POLYTECH LYON

Université Claude Bernard Lyon 1

Matériaux 3A MNBmater

Automne 2023

QCM (maison) pour le 18 octobre 2023

Important :
Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter aucune, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres questions ont une unique bonne réponse.

Ce QCM est en principe modifiable à l'écran et vous devez cocher les cases manuellement. En cas d'erreur, vous pouvez les cocher ou décocher autant de fois que nécesaire.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http ://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

HAUNIME Anne

Chapitre 2, section 2.2

Question 1 On connaît les valeurs d'une fonction f aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$ données par

$$f(x_0) = 3, \quad f(x_1) = 7, \quad f(x_2) = 23, \quad f(x_3) = 57.$$

Π_3, le polynôme d'interpolation de f sur le support $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, est égal à

- ☒ $x^3 + 3\,x^2 + 3$
- ☐ 0
- ☐ $3\,x^3 + 9\,x^2 + 3$
- ☐ x^6

Explication : On obtient les différences divisées données dans le tableau suivant

$x_i \backslash k$	0	1	2	3
$x_0 = 0$	$\boxed{3}$			
		$\boxed{4}$		
$x_1 = 1$	7		$\boxed{6}$	
		16		$\boxed{1}$
$x_2 = 2$	23		9	
		34		
$x_3 = 3$	57			

Le polynôme Π_3 ne peut valoir 0 puisque les données sont non nulles, ni x^6 de degré strictement supérieur à 3. On envoie au point 1 de la remarque 2.16 page 22 du cours. Ici, pour $n = 3$, le coefficient dominant de Π_3 est égal à la différence divisé $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 1$. Parmi les deux polynômes qui restent, un seul a un coefficient dominant égal à 1, c'est $x^3 + 3\,x^2 + 3$. Π_3 vaut donc $x^3 + 3\,x^2 + 3$. Il n'était donc pas nécessaire de calculer complétement le polynôme Π_3 !
On peut aussi retrouver par le calcul, à partir du tableau des différences divisées donnés ci-dessus, le polynôme Π_3. Une dernière possibilité consistait à évaluer les polynômes proposés aux points x_i et ne conserver que celui pour lequel, chaque x_i a pour image le y_i correspondant.

Question 2 On connaît les valeurs d'une fonction f aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$ données par

$$f(x_0) = 0, \quad f(x_1) = 0.8414710, \quad f(x_2) = 0.9092974, \quad f(x_3) = 0.1411200.$$

Π_3, le polynôme d'interpolation de f sur le support $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, est égal à

- ■ $\Pi_3(x) = -0.0103932x^3 - 0.3556426x^2 + 1.2075068x$
- □ $\Pi_3(x) = -0.0103932x^3 - 0.3556426x^2 + 1.2075068x + 3$
- □ $\Pi_3(x) = -0.0103932x^3 - 0.3556426x^2 + 1.2075068x + 6$
- □ $\Pi_3(x) = -0.0103932x^3 + 7$

Explication ***:*** On constate que f est nulle en 0, ce qui doit être aussi le cas de Π_3. Or, on constate qu'un seul polynôme a un coefficient constant nul, c'est $\Pi_3(x) = -0.0103932x^3 - 0.3556426x^2 + 1.2075068x$, qui est donc Π_3. Il était donc intutile de déterminer complètement ce polynôme !
Autrement, on pouvait raisonner comme suit :
On obtient les différences divisées données dans le tableau suivant

$x_i \setminus k$	0	1	2	3
$x_0 = 0$	$\boxed{0}$			
		$\boxed{0.8414710}$		
$x_1 = 1$	0.8414710		$\boxed{-0.3868223}$	
		0.0678264		$\boxed{-0.0103932}$
$x_2 = 2$	0.9092974		-0.4180019	
		-0.7681774		
$x_3 = 3$	0.1411200			

À partir du tableau des différences divisées donnés ci-dessus, on detétermine le polynôme Π_3 et on constate qu'il vaut $\Pi_3(x) = -0.0103932x^3 - 0.3556426x^2 + 1.2075068x$, aux inévitable erreurs d'arrondis près !
Une dernière possibilité consistait à évaluer les polynômes proposés aux points x_i et ne conserver que celui pour lequel, chaque x_i a pour image le y_i correspondant, aux inévitable erreurs d'arrondis près !.

