Matériaux 3A MNBmater — Automne 2025

QCM (maison) pour le 10 novembre 2025

Important :
Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter aucune, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres questions ont une unique bonne réponse.

Ce QCM est en principe modifiable à l'écran et vous devez cocher les cases manuellement. En cas d'erreur, vous pouvez les cocher ou décocher autant de fois que nécesaire.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http ://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

HAUNIME Anne

Chapitre 2, section 2.2

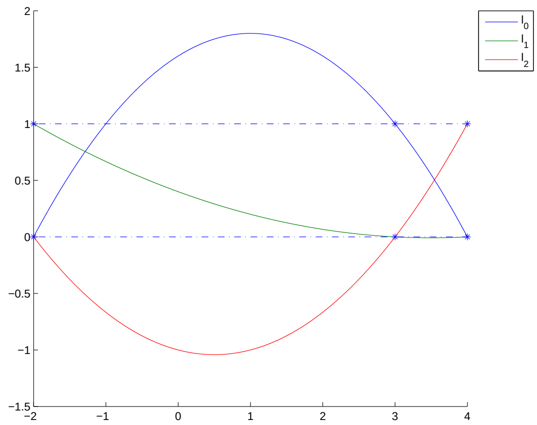


FIGURE 1 – Les polynômes de Lagrange l_i (question 1).

Question 1 Sur la figure 1 de la page 1, ont été représentés les les polynômes de Lagrange relatifs à un support contenant 3 points, $(x_i)_{0\leq i\leq 2}$. Les valeurs des x_i sont données par

- ☐ $$x_0 = -2, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4,$$
- ☒ $$x_0 = 3, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 4,$$
- ☐ $$x_0 = 3, \quad x_1 = 4, \quad x_2 = -2,$$
- ☐ $$x_0 = 4, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 3,$$

Explication **:** Sur la figure 1, les points d'abscisses $(x_i)_{0\leq i\leq 2}$ sont représentés par des étoiles. D'après la propriété (2.21) du polycopié de cours, pour déterminer la valeur de x_0, il suffit de repérer la seule étoile d'ordonnée 1 qui appartient au graphe de l_0, tracé en bleu, les autres étoiles qui appartiennent au graphe de l_0 étant d'ordonnées nulles. On obtient $x_0 = 3$. On fait la même chose pour les autres points.

Question 2

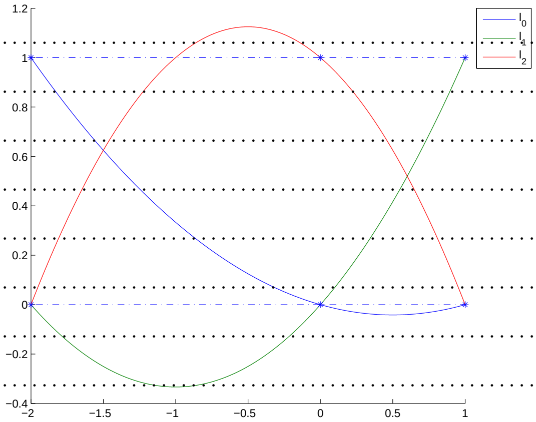
On connaît les valeurs d'une fonction f aux points $x_0 = -2$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 0$:

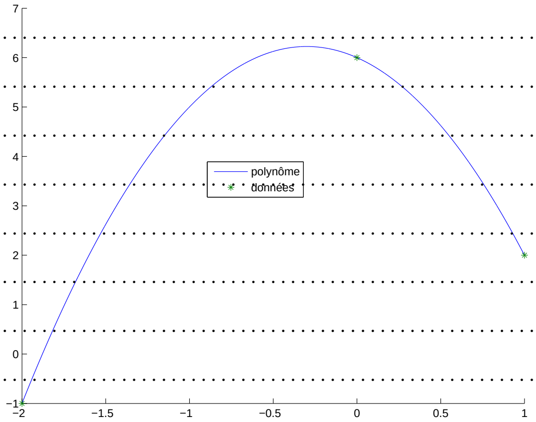
$$f(x_0) = -1, \quad f(x_1) = 2, \quad f(x_2) = 6.$$

Tracer les polynômes l_i et le polynôme interpolateur de Lagrange de f.

☐f ☐p ☐m ■j *Reservé*

On procède exactement comme dans l'exemple 2.9 du polycopié de cours ou l'exercice de TD 2.2.





Sur les figure ci-dessus ont été tracés les polynômes l_i et le polynôme interpolateur de Lagrange de f.

