

**Corrigé du contrôle continu 2 du 20 janvier
2026**

Correction de l'exercice 1.

(1) Soit $K \in \mathbb{R}$. Montrons que l'équation

$$e^x = -x + K. \quad (1)$$

admet une unique solution sur \mathbb{R} , notée r . Pour cela, on définit la fonction f sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x + x - K, \quad (2)$$

dont les zéros sont exactement les solutions de (1). La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = e^x + 1, \quad (3)$$

qui est strictement positive. La fonction f est donc strictement croissante sur \mathbb{R} . De plus, on a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad (4a)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad (4b)$$

dont on déduit, d'après la continuité de f et le théorème des valeurs intermédiaires que

$$f \text{ admet un unique zéro sur } \mathbb{R}, \text{ noté } r \text{ (ou } r(K) \text{ en cas d'ambiguïté)}. \quad (5)$$

Par définition, on a donc

$$e^{r(K)} + r(K) - K = 0. \quad (6)$$

Remarque 1. Remarquons que la stricte croissance de f sur \mathbb{R} implique, puisque r est le zéro de f :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x > r \implies f(x) > f(r) = 0,$$

$$x < r \implies f(x) < 0,$$

$$x = r \implies f(x) = 0,$$

et donc, puisque

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x - g(x), \quad (7)$$

on obtient naturellement que

$$g \text{ n'a qu'un seul point fixe sur } \mathbb{R}, \text{ qui est } r \text{ (noté } r(K) \text{ en cas d'ambiguïté)}. \quad (8)$$

et de plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x > r \implies g(x) < x, \quad (9a)$$

$$x < r \implies g(x) > x, \quad (9b)$$

$$x = r \implies g(x) = x. \quad (9c)$$

Remarque 2. On a aussi

$$\forall K < 1, \quad |g'(r(K))| < 1, \quad (10a)$$

$$\forall K > 1, \quad |g'(r(K))| > 1, \quad (10b)$$

$$g'(r(1)) = -1. \quad (10c)$$

En effet, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -e^x, \quad (11)$$

et donc

$$\forall K \in \mathbb{R}, \quad g'(r(K)) = -e^{r(K)}.$$

Remarquons que d'après la stricte croissance de f , on a

$$r(K) < 0 \iff f(r(K)) < f(0) \iff 0 < 1 - K$$

et donc

$$r(K) < 0 \iff K < 1, \quad (12)$$

ce qui montre (10a) et (10b). Enfin, il est clair que

$$r(1) = 0, \quad (13)$$

ce qui montre (10c).

(2) On définit la fonction g par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = K - e^x, \quad (14)$$

et on met désormais l'équation (1) sous la forme

$$g(x) = x, \quad (15)$$

et on considère la méthode du point fixe associée sur un intervalle $[a, b]$, définie par

$$x_0 \in [a, b] \text{ et } x_{n+1} = g(x_n). \quad (16)$$

Remarque 3. On peut en fait, directement étudier la convergence ou la divergence de la méthode du point fixe (selon les valeurs de K) sans utiliser le théorème 4.15 du polycopié de cours, comme le suggérait la suite de l'énoncé (et dont nous donnerons la solution plus bas, c'est-à-dire à partir du point 2a page 15). Pour cela, on utilise des techniques proches de celles utilisées dans les annexes Q du polycopié de cours et X du polycopié de cours.

La preuve se fait en plusieurs points.

(a) Commençons par définir la fonction g^2 par

$$g^2(x) = g(g(x)) = K - e^{K - e^x}. \quad (17)$$

et considérons f_2 définie par (de façon analogue à (7))

$$f_2(x) = x - g^2(x) = x - K + e^{K - e^x}. \quad (18)$$

On a donc

$$(g^2)'(x) = e^{x + K - e^x}, \quad (19)$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (g^2)'(x) > 0. \quad (20)$$

On déduit de (20) que

$$g^2 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}. \quad (21)$$

et que

$$f_2'(x) = 1 - \left(e^x e^{K - e^x} \right),$$

et donc

$$f_2'(x) = 1 - e^{x + K - e^x}, \quad (22)$$

et donc

$$f_2'(x) > 0 \text{ ssi } x + K - e^x < 0,$$

ce qui est équivalent à

$$f_2'(x) > 0 \text{ ssi } h(x) > 0, \text{ où } \forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = e^x - x - K \quad (23)$$

Étudions la fonction h . On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = e^x - 1,$$

qui est strictement positive sur \mathbb{R}_+^* et strictement négative sur \mathbb{R}_-^* .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $h'(x)$	$-$	0	$+$
variations de h	$+\infty$	$1 - K$	$+\infty$

TABLEAU 1. Tableau de variation de h .

Voir le tableau de variation de h dans le tableau 1. La valeur minimale de h est donc donnée par

$$h_{\min} = h(0) = 1 - K.$$

Nous avons alors deux cas :

(i)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $h'(x)$	$-$	0	$+$
variations de h	$+\infty$	$1 - K \geq 0$	$+\infty$

TABLEAU 2. Tableau de variation de h dans le cas où $K \leq 1$.

Premier cas : on a

$$K \leq 1, \quad (24)$$

ce qui est équivalent à $h_{\min} \geq 0$ et donc, d'après le tableau 2, h est strictement positive sur \mathbb{R}^* , et ainsi, d'après (23),

$$f_2 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}. \quad (25)$$

Enfin, puisque

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = -\infty, \quad (26a)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = +\infty, \quad (26b)$$

on en déduit que f_2 admet un zéro unique sur \mathbb{R} . Or, d'après (8), on sait que

$$\text{le point fixe } r(K) \text{ de } g \text{ est aussi point fixe de } g^2, \quad (27)$$

(puisque $g^2(r) = g(r) = r$) et donc

$$\text{le point fixe } r(K) \text{ de } g \text{ est aussi zéro de } f_2, \quad (28)$$

et donc ici

$$\text{le point fixe } r(K) \text{ de } g \text{ est aussi l'unique zéro de } f_2. \quad (29)$$

On aboutit à des conclusions analogues à celles de la remarque 1 : la stricte croissance de f_2 sur \mathbb{R} implique, puisque $r(K)$ est le zéro de f_2 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x > r(K) \implies f_2(x) > f_2(r) = 0, \quad (30a)$$

$$x < r(K) \implies f_2(x) < 0, \quad (30b)$$

$$x = r(K) \implies f_2(x) = 0, \quad (30c)$$

et donc, d'après (18), on obtient naturellement que

$$g^2 \text{ n'a qu'un seul point fixe sur } \mathbb{R}, \text{ qui est } r \text{ (noté } r(K) \text{ en cas d'ambiguïté)}. \quad (31)$$

et de plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x > r(K) \implies g^2(x) < x, \quad (32a)$$

$$x < r(K) \implies g^2(x) > x, \quad (32b)$$

$$g^2(r(K)) = r(K). \quad (32c)$$

Remarque 4. On a aussi

$$\forall K < 1, \quad \left| (g^2)'(r(K)) \right| < 1, \quad (33)$$

et

$$(g^2)'(r(1)) = 1. \quad (34)$$

On a effet d'après (19),

$$(g^2)'(r(K)) = e^{r(K)+K-e^{r(K)}}$$

et la définition (6), de $r(K)$ implique

$$\forall K \in \mathbb{R}, \quad (g^2)'(r(K)) = e^{2r(K)}. \quad (35)$$

Enfin, (12) et (35) impliquent (33) et (34) vient de (13).

(ii)

x	$-\infty$	δ	0	η	$+\infty$
signe de $h'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de h	$+\infty$	$\downarrow 0$	$1-K < 0$	$\downarrow 0$	$+\infty$

TABLEAU 3. Tableau de variation de h dans le cas où $K > 1$.

Second cas : on a

$$K > 1. \quad (36)$$

Dans ce sous-cas, $h_{\min} = 1 - K > 0$ et la fonction h s'annule en deux réels δ et η , vérifiant $\delta < 0 < \eta$. Voir le tableau de variation 3 dont on déduit que h est strictement positif sur $] -\infty, \delta[\cup]\eta, +\infty[$ et strictement négatif

x	$-\infty$	δ	0	$\ln K$	η	$+\infty$
signe de $f_2'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f_2	$-\infty$	$f_2(\delta)$	$f_2(0) > 0$	$f_2(\ln(K)) < 0$	$f_2(\eta)$	$+\infty$

TABLEAU 4. Tableau de variation de f_2 dans le cas où $K > 1$.

sur $]\delta, \eta[$, dont on déduit d'après (23) que f_2 est strictement croissante sur $] -\infty, \delta] \cup [\eta, +\infty[$ et strictement décroissante sur $[\delta, \eta]$. On rappelle aussi que l'on a (26).

On en déduit le tableau de variation 4.