Question 3 ♣ On connaît les valeurs d'une fonction f aux points $(x_i)_{0\leq i\leq 4}$:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 4, \quad x_4 = 5,$$

données par

$$f(x_0) = 12, \quad f(x_1) = 72, \quad f(x_2) = 288, \quad f(x_3) = 810, \quad f(x_4) = 1836.$$

Π_4, le polynôme d'interpolation de f sur le support $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$, est égal à

- ■ $2\,x^4 + 5\,x^3 - 2\,x^2 + x + 6$
- ■ $(x-1)\,((x-2)\,((x-3)\,(2\,x+17)+78)+60) + 12$
- ☐ $2\,x^4 + 37\,x^3 + 58\,x^2 - 15\,x + 10$
- ☐ $2\,x^4 + 29\,x^3 + 43\,x^2 - 11\,x + 9$
- ☐ $2\,x^4 + 13\,x^3 + 13\,x^2 - 2\,x + 7$
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : On obtient les différences divisées données dans le tableau suivant

$x_i \setminus k$	0	1	2	3	4
$x_0 = 1$	$\boxed{12}$				
		$\boxed{60}$			
$x_1 = 2$	72		$\boxed{78}$		
		216		$\boxed{25}$	
$x_2 = 3$	288		153		$\boxed{2}$
		522		33	
$x_3 = 4$	810		252		
		1026			
$x_4 = 5$	1836				

À partir du tableau des différences divisées donnés ci-dessus, on detétermine le polynôme Π_4 et on constate qu'il vaut sous sa forme de Newton $(x-1)\,((x-2)\,((x-3)\,(2\,x+17)+78)+60)+12$ et sous sa forme développée (canonique) $2\,x^4 + 5\,x^3 - 2\,x^2 + x + 6$.
Une dernière possibilité consistait à évaluer les polynômes proposés aux points x_i et ne conserver que celui pour lequel, chaque x_i a pour image le y_i correspondant.

Question 4 Parmi les figures 1 de la page 5, celle qui représente les polynômes de Lagrange relatifs au support défini par les points :

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3,$$

est la figure :

☐ 1(a) ☐ 1(b) ☐ 1(c) ■ 1(d) ☐ 1(e)

Explication : Conformément au lemme 2.3 du polycopié de cours, les polynômes de Lagranges sont de degré n où le nombre de points est égal à $n+1$. On a donc ici $n=3$. D'après les équations (2.12) du polycopié de cours ou (2.13) du polycopié de cours les polynômes l_i doivent s'annuler en $n=3$ points et seuls, les polynômes de la figure 1(d) vérifient cela ! On vérifie de plus que l'on a bien l'équation (2.12) du polycopié de cours ou l'équation (2.13) du polycopié de cours. Pour vérifier tout cela, il n'est pas nécessaire de calculer les polynômes de Lagranges l_i !

Question 5
On connaît les valeurs d'une fonction f aux points $(x_i)_{0\leq i\leq 3}$ données par

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3,$$

$$y_0 = 2, \quad y_1 = 5, \quad y_2 = 3, \quad y_3 = 8,$$

Sur la figure 2 de la page 6, le polynôme interpolateur Π_3 de f sur le support $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ est represénté en trait

■ continu ☐ tiret-point $(-.)$ ☐ tiret-tiret $(--)$

Explication : D'après la proposition 2.5 du polycopié de cours, le polynôme Π_3 vaut $y_i = f(x_i)$ aux points x_i. Seul, le polynôme de la figure 2 en trait continu vérifie cela (bien observer les ordonnées des étoiles $(*)$ sur la figure). Pour vérifier tout cela, il n'est pas nécessaire de calculer le polynôme interpolateur Π_3 !

Question 6 Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme d'interpolation Π_n relatif au support $\{x_0, ..., x_n\}$ est de degré

- ☐ exactement n
- ☐ supérieur ou égal à n
- ■ inférieur ou égal à n
- ☐ 3

Explication : Voir la proposition 2.5 du polycopié de cours.

Chapitre 2, section 2.4

Question 7 Les points de Tchebycheff

- ■ ne sont équirépartis
- ☐ sont équirépartis

Explication : Voir la définition 2.29 du polycopié de cours.