Question 3 On connaît les valeurs d'une fonction f aux points $(x_i)_{0\leq i\leq 4}$:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 4,$$

données par

$$f(x_0) = 1, \quad f(x_1) = 4, \quad f(x_2) = 37, \quad f(x_3) = 172, \quad f(x_4) = 529.$$

Π_4, le polynôme d'interpolation de f sur le support $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$, est égal à

- ■ $2\,x^4 + x^2 + 1$
- □ 0
- □ $-8\,x^4 - 4\,x^2 + 1$
- □ x^7

Explication : On obtient les différences divisées données dans le tableau suivant

$x_i \setminus k$	0	1	2	3	4
$x_0 = 0$	$\boxed{1}$				
		$\boxed{3}$			
$x_1 = 1$	4		$\boxed{15}$		
		33		$\boxed{12}$	
$x_2 = 2$	37		51		$\boxed{2}$
		135		20	
$x_3 = 3$	172		111		
		357			
$x_4 = 4$	529				

Le polynôme Π_4 ne peut valoir 0 puisque les données sont non nulles, ni x^7 de degré strictement supérieur à 4. On envoie au point 1 de la remarque 2.18 page 23 du cours. Ici, pour $n = 4$, le coefficient dominant de Π_4 est égal à la différence divisé $f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = 2$. Parmi les deux polynômes qui restent, un seul a un coefficient dominant égal à 2, c'est $2\,x^4 + x^2 + 1$. Π_4 vaut donc $2\,x^4 + x^2 + 1$. Il n'était donc pas nécessaire de calculer complétement le polynôme Π_4 !
On peut aussi retrouver par le calcul, à partir du tableau des différences divisées donnés ci-dessus, le polynôme Π_4.
Une dernière possibilité consistait à évaluer les polynômes proposés aux points x_i et ne conserver que celui pour lequel, chaque x_i a pour image le y_i correspondant.

Question 4 On connaît les valeurs d'une fonction f aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$ données par

$$f(x_0) = 7, \quad f(x_1) = 11, \quad f(x_2) = 21.$$

Π_2, le polynôme d'interpolation de f sur le support $\{x_0, x_1, x_2\}$, est égal à

- ■ $3\,x^2 + x + 7$
- □ $12\,x^2 + 4\,x + 7$
- □ $-12\,x^2 - 4\,x + 7$
- □ $-6\,x^2 - 2\,x + 7$

Explication : On obtient les différences divisées données dans le tableau suivant

$x_i \setminus k$	0	1	2
$x_0 = 0$	$\boxed{7}$		
		$\boxed{4}$	
$x_1 = 1$	11		$\boxed{3}$
		10	
$x_2 = 2$	21		

On envoie au point 1 de la remarque 2.18 page 23 du cours. Ici, pour $n = 2$, le coefficient dominant de Π_2 est égal à la différence divisé $f[x_0, x_1, x_2] = 3$. Parmi tous les polynômes proposés, un seul a un coefficient dominant égal à 3, c'est $3\,x^2 + x + 7$. Π_2 vaut donc $3\,x^2 + x + 7$. Il n'était donc pas nécessaire de calculer complétement le polynôme Π_2 !
On peut aussi retrouver par le calcul, à partir du tableau des différences divisées donnés ci-dessus, le polynôme Π_2.
Une dernière possibilité consistait à évaluer les polynômes proposés aux points x_i et ne conserver que celui pour lequel, chaque x_i a pour image le y_i correspondant.

Question 5 On connaît les valeurs d'une fonction f aux points $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$ données par

$$f(x_0) = 0, \quad f(x_1) = 0.8414710, \quad f(x_2) = 0.9092974, \quad f(x_3) = 0.1411200.$$

Π_3, le polynôme d'interpolation de f sur le support $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, est égal à

- ■ $\Pi_3(x) = -0,010\ 393\ 2x^3 - 0,355\ 642\ 6x^2 + 1,207\ 506\ 8x$
- □ $\Pi_3(x) = -0.0103932x^3 - 0.3556426x^2 + 1.2075068x + 3$
- □ $\Pi_3(x) = -0.0103932x^3 - 0.3556426x^2 + 1.2075068x + 6$
- □ $\Pi_3(x) = -0.0103932x^3 + 7$