Par ailleurs, remarquons que

$$f_2(0) = e^{K-1} - K, \quad (37a)$$

$$f_2(\ln K) = 1 + \ln K - K. \quad (37b)$$

$$(37c)$$

La fonction logarithme étant concave sur \mathbb{R}_+^* , elle est en dessous de sa tangente en tout point et en particulier au point 1, on a donc

$$\forall h > -1, \quad \ln(1+h) < h,$$

résultat qui peut aussi être obtenu par une étude de fonction ou par une formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2. Si on pose $1+h = u$ où $u > 0$, on en déduit

$$\forall u > 0, \quad \ln(u) < u - 1,$$

et en particulier, en $K > 0$, on a donc

$$\forall K > 0, \quad 1 + \ln(K) - K < 0, \quad (38)$$

ce qui nous prouve, grâce à (37b) :

$$\forall K > 0, \quad f_2(\ln K) < 0. \quad (39)$$

De la même façon, la fonction exponentielle étant convexe sur \mathbb{R} , elle est au-dessus de sa tangente en tout point et en particulier au point 0, on a donc

$$\forall h \neq 0, \quad e^h > h + 1,$$

résultat qui peut aussi être obtenu par une étude de fonction ou par une formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2. Si on pose $1+h = u$ où $u \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on en déduit

$$\forall u \neq 1, \quad e^{u-1} > h,$$

et en particulier, en $K \neq 0$, on a donc

$$\forall K \neq 0, \quad e^{K-1} > K \quad (40)$$

ce qui nous prouve, grâce à (37a) :

$$\forall K \neq 0, \quad f_2(0) > 0. \quad (41)$$

De cela et du tableau de variation 4, on déduit que (car $\delta < 0 < \eta$),

$$f_2 \text{ ne s'anulle qu'une fois sur } \mathbb{R}_+^*. \quad (42)$$

Enfin, remarquons que $\eta > \ln K$, car c'est équivalent (car $\ln K > 0$) à $h(\eta) > h(\ln K)$ soit à $0 > -\ln K$, ce qui est vrai car $K > 1$. D'après (39), on peut donc compléter le tableau de variation 4, dont on déduit que

$$f_2 \text{ ne s'anulle qu'une fois sur }]0, \ln K[\text{ et une fois sur }]\ln K, +\infty[. \quad (43)$$

Autrement dit, d'après (42) et (43), que f_2 possède trois zéros, deux à deux distincts, le premier dans l'intervalle $] - \infty, 0[$, le deuxième dans l'intervalle $]0, \ln K[$, et le troisième dans l'intervalle $] \ln(K), +\infty[$. Notons que l'unique zéro $r(k)$ de f est aussi dans l'intervalle $]0, \ln K[$. En effet, cela est équivalent à

$$f(0)f(\ln K) < 0,$$

ce qui est équivalent, compte tenu de la définition de f à

$$(1 - K)(K + \ln K - K) < 0,$$

soit encore à

$$(1 - K) \ln K < 0,$$

ce qui est vrai d'après (36). D'après (28), et par unicité du zéro de f dans $]0, \ln K[$, on en déduit que le deuxième zéro de f_2 (dans l'intervalle $]0, \ln K[$) ne peut être que $r(K)$ et d'après ce qui précède :

f_2 possède trois zéros, deux à deux distincts, le premier, noté $\alpha(K)$, dans l'intervalle $] - \infty, 0[$,

le second, égal à $r(K)$ dans l'intervalle $]0, \ln K[$, et le troisième, noté $\beta(K)$, dans l'intervalle $] \ln(K), +\infty[$. (44)

On en déduit le tableau 5. En revenant à la la fonction g^2 , on en déduit que

g^2 possède trois points fixes, deux à deux distincts, le premier, noté $\alpha(K)$, dans l'intervalle $] - \infty, 0[$,

le second, égal à $r(K)$ dans l'intervalle $]0, \ln K[$, et le troisième, noté $\beta(K)$, dans l'intervalle $] \ln(K), +\infty[$. (45)

x	$-\infty$	$\alpha(K)$	δ	$r(K)$	η	$\beta(K)$	$+\infty$
signe de $f'_2(x)$		+	0	-	0	+	
variations de f_2	$-\infty$	\downarrow 0	\nearrow $f_2(\delta)$	\downarrow 0	\searrow $f_2(\eta)$	\nearrow 0	$+\infty$

TABLEAU 5. Tableau de variation de f_2 dans le cas où $K > 1$.

On aboutit à des conclusions analogues à celles des équations (30) et (32) : le tableau de variation 5 implique

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x < \alpha(K) \implies f_2(x) < 0, \quad (46a)$$

$$\alpha(K) < x < r(K) \implies f_2(x) > 0, \quad (46b)$$

$$r(K) < x < \beta(K) \implies f_2(x) < 0, \quad (46c)$$

$$x > r(K) \implies f_2(x) > 0, \quad (46d)$$

$$x \in \{\alpha(K), r(K), \beta(K)\} \implies f_2(x) = 0, \quad (46e)$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x < \alpha(K) \implies g^2(x) > x, \quad (47a)$$

$$\alpha(K) < x < r(K) \implies g^2(x) < x, \quad (47b)$$

$$r(K) < x < \beta(K) \implies g^2(x) > x, \quad (47c)$$

$$x > r(K) \implies g^2(x) < x, \quad (47d)$$

$$x \in \{\alpha(K), r(K), \beta(K)\} \implies g^2(x) = x, \quad (47e)$$

Remarque 5. Notons que l'on a dans ce cas :

$$\left| (g^2)'(\alpha(K)) \right| < 1, \quad (48a)$$

$$\left| (g^2)'(\beta(K)) \right| < 1, \quad (48b)$$

$$\left| (g^2)'(r(K)) \right| > 1. \quad (48c)$$

— La preuve de (48c) se fait comme celle de (10b) en utilisant (12) et (35).

— Montrons (48b). Pour cela, nous allons utiliser la convexité de g^2 . D'après (19), on a

$$(g^2)''(x) = (1 - e^x)e^{x+K-e^x},$$

et donc

$$\forall x > 0, (g^2)''(x) < 0, \quad (49a)$$

$$\forall x < 0, (g^2)''(x) > 0. \quad (49b)$$

Or, on a $0 < r(K) < \beta(K)$ donc $g(g^2)''$ est strictement négative sur l'intervalle $[r(K), \beta(K)]$ et donc g^2 est strictement concave, c'est-à-dire, $-g^2$ strictement convexe sur l'intervalle $[r(K), \beta(K)]$. On renvoie à [RDO88, section 4.5.1] Cette convexité implique que la dérivée de $-g^2$ en $\beta(K)$ est strictement supérieure à la pente de $-g^2$ entre les points $r(K)$ et $\beta(K)$:

$$(-g^2)'(\beta(K)) > \frac{-g^2(\beta(K)) + g^2(r(K))}{\beta(K) - r(K)},$$

ce qui implique

$$(-g^2)'(\beta(K)) > \frac{-\beta(K) + r(K)}{\beta(K) - r(K)} = -1,$$

et donc

$$(g^2)'(\beta(K)) < 1.$$

Ainsi, compte tenu de (20), on a

$$0 < (g^2)'(\beta(K)) < 1,$$

ce qui montre (48b).

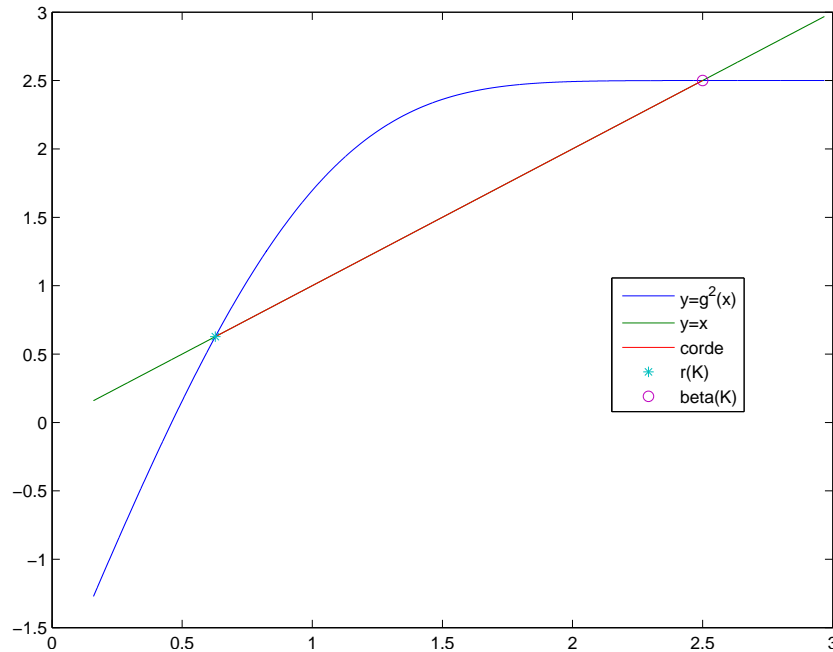


FIGURE 1. La fonction g^2 sur l'intervalle $[r(K), \beta(K)]$ pour $K = 5/2$.

Illustrons cela en traçant les divers éléments calculés sur la figure 1.

— Montrons (48a). Cette fois, nous n'utiliserons pas la convexité de g^2 sur la totalité de l'intervalle $[\alpha(K), r(K)]$. Mais, on a $\alpha(K) < 0$ donc d'après (49b), g^2 est strictement convexe sur l'intervalle $[\alpha(K), \alpha(K)/2]$ et comme précédemment, on en déduit

$$0 < (g^2)'(\alpha(K)) < \frac{g^2(\alpha(K)/2) - g^2(\alpha(K))}{\alpha(K)/2 - \alpha(K)}. \quad (50)$$

Or, on a $\alpha(K)/2 \in]\alpha(K), r(K)[$ et d'après (47b), on a $g^2(\alpha(K)/2) < \alpha(K)/2$ et d'après (50), on a

$$0 < (g^2)'(\alpha(K)) < \frac{\alpha(K)/2 - g^2(\alpha(K))}{\alpha(K)/2 - \alpha(K)} = \frac{\alpha(K)/2 - \alpha(K)}{\alpha(K)/2 - \alpha(K)} = 1,$$

ce qui nous permet de conclure.

