l'exercice 3.

On renverra aussi au corrigé de l'exercice 1.1 de TD et à l'annexe A de ce même corrigé.

De la même façon, on peut donner un sens à $0!$. On rappelle que $n!$ est défini, pour tout entier $n \geq 1$ par

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n = \prod_{i=1}^n i.$$

On a donc, pour tout entier $n \geq 1$

$$(n+1)! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n \times (n+1),$$

et donc

$$(n+1)! = (n+1)n!.$$

On écrit alors la définition récurrente de $n!$:

$$\forall n \geq 0, \quad (n+1)! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ (n+1)n! & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

On l'utilise alors abusivement la deuxième équation pour $n = 0$, ce qui donne

$$1 = 1! = 0!$$

Dans ce cas, on peut réécrire la définition de $n!$ sous la forme

$$\forall n \geq 0, \quad n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ n(n-1)! & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

On peut aussi utiliser le résultat de l'exercice 1.1 de TD et considérer que

$$0! = \prod_{i=1}^0 i,$$

est un produit vide donc égal à 1, comme on le fait dans la convention (1.24) du cours.