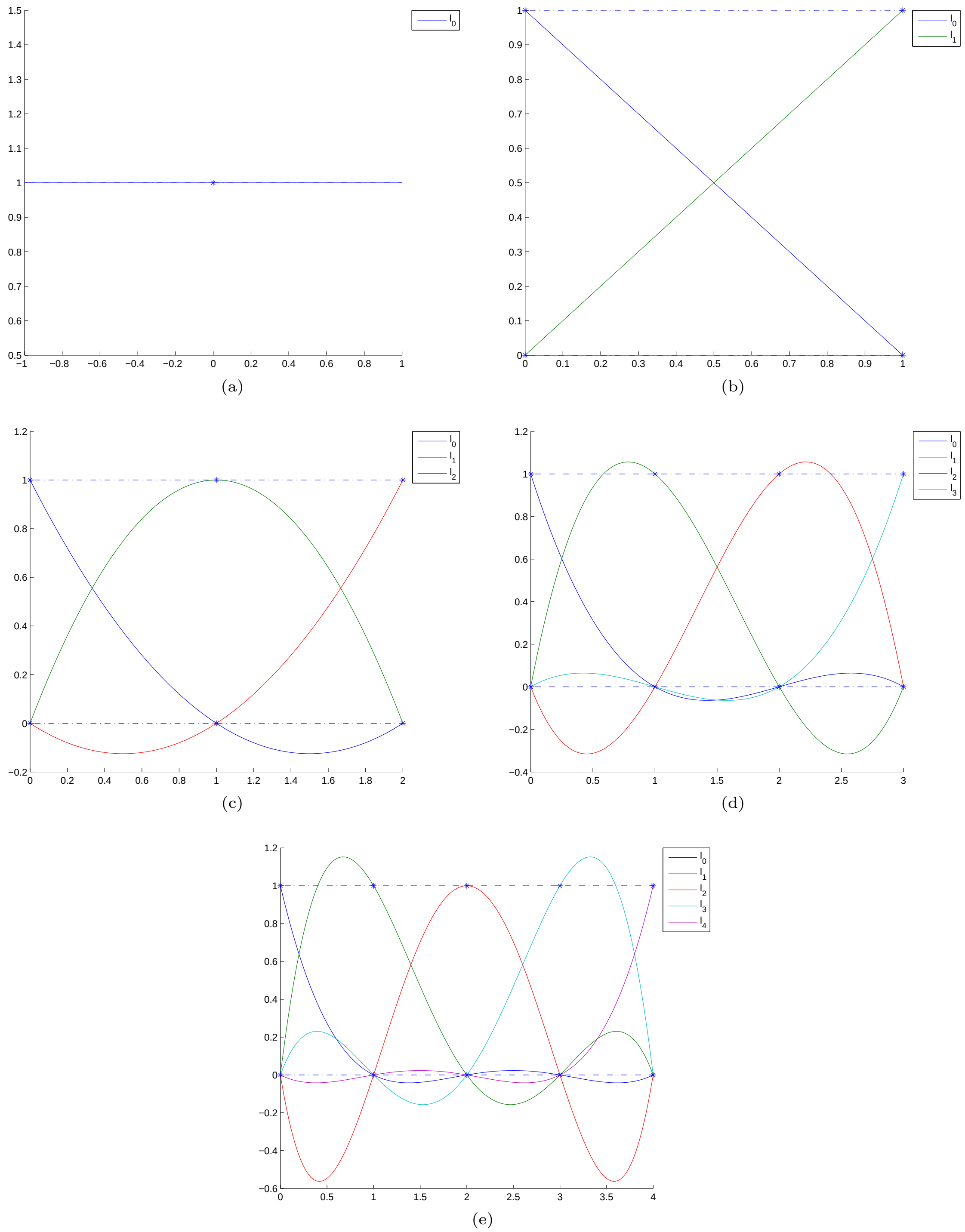

Figure 1 – Quelques tracés de polynômes de Lagrange l_i (question 4).

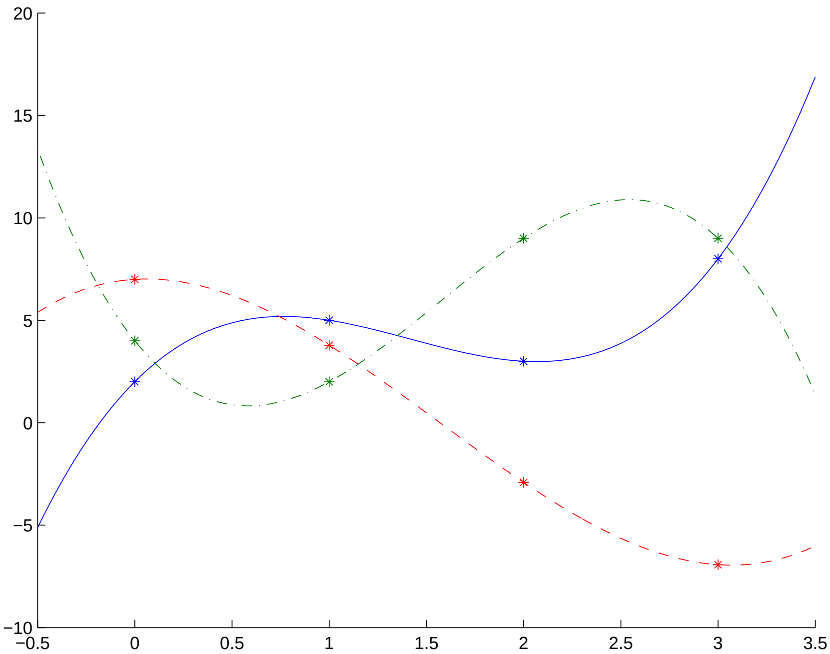

Figure 2 – Plusieurs polynômes interpolateurs Π_3 (question 5).