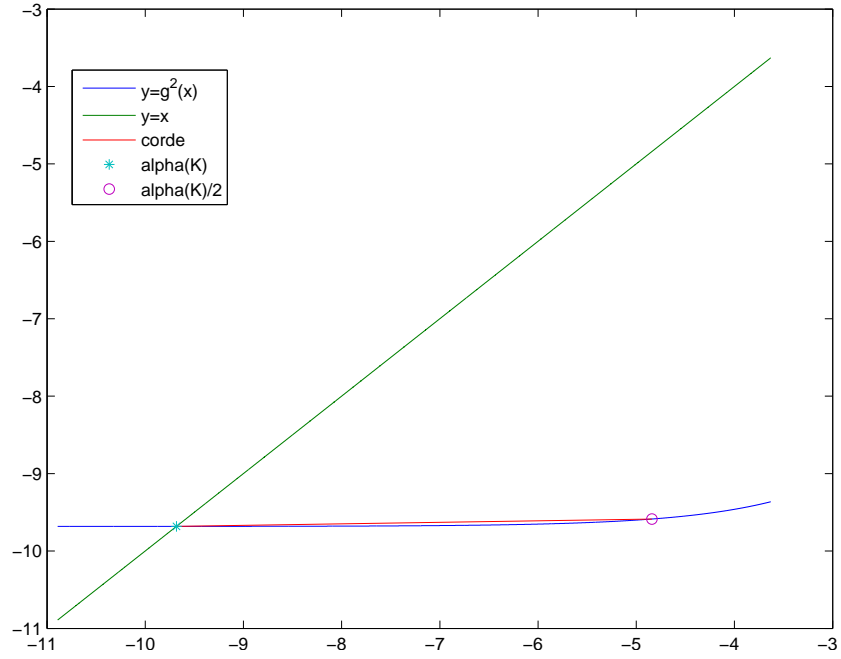


FIGURE 2. La fonction g^2 sur l'intervalle $[\alpha, \alpha/2]$ pour $K = 5/2$.

Illustrons cela en traçant les divers éléments calculés sur la figure 2.

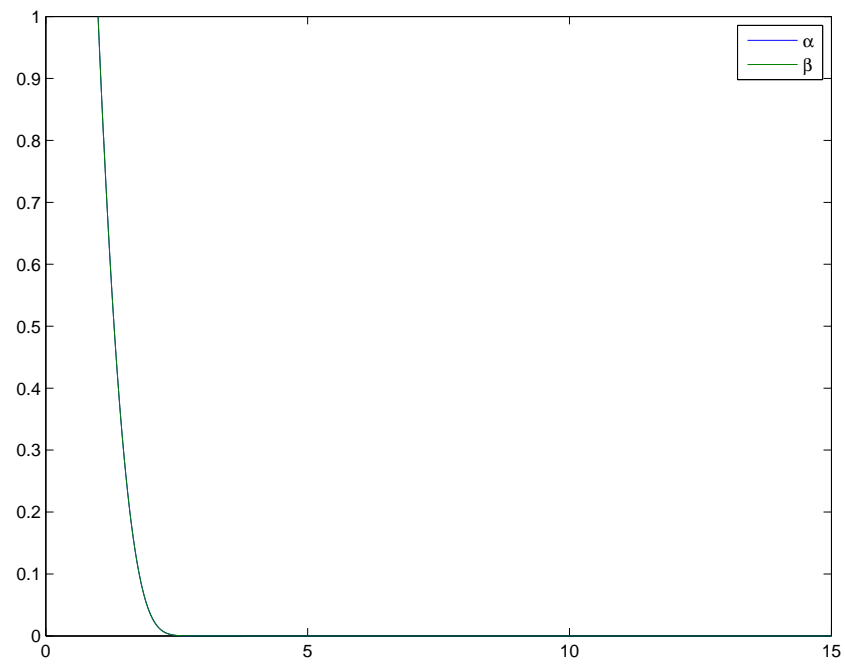


FIGURE 3. Les courbes $(g^2)'(\alpha(K))$ et $(g^2)'(\beta(K))$ en fonction de K pour $K \in]1, 15]$.

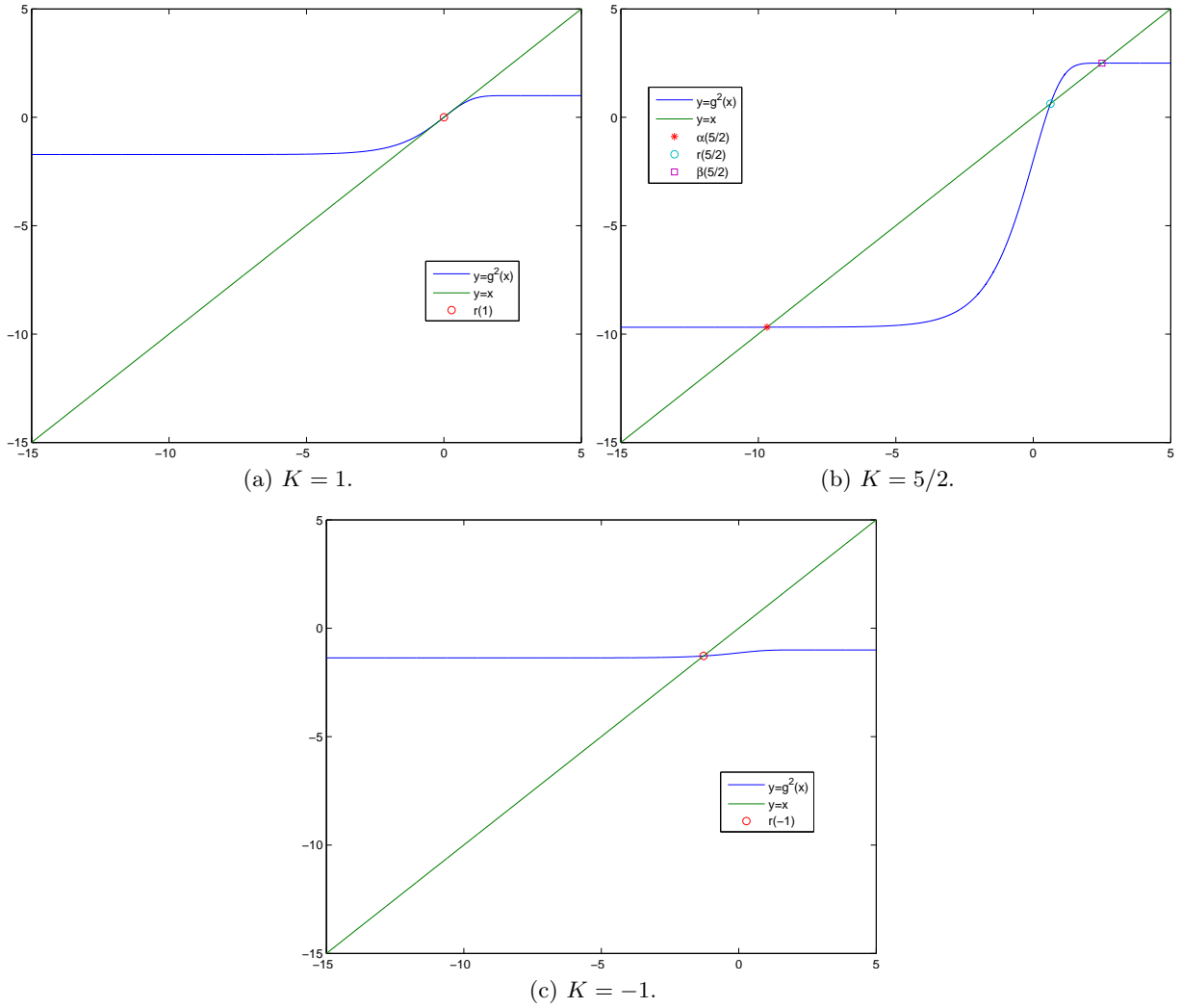


FIGURE 4. Les graphiques de la fonction g^2 sur l'intervalle $[-15, 5]$ pour différentes valeurs de K .

Sur la figure (3), on constate que $(g^2)'(\alpha(K))$ et $(g^2)'(\beta(K))$ semblent appartenir à $]0, 1[$, pour tout K , ce qui est confirmé numériquement par

$$\begin{aligned} \min_{K \in]1, 15]} (g^2)'(\alpha(K)) &= 0, \\ \max_{K \in]1, 15]} (g^2)'(\alpha(K)) &= 0,997\,202\,351\,770, \\ \min_{K \in]1, 15]} (g^2)'(\beta(K)) &= 0, \\ \max_{K \in]1, 15]} (g^2)'(\beta(K)) &= 0,997\,202\,351\,770. \end{aligned}$$

De plus, il semblerait sur cette figure que

$$\forall K, \quad (g^2)'(\alpha(K)) = (g^2)'(\beta(K)),$$

ce qui est confirmé numériquement par

$$\max_{K \in]1, 15]} \left| (g^2)'(\alpha(K)) - (g^2)'(\beta(K)) \right| = 2,553\,51 \times 10^{-15}.$$

Illustrons les trois types de points fixes de g^2 selon les valeurs de K donnés par $K = 1$, $K = 5/2$ et $K = -1$, par la figure 4.

- (b) Concluons maintenant sur la convergence de la suite (v_n) du point fixe associée à g^2 , c'est-à-dire définie par

$$v_{n+1} = g^2(v_n) \text{ et } v_0 \in \mathbb{R}. \quad (51)$$

Considérons les intervalles de \mathbb{R} définis par

- Si $K \leq 1$,

$$I_1 =]-\infty, r(K)[, \quad (52a)$$

$$I_2 =]r(K), +\infty[, \quad (52b)$$

- Si $K > 1$,

$$I_3 =]-\infty, \alpha(K)[, \quad (53a)$$

$$I_4 =]\alpha(K), r(K)[, \quad (53b)$$

$$I_5 =]r(K), \beta(K)[, \quad (53c)$$

$$I_6 =]\beta(K), +\infty[, \quad (53d)$$

Remarquons d'abord que, d'après la croissance stricte de g^2 ,

$$\text{chacun des intervalles } J_k \text{ est } g^2\text{-stable.} \quad (54)$$

En effet, par exemple, $x \in I_3$, on a $x < \alpha(K)$ et donc $g^2(x) < g^2(\alpha(K)) = \alpha(K)$. Si par exemple, $x \in I_4$, on a $\alpha(K) < x < r(K)$ et donc $g^2(\alpha(K)) < g^2(x) < g^2(r(K))$, ce qui implique $\alpha(K) < g^2(x) < r(K)$.

Remarquons aussi que si v_0 est égal à $r(K)$ si $K \leq 1$ ou si v_0 appartient à $\{\alpha(K), r(K), \beta(K)\}$ si $K > 1$, alors la suite v_n est constante et égale à v_0 .

Supposons maintenant que v_0 appartient à l'un des intervalles I_k . Alors, pour tout n , v_n appartient à I_k , ce qui se montre par récurrence sur n en utilisant (54).

