

Contrôle continu 1 du 26 novembre 2025

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés : OUI NON

Autorisés : *Polycopiés de l'UE, notes manuscrites.*

Interdits : *Écrans (sauf tablette et ordinateurs en mode avion), Livres et Internet*

Calculatrice autorisée : OUI NON

Tout type

Exercice 1.

Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

- (1) Déterminer explicitement $f[x_0]$, $f[x_0, x_1]$ (x_0 et x_1 sont deux réels distincts) et $f[x_0, x_1, x_2]$ (x_0 , x_1 et x_2 sont trois réels deux à deux distincts).
- (2) (a) De façon plus générale, on considère $n + 1$ réels $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$, $n + 1$ deux à deux distincts. Montrer que

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_j}. \quad (1)$$

- (b) Cette formule est-elle intéressante en pratique ?
- (c) Retrouver les résultats de la question 1 à partir de (1).

Exercice 2.

Cet exercice est difficile et on pourra admettre certains résultats.

Dans cet exercice, on cherche à déterminer toutes les applications f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui vérifient : pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $D \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (x_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (\forall (i, j) \in \{0, \dots, n\}, \quad x_i \neq x_j \implies f[x_0, x_1, \dots, x_n] = D). \quad (2)$$

- (1) Nous étudions deux cas particuliers dans cette question.

- (a) Commençons par traiter le cas particulier $n = 0$. On a donc

$$\exists D \in \mathbb{R}, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad f[x_0] = D. \quad (3)$$

Montrer que les fonctions constantes sont les seules vérifiant (3).

(b) Continuons avec le cas particulier $n = 1$. On a donc

$$\exists D \in \mathbb{R}, \quad \forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}, \quad (x_0 \neq x_1 \implies f[x_0, x_1] = D). \quad (4)$$

On raisonnera dans cette question par analyse/synthèse (ou unicité/existence).

- (i) En supposant que f vérifie (4), montrer que, nécessairement f est affine. On pourra fixer $x_1 \in \mathbb{R}$ et déterminer la valeur de $f(x_0)$ en fonction de x_0 .
- (ii) Réciproquement, montrer que toute fonction affine vérifie (4).

(2) Étudions maintenant le cas général $n \in \mathbb{N}$ quelconque.

(a) Fixons $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}, \quad x_i \neq x_j. \quad (5)$$

Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ qu'il existe g_n et h_{n-1} , deux fonctions polynomiales de degrés respectifs n et $n-1$, dont les coefficients dépendent éventuellement de $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ telles que

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^n \{x_i\}, \quad f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f(x_0) + h_{n-1}(x_0)}{g_n(x_0)}. \quad (6)$$

On posera par convention, $h_{-1}(x_0) = 0$.

(b) On raisonnera là encore par analyse/synthèse (ou unicité/existence).

- (i) En supposant que f vérifie (2), alors nécessairement $f(x_0)$ est un polynôme en x_0 , de degré n , dont les coefficients dépendent éventuellement de $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$.
- (ii) Réciproquement, montrer que tout polynôme de degré au plus n vérifie (2).
- (iii) Conclure.

(3) (a) Déterminer toutes les applications f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui vérifient : pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall (x_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (\forall (i, j) \in \{0, \dots, n\}, \quad x_i \neq x_j \implies f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 0). \quad (7)$$

(b) Déterminer toutes les applications f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui vérifient : f est n fois dérivable et pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall (x_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \quad (8)$$

Exercice 3.

Soit f donnée par

$$\forall x \in [0, 1/4\pi], \quad f(x) = x^4 \sin(x), \quad (9a)$$

et l'intégrale I

$$I = \int_0^{1/4\pi} f(x) dx. \quad (9b)$$

(1) (a) Déterminer I^T , l'approximation de I par la méthode élémentaire du trapèze.

(b) On note

$$M_p = \max_{x \in [0, 1/4\pi]} |f^{(p)}(x)|, \quad (10)$$

le maximum de la valeur absolue de la dérivée p -ième de f sur l'intervalle d'étude. On donne ci-dessous les valeurs numériques de M_1 et M_2 :

$$M_1 = 1,639\,353\,925\,074\,8; \quad (11a)$$

$$M_2 = 7,705\,684\,568\,401\,8. \quad (11b)$$

Donnez l'expression de l'erreur commise avec la méthode élémentaire du trapèze et fournissez-en une majoration.

(c) (i) Calculer la valeur exacte de I .

(ii) En déduire l'erreur commise réelle, c'est-à-dire $|I^T - I|$ et vérifier qu'elle est inférieure au majorant de l'erreur donné plus haut.

- (2) (a) Déterminer I_3^T , l'approximation de I par la méthode composite des trapèzes avec $N = 3$ sous-intervalles.
- (b) Donnez l'expression de l'erreur commise avec la méthode composite des trapèzes puis fournissez-en une majoration.
- (c) Déterminer l'erreur réelle erreur commise, c'est-à-dire $|I_3^T - I|$ et vérifier qu'elle est inférieure au majorant de l'erreur donné plus haut.

- (3) Déterminer le nombre N de sous-intervalles qu'il faudrait utiliser pour avoir une approximation de I par la méthode composite des trapèzes avec une erreur inférieure à

$$\varepsilon = 10^{-8}. \quad (12)$$

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>