Enfin, v_0 appartient à l'un des intervalles I_k , alors la suite v_n est strictement monotone, à terme dans I_k . En effet, si par exemple v_0 appartient à I_4 , alors, pour tout n est dans I_4 et d'après (47b) appliqué à $x = v_n$, on a $v_{n+1} = g^2(v_n) < v_n$. La suite v_n étant monotone et bornée (dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$), elle converge vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$. De plus, d'après (32) et (47), si v_0 appartient à I_k , pour $k \in \{1, 3, 5\}$, la suite v_n est strictement croissante et majorée dans \mathbb{R} et, pour $k \in \{2, 4, 6\}$, la suite v_n est strictement croissante et minorée dans \mathbb{R} . Dans tous les cas, la suite v_n converge donc vers l , qui est point fixe de g^2 , puisque g^2 est continue (on passe à la limite $n \rightarrow \infty$ dans (51)).

Or, les seuls points fixes de g^2 sont nécessairement $\alpha(K)$ ou $r(K)$ ou $\beta(K)$. La limite de v_n est donc nécessairement l'un de ces trois réels. Dans le cas où $K \leq 1$, le seul point fixe de g^2 est $r(K)$, qui est donc la valeur de l .

Si $K > 1$, montrons que l vaut $\alpha(K)$ ou $\beta(K)$.

- Si v_0 appartient à I_3 , v_n est croissante et est à valeur dans I_3 . La valeur de l est donc le seul point fixe de g^2 qui est dans l'adhérence de I_3 , c'est-à-dire $]-\infty, \alpha(K)[$, qui ne peut être que $\alpha(K)$.
- Il en est de même si v_0 appartient à I_6 avec $l = \beta(K)$.
- Si v_0 appartient à I_4 , v_n est décroissante et est à valeur dans I_4 . La valeur de l est donc le seul point fixe de g^2 qui est dans l'adhérence de I_4 , c'est-à-dire $[\alpha(K), r(K)[$. Puisque v_n est strictement décroissante, ce ne peut pas être $r(K)$ et on a donc $l = \alpha(K)$.
- Il en est de même si v_0 appartient à I_5 avec $l = \alpha(K)$.

Bref, on a montré que

$$\text{Si } K \leq 1, \text{ alors pour tout } v_0 \in \mathbb{R}, \text{ la suite } v_n \text{ converge vers } r(K). \quad (55a)$$

$$\text{Si } K > 1 \text{ et si } v_0 = r(K), \text{ alors la suite } v_n \text{ est constante et vaut } r(K). \quad (55b)$$

$$\text{Si } K > 1 \text{ et si } v_0 < r(K), \text{ alors la suite } v_n \text{ converge vers } \alpha(K). \quad (55c)$$

$$\text{Si } K > 1 \text{ et si } v_0 > r(K), \text{ alors la suite } v_n \text{ converge vers } \beta(K). \quad (55d)$$

Remarque 6. On a étudié dans les remarques 2, 4 et 5, les aspects attractifs de $r(K)$ et répulsifs de $\alpha(K)$ et $\beta(K)$ (voir remarque 4.13 page 84 du cours). Il est intéressant de constater que la méthode du point fixe ne converge que vers des points attractifs et non vers des points répulsifs. Attention, les aspects attractif ou répulsif ne suffisent pas à montrer la convergence ou la divergence de la méthode ; ces propriétés découlent ici de l'étude globale de la suite (voir propositions 4.14 du polycopié de cours et 4.15 du polycopié de cours).

Remarque 7. Ce résultat pouvait être démontré en utilisant la proposition P.1 du polycopié de cours.

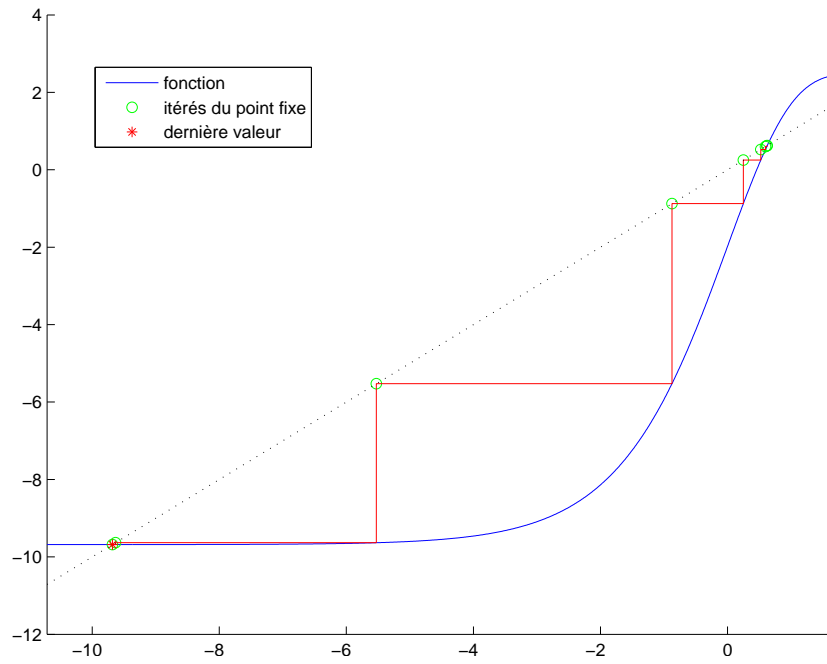


FIGURE 5. Les 12 premières valeurs de v_n pour $K = 5/2$ et $x_0 = 5/8$.

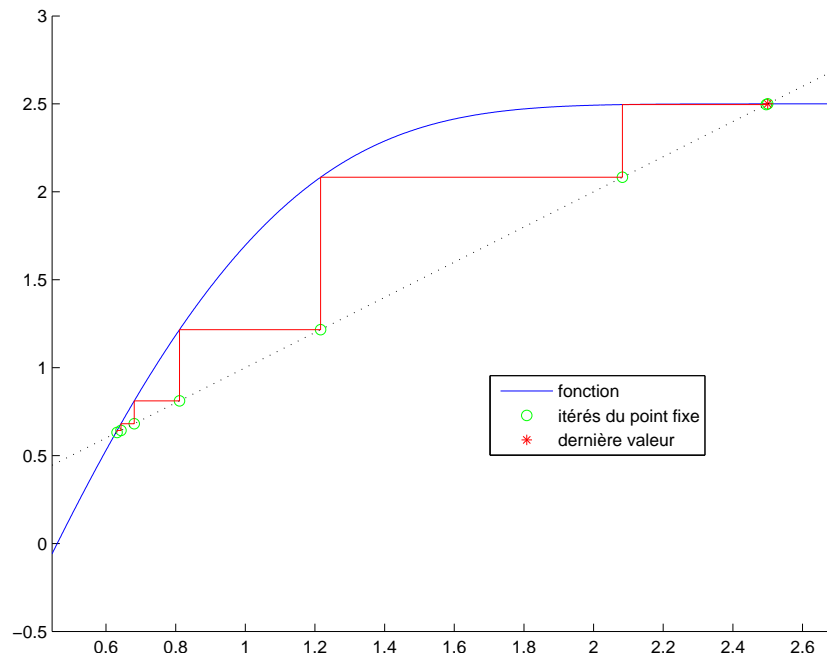


FIGURE 6. Les 11 premières valeurs de v_n pour $K = 5/2$ et $x_0 = g(5/8)$.

(c) Concluons par quelques simulations confirmant cela.

Quelques simulations ont été faites : Voir les figures 5, 6 et 7, et les tableaux 6 7 et 8.

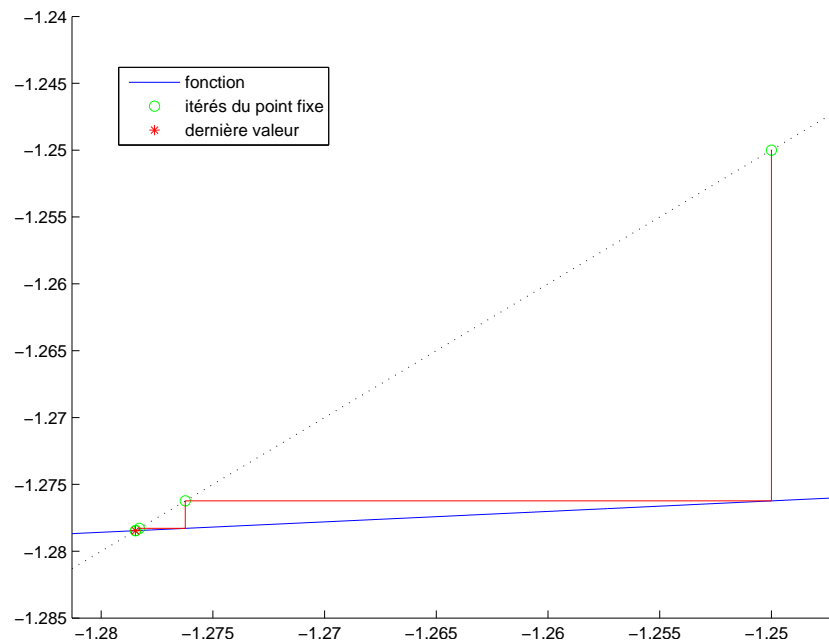


FIGURE 7. Les 13 premières valeurs de v_n pour $K = -1$ et $x_0 = -5/4$.

n	v_n
0	0,625 000 000 000 00
1	0,619 093 121 774 70
2	0,598 283 279 505 39
3	0,524 134 392 085 49
4	0,249 834 446 031 84
5	-0,874 297 455 153 25
6	-5,527 274 158 912 70
7	-9,634 142 647 988 75
8	-9,681 696 577 650 00
9	-9,681 733 607 723 56
10	-9,681 733 635 878 09
11	-9,681 733 635 899 49
12	-9,681 733 635 899 51

TABLEAU 6. Les 12 premières valeurs de v_n pour $K = 5/2$ et $x_0 = 5/8$.

On peut évaluer $r(-1)$ et $\alpha(5/2)$ et $\beta(5/2)$: on obtient

$$r(-1) = -1,278\,464\,542\,761\,074, \quad (56a)$$

$$\alpha(5/2) = -9,681\,733\,635\,899\,509, \quad (56b)$$

$$\beta(5/2) = 2,499\,937\,586\,791\,849 \quad (56c)$$

n	v_n
0	0,631 754 042 567 78
1	0,642 757 015 330 88
2	0,681 006 584 823 73
3	0,811 003 793 050 89
4	1,216 187 141 219 82
5	2,082 845 013 158 52
6	2,496 023 185 507 44
7	2,499 934 544 671 00
8	2,499 937 584 478 88
9	2,499 937 586 790 09
10	2,499 937 586 791 85
11	2,499 937 586 791 85

TABLEAU 7. Les 11 premières valeurs de v_n pour $K = 5/2$ et $x_0 = g(5/8)$.

n	v_n
0	-1,250 000 000 000 00
1	-1,276 234 593 770 97
2	-1,278 291 487 793 66
3	-1,278 451 122 808 18
4	-1,278 463 502 139 32
5	-1,278 464 462 068 63
6	-1,278 464 536 503 98
7	-1,278 464 542 275 88
8	-1,278 464 542 723 45
9	-1,278 464 542 758 16
10	-1,278 464 542 760 85
11	-1,278 464 542 761 06
12	-1,278 464 542 761 07
13	-1,278 464 542 761 07

TABLEAU 8. Les 13 premières valeurs de v_n pour $K = -1$ et $x_0 = -5/4$.

et on obtient pour chacune des trois simulations :

$$|v_{13} - r(-1)| = 0, \quad (57a)$$

$$|v_{12} - \alpha(5/2)| = 0, \quad (57b)$$

$$|v_{11} - \beta(5/2)| = 0, \quad (57c)$$

ce qui confirme (55).

(d) Étudions maintenant la convergence de la suite x_n définie par (16).

(i) Dans le cas où $x_0 = r(K)$, d'après (9c), on a pour tout n , $x_n = r(K)$.

(ii) Si $x_0 < r(K)$, d'après (9b) appliqué à x_0 , on a $x_1 = g(x_0) > r(K)$; puis, d'après (9a) appliqué à x_1 , on a $x_2 = g(x_1) < r(K)$. On montre aisément par récurrence sur n que

$$x_0 < r(K) \implies \forall n, \quad x_{2n} < r(K) \text{ et } x_{2n+1} > r(K). \quad (58)$$

De même, on montre aisément par récurrence sur n que

$$x_0 > r(K) \implies \forall n, \quad x_{2n} > r(K) \text{ et } x_{2n+1} < r(K). \quad (59)$$

On considère ensuite les deux suites w_n et z_n des termes de rangs pairs et impairs définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = x_{2n}, \quad z_n = x_{2n+1}. \quad (60)$$

On alors

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= x_{2n+2} = g(x_{2n+1}) = g(g(x_{2n})) = g^2(w_n), \\ z_{n+1} &= x_{2n+3} = g(x_{2n+2}) = g(g(x_{2n+1})) = g^2(z_n), \end{aligned}$$

et autrement dit,

$$\begin{aligned} \text{les deux suites } w_n \text{ et } z_n \text{ sont les deux suites du point fixe associées à la fonction } g^2 \\ \text{par } x_{n+1} = g^2(x_n) \text{ de premiers termes respectifs } x_0 \text{ et } x_1. \end{aligned} \quad (61)$$

Ainsi, d'après (58) et (59), on a

$$x_0 < r(K) \implies \forall n, \quad w_n < r(K) \text{ et } z_n > r(K), \quad (62a)$$

$$x_0 > r(K) \implies \forall n, \quad w_n > r(K) \text{ et } z_n < r(K) \quad (62b)$$

Enfin, on n'a plus qu'à utiliser (55) :

$$\text{Si } K \leq 1, \text{ les deux suites } w_n \text{ et } z_n \text{ convergent toutes les deux vers } r(K), \quad (63a)$$

et donc la suite x_n converge vers $r(K)$.

$$\text{Si } K > 1, \text{ les deux suites } w_n \text{ et } z_n \text{ convergent respectivement vers } \alpha(K) \text{ et } \beta(K) \text{ si } x_0 < r(K), \quad (63b)$$

$$\text{Si } K > 1, \text{ les deux suites } w_n \text{ et } z_n \text{ convergent respectivement vers } \beta(K) \text{ et } \alpha(K) \text{ si } x_0 > r(K), \quad (63c)$$

et donc, $K > 1$, puisque $\alpha(K) \neq \beta(K)$, la suite x_n ne converge donc pas.

Bref, pour récapituler, on a montré que, pour tout K dans \mathbb{R} .

$$\text{Si } x_0 = r(K), \text{ la suite } x_n \text{ est constante égale à } r(K). \quad (64a)$$

$$\text{Si } x_0 \neq r(K) \text{ et } K \leq 1, \text{ la suite } x_n \text{ converge vers } r(K). \quad (64b)$$

$$\text{Si } x_0 \neq r(K) \text{ et } K > 1, \text{ la suite } x_n \text{ est divergente.} \quad (64c)$$

Remarque 8. Voir de nouveau la remarque 6.

Remarque 9. Ce résultat pouvait être démontré en utilisant la proposition P.2 du polycopié de cours.

(e) Les simulations numériques et le corrigé des questions 2a et 2b, illustreront les résultats (64) établis.

◇

(a) On pose, dans cette question ;

$$a = -2, \quad (65a)$$

$$b = -1/2, \quad (65b)$$

$$K = -1. \quad (65c)$$

(i) Montrons, qu'avec ces valeurs, la méthode du point fixe converge pour tout $x_0 \in [a, b]$. Il suffit d'utiliser directement la proposition 4.22 du polycopié de cours.

La fonction g étant décroissante, l'intervalle $[a, b]$ est g -stable si l'on a

$$a \leq g(b) \text{ et } g(a) \leq b, \quad (66)$$

ce qu'on vérifie numériquement.

La fonction g' donnée par (11) étant décroissante et négative, on a donc

$$\max_{x \in [a, b]} |g'(x)| = e^{\max\{a, b\}}, \quad (67)$$

qui est strictement plus petit que 1 si a et b sont strictement négatifs, ce qui est le cas ici. On a donc

$$k = \max_{x \in [a, b]} |g'(x)|, \quad (68)$$

où

$$k = e^{-1/2} \text{ avec } k < 1. \quad (69)$$

Les deux hypothèses de la proposition 4.22 du polycopié de cours sont vérifiées ce qui permet de conclure.

(ii) La valeur de n telle que

$$|x_n - r| \leq \varepsilon \quad (70)$$

avec

$$\varepsilon = 10^{-2}, \quad (71)$$

est donnée par la proposition 4.24 du polycopié de cours. Avec k donné par (69), on obtient numériquement

$$n = 11. \quad (72)$$

(iii)

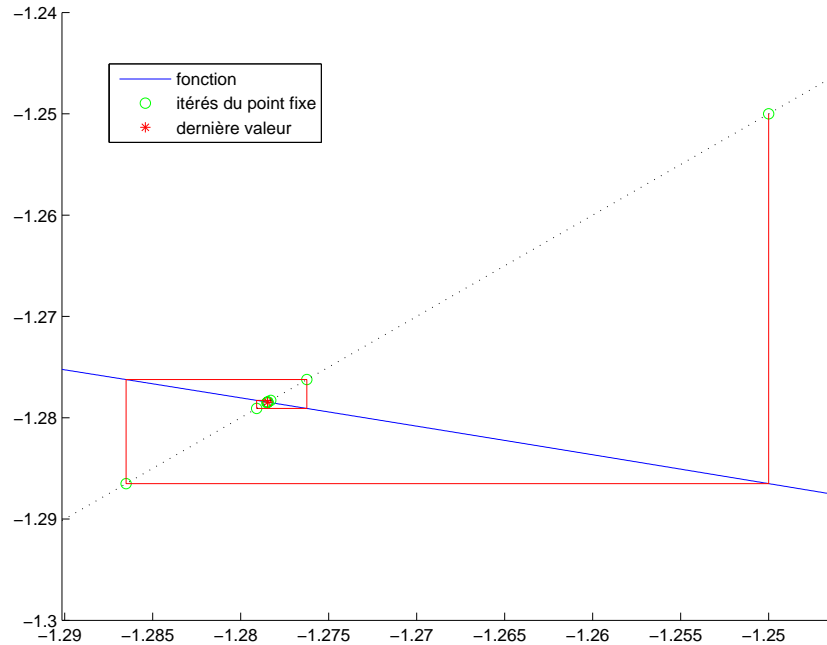


FIGURE 8. Les 12 premières valeurs de x_n pour $K = -1$ et $x_0 = -5/4$.

On a affiché sur la figure 8, les 12 premières valeurs de x_n pour $K = -1$ et $x_0 = -5/4$. On a indiqué dans le tableau 9 page suivante, les valeurs correspondantes (en allant plus loin, jusqu'à $n = 29$), en séparant les termes d'indices impairs et pairs.

Cela est conforme au résultat (64b), puisqu'ici, $K \leq 1$ et $r(-1)$ est donné par (56a). Cela est aussi conforme aux résultat (63a) : les deux suites de rangs pairs et impairs convergent toutes les deux vers $r(-1)$, en étant l'une inférieure, l'autre supérieure à $r(-1)$ et étant toutes les deux monotones.

Remarque 10. Notons qu'il est possible de déterminer de façon explicite, grâce à la fonction W de Lambert la valeur de $r(K)$, pour tout K réel. Voir la section F.2 du polycopié de cours. On a

n	x_{2n}	x_{2n+1}
0	-1,250 000 000 000 00	-1,286 504 796 860 19
1	-1,276 234 593 770 97	-1,279 086 197 358 40
2	-1,278 291 487 793 66	-1,278 512 736 603 42
3	-1,278 451 122 808 18	-1,278 468 279 767 19
4	-1,278 463 502 139 32	-1,278 464 832 537 49
5	-1,278 464 462 068 63	-1,278 464 565 231 06
6	-1,278 464 536 503 98	-1,278 464 544 503 45
7	-1,278 464 542 275 88	-1,278 464 542 896 18
8	-1,278 464 542 723 45	-1,278 464 542 771 55
9	-1,278 464 542 758 16	-1,278 464 542 761 89
10	-1,278 464 542 760 85	-1,278 464 542 761 14
11	-1,278 464 542 761 06	-1,278 464 542 761 08
12	-1,278 464 542 761 07	-1,278 464 542 761 07
13	-1,278 464 542 761 07	-1,278 464 542 761 07
14	-1,278 464 542 761 07	-1,278 464 542 761 07

TABLEAU 9. Les 30 premières valeurs de x_n pour $x_0 = -5/4$ et $K = -1$.

ici

$$a = 1, \quad (73a)$$

$$b = 1, \quad (73b)$$

$$c = -K \quad (73c)$$

et donc

$$\Delta = e^K \in \mathbb{R}_+^*, \quad (74)$$

et on a donc d'après (F.11) du polycopié de cours, la solution unique $r(K)$, donnée par

$$r(K) = K - W_0(e^K). \quad (75)$$

Cela est confirmé par matlab :

`solve('e^x=-x+K','x')`

qui donne

$$\frac{-\text{LambertW}(\ln(e) e^{\ln(e)K}) + \ln(e) K}{\ln(e)}$$

la fonction `lambertw` est programmée sous matlab et on peut donc utiliser directement (75). Numériquement, on a

$$r(-1) = -1,278\,464\,542\,761\,073\,9, \quad (76)$$

ce qui confirme la valeur finale du tableau 9. De plus, pour n donné par (72), on a

$$|x_n - r(-1)| = 2,246\,99 \times 10^{-8},$$

ce qui confirme *a posteriori* le choix de n défini par la majoration (70).

(b) On pose, dans cette question ;

$$a = 1/4, \quad (77a)$$

$$b = 1, \quad (77b)$$

$$K = 5/2. \quad (77c)$$

(i) Comme dans la question 2a, la fonction g' donnée par (11) est décroissante et négative et on a donc

$$\min_{x \in [a,b]} |g'(x)| = e^{\min\{a,b\}}, \quad (78)$$

qui est strictement plus grand que 1 si l'un des réels a et b est strictement positif, ce qui est le cas ici. On a donc

$$k = \min_{x \in [a,b]} |g'(x)|, \quad (79)$$

où

$$k = e^{1/4} \text{ avec } k > 1. \quad (80)$$

Par ailleurs, on a

$$\text{signe}(f(a)f(b)) = -1, \quad (81)$$

et donc l'intervalle $[a, b]$ contient l'unique racine $r(K)$ de f . Donc, de (79) et (80), on peut déduire que

$$|g'(r(K))| > 1 \quad (82)$$

et le point $r(K)$ est dit répulsif. Voir la remarque 4.13 du polycopié de cours. *Attention*, l'égalité (82) ne permet pas *a priori* d'affirmer que la méthode du point fixe est divergente.

Pour cela, on peut utiliser par exemple la proposition 4.15 du polycopié de cours. Ses trois hypothèses sont vérifiées. En effet, on pose $I = [a, b]$ et on successivement :

— g est définie sur \mathbb{R} donc sur I .

— La propriété (4.28b) du polycopié de cours est vérifiée. En effet, On utilise la remarque 4.16 du polycopié de cours. La fonction g étant décroissante, l'intervalle $\mathbb{R} \setminus [a, b]$ est g -stable si l'on a

$$g(b) \leq a \text{ et } g(a) \geq b, \quad (83)$$

ce qu'on vérifie numériquement.

— Enfin, la propriété (4.28c) du polycopié de cours est vérifiée d'après (79) et (80).

On peut donc conclure que la suite x_n diverge pour tout $x_0 \in [a, b] \setminus \{r(K)\}$.

La preuve de ce résultat a été établie dans le cas général pour tout $K > 1$ et pour tout $x_0 \neq r(K)$. Voir (64c).

◇

Remarque 11.

On a affiché sur la figure 9 page ci-contre, les 30 premières valeurs calculées avec les paramètres donnés par (77) et x_0 donné par

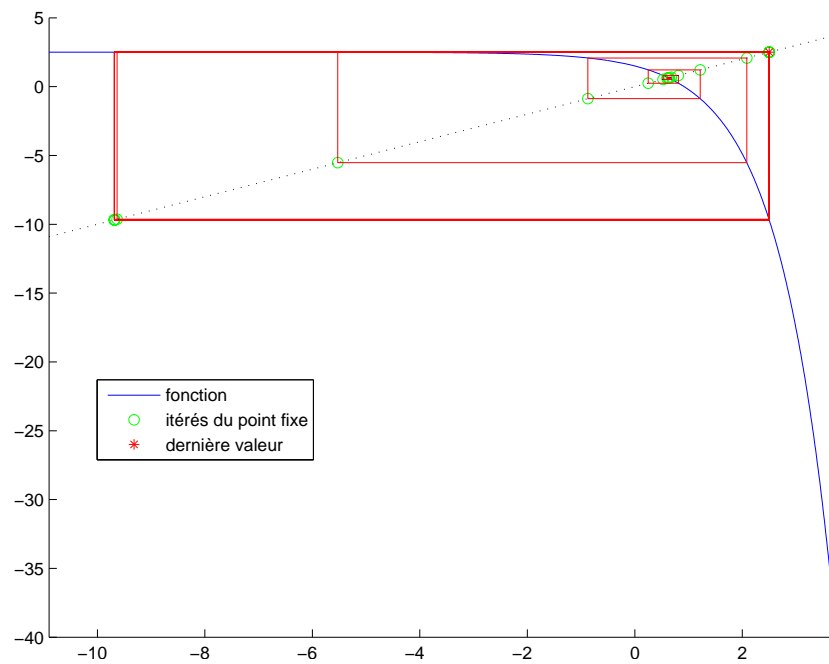
$$x_0 = 5/8. \quad (84)$$

On a indiqué dans le tableau 10 page suivante, les valeurs correspondantes, en séparant les termes d'indices impairs et pairs.

(A)

On constate sur la figure 9 page ci-contre et surtout sur le tableau 10 page suivante, que la suite x_n semble ne pas converger. Plus précisément, il semble apparaître que la suite des termes de rangs pairs convergerait en décroissant vers la valeur

$$l_p = -9,681\,733\,635\,899\,508\,5, \quad (85)$$

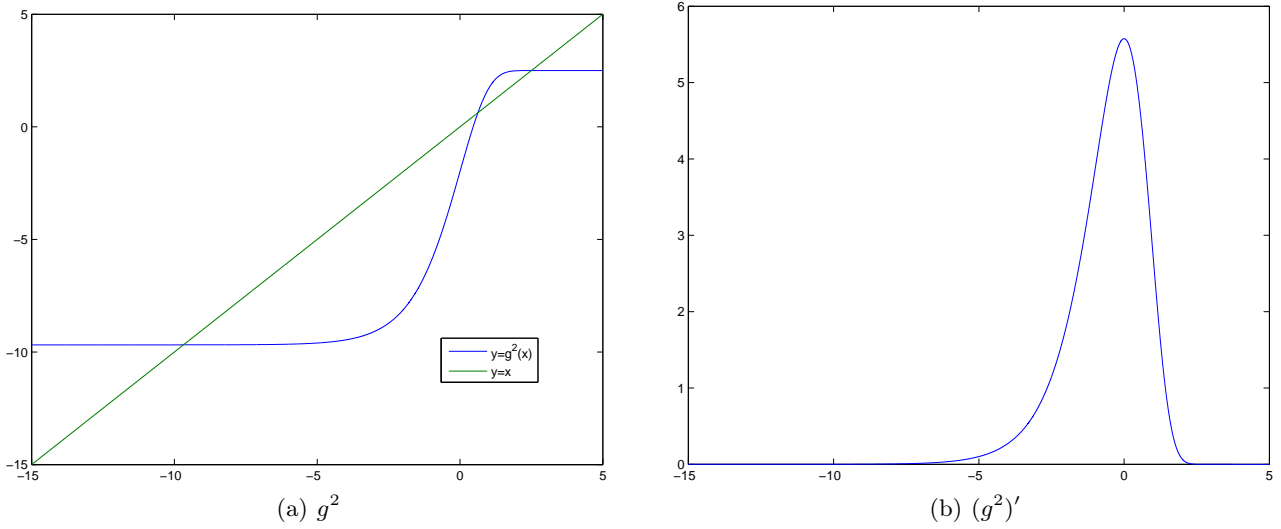
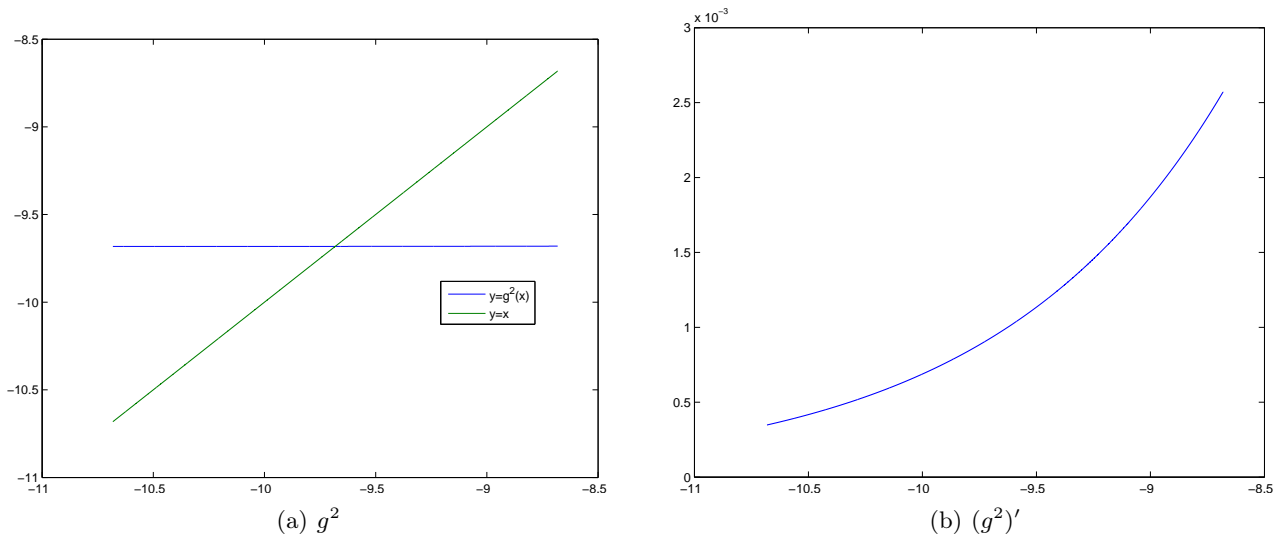
FIGURE 9. Les 30 premières valeurs de x_n pour $x_0 = 5/8$ et $K = 5/2$.

n	x_{2n}	x_{2n+1}
0	0,625 000 000 000 00	0,631 754 042 567 78
1	0,619 093 121 774 70	0,642 757 015 330 88
2	0,598 283 279 505 39	0,681 006 584 823 73
3	0,524 134 392 085 49	0,811 003 793 050 89
4	0,249 834 446 031 84	1,216 187 141 219 82
5	-0,874 297 455 153 25	2,082 845 013 158 52
6	-5,527 274 158 912 70	2,496 023 185 507 44
7	-9,634 142 647 988 75	2,499 934 544 671 00
8	-9,681 696 577 650 00	2,499 937 584 478 88
9	-9,681 733 607 723 56	2,499 937 586 790 09
10	-9,681 733 635 878 09	2,499 937 586 791 85
11	-9,681 733 635 899 49	2,499 937 586 791 85
12	-9,681 733 635 899 51	2,499 937 586 791 85
13	-9,681 733 635 899 51	2,499 937 586 791 85
14	-9,681 733 635 899 51	2,499 937 586 791 85

TABLEAU 10. Les 30 premières valeurs de x_n pour $x_0 = 5/8$ et $K = 5/2$.

et que la suite des termes de rangs impairs convergerait en croissant vers la valeur

$$l_i = 2,499\,937\,586\,791\,849\,0, \quad (86)$$

FIGURE 10. Les graphiques des fonction g^2 et $(g^2)'$ sur l'intervalle $[-15, 5]$.FIGURE 11. Les graphiques des fonction g^2 et $(g^2)'$ sur l'intervalle $[-10, 681.73, -8, 681.73]$.

(B)

Tâchons d'expliquer de façon qualitative les observations faites dans la question 2(b)iA grâce aux figures 10, 11 et 12. En fait, la suite x_{2n} des termes de rangs pairs vérifie la relation de récurrence

$$x_{2n+2} = g(x_{2n+1}) = g(g(x_{2n})) = g^2(x_{2n}),$$

où g^2 est donnée par (17). De même, la suite x_{2n+1} des termes de rangs impairs vérifie la relation de récurrence

$$x_{2n+3} = g(x_{2n+2}) = g(g(x_{2n+1})) = g^2(x_{2n+1}).$$

Le comportement de la fonction g^2 permet donc de prédire la convergence des suites x_{2n} et x_{2n+1} . On constate sur la figure 10, que la fonction g^2 semble avoir trois points fixes dont

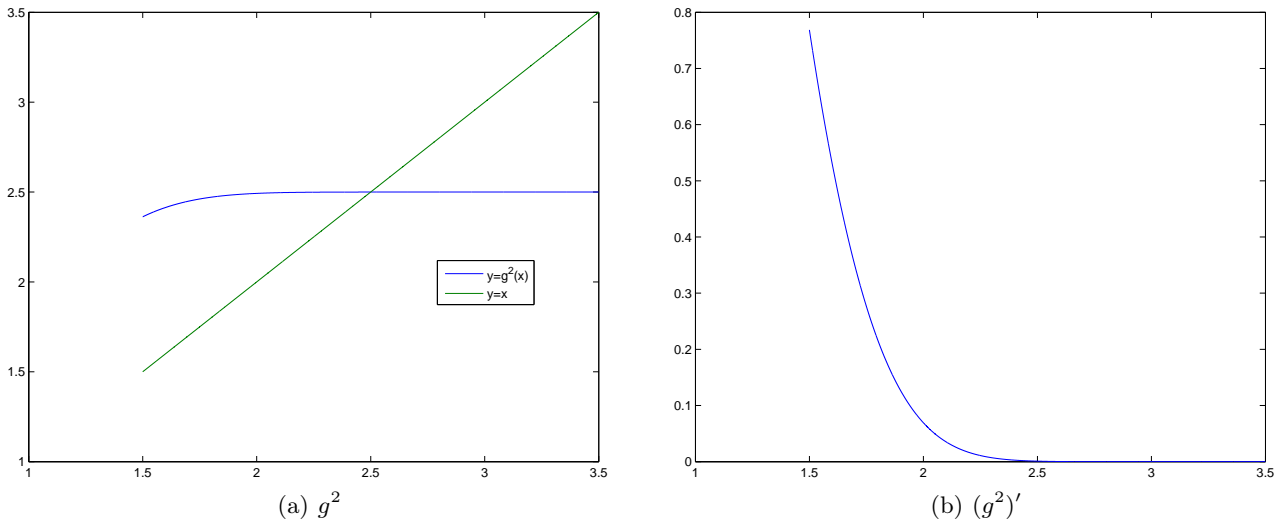


FIGURE 12. Les graphiques des fonction g^2 et $(g^2)'$ sur l'intervalle $[1, 499.94, 3, 499.94]$.

les valeurs numériques sont proches des trois valeurs données par (56). Il semblerait que le plus grand et le plus petit point fixe soient des points attractifs pour la fonction g^2 comme le montrent les figures 11 et 12, et que le point fixe intermédiaire soit répulsif comme le montre la figure (10(b)). On peut confirmer cela puisque que l'on peut vérifier numériquement qu'en ces trois points fixes, on a

$$g'(r(5/2)) = 2,567\,854\,985\,668\,169, \quad (87a)$$

$$g'(\alpha(5/2)) = 0,000\,760\,301\,077\,059, \quad (87b)$$

$$g'(\beta(5/2)) = 0,000\,760\,301\,077\,059. \quad (87c)$$

On pourrait aussi montrer que les hypothèses de la proposition 4.22 du polycopié de cours sont valables pour la fonction g^2 sur des intervalles autour des valeurs du premier et du dernier point fixe de g^2 données par (56b) et (56c). Ainsi, il y aurait bien convergence des suites x_{2n} et x_{2n+1} vers ces valeurs.

De façon plus rigoureuse, il suffit d'utiliser les résultats (63b) et (64c), qui prévoient la divergence de la suite x_n et la convergence de x_{2n} et x_{2n+1} vers $\alpha(K)$ et $\beta(K)$ (distincts), puisque $x_0 < r(K)$. Enfin, on confirme cela de façon numérique puisque pour $n = 15$, on a

$$\begin{aligned} |x_{2n} - l_p| &= 0, \\ |x_{2n+1} - l_i| &= 0. \end{aligned}$$

- (ii) Pour résoudre (1) dont on sait que la solution $r(5/2)$ existe et est unique, on ne peut donc utiliser la méthode du point fixe qui diverge. En revanche, on peut utiliser la méthode de la dichotomie sur l'intervalle $[a, b]$, qui converge ici vers $r(5/2)$ d'après (81). On choisit n pour que la méthode de dichotomie fournisse $r(5/2)$ avec une erreur inférieure à ε donné par

$$\varepsilon = 10^{-16},$$

en utilisant la proposition 4.5 du polycopié de cours. On obtient pour le n -ième milieu

$$x_n = 0,627\,352\,959\,583\,406,$$

et, en utilisant (75), qui fournit,

$$r(5/2) = 0,627\,352\,959\,583\,406,$$

on a

$$|x_n - r(5/2)| = 0.$$

Correction de l'exercice 2.

(1)

$$f(x) = x^2 - a$$

(2)

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{x_k^2 + a}{2x_k} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right)$$

(3)

n	x_n	$ x_n - \sqrt{a} $
0	5.0000000000	1.8377223398
1	3.5000000000	0.3377223398
2	3.1785714286	0.0162937684
3	3.1623194222	0.0000417620

TABLEAU 11. Itérés x_n de Newton

Les résultats sont donnés dans le tableau 11.

(4) La méthode de Newton se ramène à une méthode de point fixe en posant :

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - a}{2x}$$

donc

$$g'(x) = 2(x^2 - a)$$

$$g'(r) = g'(\sqrt{a}) = 0$$

$$g''(x) = 4x$$

$$g''(r) = 4\sqrt{a} \neq 0$$

L'erreur de la méthode de point fixe s'écrit :

$$e_{n+1} \simeq g'(r)e_n + \frac{g''(r)}{2}e_n^2 + \frac{g'''(r)}{3!}e_n^3 + \dots$$

Donc ici :

$$e_{n+1} \simeq \frac{g''(r)}{2}e_n^2 \simeq 2\sqrt{a}e_n^2$$

Méthode d'ordre 2.

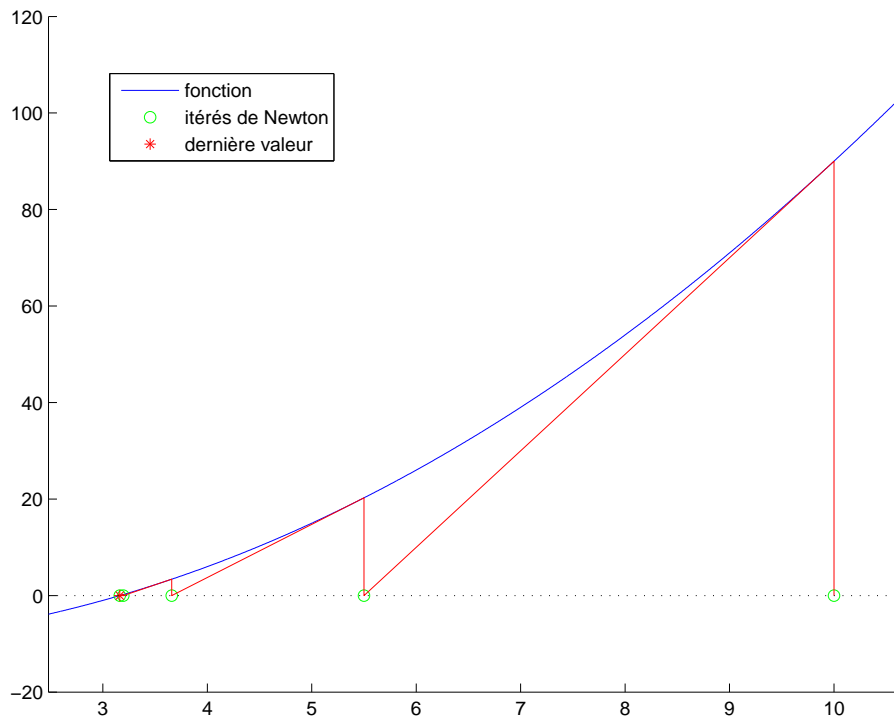


FIGURE 13. Les divers itérés par la méthode de Newton.

- (5) Parmi les méthodes vues en cours, la seule qui est d'ordre 2 est la méthode de Newton. Les autres ont des ordres de convergence inférieurs à 2.

Par ailleurs la valeur initiale peut être choisie arbitrairement car la méthode convergera quel que soit $x_0 > 0$ (voir figure 13), cela est dû au fait que la courbe représentative de $f(x)$ est une parabole qui coupe l'axe des $x > 0$ en une seule valeur positive et $f'(x) > 0$ quel que soit $x > 0$. On peut donc par exemple choisir $x_0 = a$. Une méthode de point fixe par exemple ne convergera pas forcément quel que soit $x_0 > 0$, il faut choisir correctement la fonction d'itération.

Il est donc préférable de choisir la méthode de Newton.

Correction de l'exercice 3.

- (1) Système équivalent :

$$\begin{cases} y_1'(t) &= y_2(t) \\ y_2'(t) &= -2y_1(t)y_2(t) \\ y_1(0) &= 0 \\ y_2(0) &= 4 \end{cases}$$

Les résultats sont donnés dans le tableau 12 page suivante. On constate qu'à partir de $n = 3$, la solution ne bouge plus. Donc la valeur asymptotique est 2.50.

Remarque 12. La solution de l'équation différentielle

$$y''(t) = -2y(t)y'(t), \quad (88a)$$

$$y(0) = y_0, \quad (88b)$$

$$y'(0) = y'_0, \quad (88c)$$

n	t_n	y_1^n	y_2^n
0	0.00	0.00	4.00
1	0.25	1.00	4.00
2	0.50	2.00	2.00
3	0.75	2.50	0.00
4	1.00	2.50	0.00
5	1.25	2.50	0.00
6	1.50	2.50	0.00
7	1.75	2.50	0.00
8	2.00	2.50	0.00
9	2.25	2.50	0.00
10	2.50	2.50	0.00
11	2.75	2.50	0.00
12	3.00	2.50	0.00

TABLEAU 12. Valeurs approchées par Euler progressif

peut s'obtenir sous matlab symbolique. On obtient

$$y(t) = \tanh(t(y'_0 + y_0^2)^{\frac{1}{2}} + \operatorname{atanh}(y_0/(y'_0 + y_0^2)^{\frac{1}{2}}))(y'_0 + y_0^2)^{\frac{1}{2}} \quad (89)$$

Dans le cas particulier de

$$y_0 = 0, \quad (90a)$$

$$y'_0 = 4, \quad (90b)$$

on a alors

$$y(t) = 2\tanh(2t) \quad (91)$$

On obtient en particulier

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} = 2, \quad (92)$$

ce qui confirme le graphe de l'énoncé (voir figure 14 page 26).

Pour obtenir cela à la main, on peut remarquer que $2yy' = (y^2)'$ et donc que (88) est équivalente à :

$$y'(t) = -y^2 + C, \quad (93a)$$

$$y(0) = y_0, \quad (93b)$$

où

$$C = y'_0 + y_0^2 \quad (94)$$

On en déduit d'une part que si y a une limite à l'infini avec une dérivée nulle, alors (93a) implique $y^2(+\infty) = C$, ce qui confirme (92). Cela implique aussi que $C \geq 0$, ce qui est vrai numériquement. On résoud alors (93a) par séparation des variables :

$$\frac{dy}{-y^2 + C} = dt,$$

En posant $y = \sqrt{C}z$, on a alors

$$\frac{dz}{-z^2 + 1} = \sqrt{C}dt,$$

ce que l'on résoud sur un intervalle où z est différent ± 1 en écrivant

$$\int \frac{dz}{-z^2 + 1} = \sqrt{C}t + K. \quad (95)$$

La primitive de gauche est alors évaluée en décomposant la fraction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{1}{-z^2 + 1} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} \right),$$

et donc en intégrant sur un intervalle où z est différent de ± 1 , on a

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{z+1}{z-1} \right| = \sqrt{C}t + k$$

En supposant $|z| < 1$, il vient donc

$$\sqrt{\frac{1+z}{1-z}} = e^{\sqrt{C}t+K},$$

ce qui donne en $t = 0$

$$K = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y_0/\sqrt{C}}{1-y_0/\sqrt{C}}, \quad (96)$$

ainsi que, en retournant à y et en prenant la fonction réciproque,

$$y = \sqrt{C} \frac{e^{2\sqrt{C}t+2K} - 1}{e^{2\sqrt{C}t+2K} + 1}, \quad (97)$$

identique à ce qui est donné par (89). Dans le cas particulier (90), on a

$$C = 4, \quad K = 0,$$

et donc

$$y = 2 \frac{e^{4t} - 1}{e^{4t} + 1},$$

soit encore

$$y = 2 \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{e^{2t} + e^{-2t}}, \quad (98)$$

ce qui est bien équivalent à (91).

On pourrait améliorer le résultat en diminuant h ou en choisissant une méthode d'ordre supérieur, Runge Kutta d'ordre 2 ou 4 par exemple. Voir figure 14 page suivante.

Références

- [RDO88] E. RAMIS, C. DESCHAMPS et J. ODOUX. *Cours de mathématiques spéciales. 3. Topologie et éléments d'analyse*. 2^e édition. Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 510.7 RAM, 4^e étage). Masson, Paris, 1988, pages VIII+362.

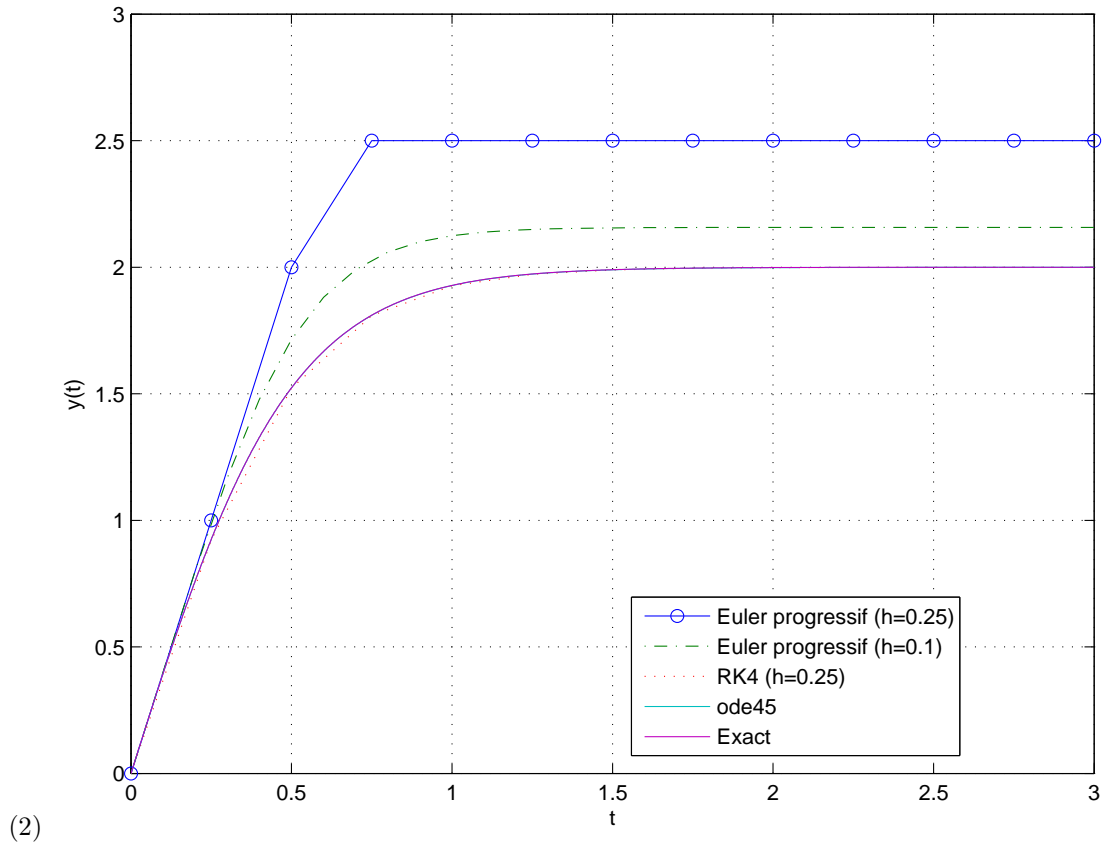


FIGURE 14. La solution exacte et quelques solutions approchées.