Explication : On constate que f est nulle en 0, ce qui doit être aussi le cas de Π_3. Or, on constate qu'un seul polynôme a un coefficient constant nul, c'est $\Pi_3(x) = -0,010\ 393\ 2x^3 - 0,355\ 642\ 6x^2 + 1,207\ 506\ 8x$, qui est donc Π_3. Il était donc intutile de déterminer complètement ce polynôme !
Autrement, on pouvait raisonner comme suit :
On obtient les différences divisées données dans le tableau suivant

$x_i \setminus k$	0	1	2	3
$x_0 = 0$	$\boxed{0}$			
		$\boxed{0,841\ 471\ 0}$		
$x_1 = 1$	$0,841\ 471\ 0$		$\boxed{-0,386\ 822\ 3}$	
		$0,067\ 826\ 4$		$\boxed{-0,010\ 393\ 2}$
$x_2 = 2$	$0,909\ 297\ 4$		$-0,418\ 001\ 9$	
		$-0,768\ 177\ 4$		
$x_3 = 3$	$0,141\ 120\ 0$			

À partir du tableau des différences divisées donnés ci-dessus, on detétermine le polynôme Π_3 et on constate qu'il vaut $\Pi_3(x) = -0,010\ 393\ 2x^3 - 0,355\ 642\ 6x^2 + 1,207\ 506\ 8x$, aux inévitable erreurs d'arrondis près !
Une dernière possibilité consistait à évaluer les polynômes proposés aux points x_i et ne conserver que celui pour lequel, chaque x_i a pour image le y_i correspondant, aux inévitable erreurs d'arrondis près !.

Question 6 On connaît les valeurs d'une fonction f aux points $(x_i)_{0\leq i\leq 4}$:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 4, \quad x_4 = 5,$$

données par

$$f(x_0) = 5, \quad f(x_1) = 0, \quad f(x_2) = -9, \quad f(x_3) = -22, \quad f(x_4) = -39.$$

Π_4, le polynôme d'interpolation de f sur le support $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$, est égal à

- ■ $-2\,x^2 + x + 6$
- □ $2\,x^4 + 29\,x^3 + 43\,x^2 - 11\,x + 9$
- □ $2\,x^4 + 37\,x^3 + 58\,x^2 - 15\,x + 10$
- □ $2\,x^4 + 13\,x^3 + 13\,x^2 - 2\,x + 7$

Explication : On obtient les différences divisées données dans le tableau suivant

$x_i \setminus k$	0	1	2	3	4
$x_0 = 1$	$\boxed{5}$				
		$\boxed{-5}$			
$x_1 = 2$	0		$\boxed{-2}$		
		-9		$\boxed{0}$	
$x_2 = 3$	-9		-2		$\boxed{0}$
		-13		0	
$x_3 = 4$	-22		-2		
		-17			
$x_4 = 5$	-39				

On constate que les différences divisées sont nulles à partir de la colonne correspondant à $k = 3$, autrement dit, le polynôme est de degré 2. Seul $-2\,x^2 + x + 6$ convenait. Ainsi Π_4 vaut $-2\,x^2 + x + 6$. Il était donc inutile de déterminer complétement le polynôme d'interpolation.
Autrement, on pouvait raisonner comme suit :
À partir du tableau des différences divisées donnés ci-dessus, on detétermine le polynôme Π_4 et on constate qu'il vaut $-2\,x^2 + x + 6$.
Une dernière possibilité consistait à évaluer les polynômes proposés aux points x_i et ne conserver que celui pour lequel, chaque x_i a pour image le y_i correspondant.

Question 7 Parmi les figures 2 de la page 6, celle qui représente les polynômes de Lagrange relatifs au support défini par les points :

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2,$$

est la figure :

□ 2(a) □ 2(b) ■ 2(c) □ 2(d)

Explication : Conformément au lemme 2.4 du polycopié de cours, les polynômes de Lagranges sont de degré n où le nombre de points est égal à $n + 1$. On a donc ici $n = 2$ et les seuls polynômes de degré 2 sont ceux de la figure 2(c), qui sont les seules paraboles. On vérifie de plus que l'on a bien l'équation (2.20) du polycopié de cours ou l'équation (2.21) du polycopié de cours. Pour vérifier tout cela, il n'est pas nécessaire de calculer les polynômes de Lagranges l_i !

Question 8 Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme d'interpolation Π_n relatif au support $\{x_0, ..., x_n\}$ est de degré

- □ exactement n
- □ supérieur ou égal à n
- ■ inférieur ou égal à n
- □ 3

Explication : Voir la proposition 2.6 du polycopié de cours.

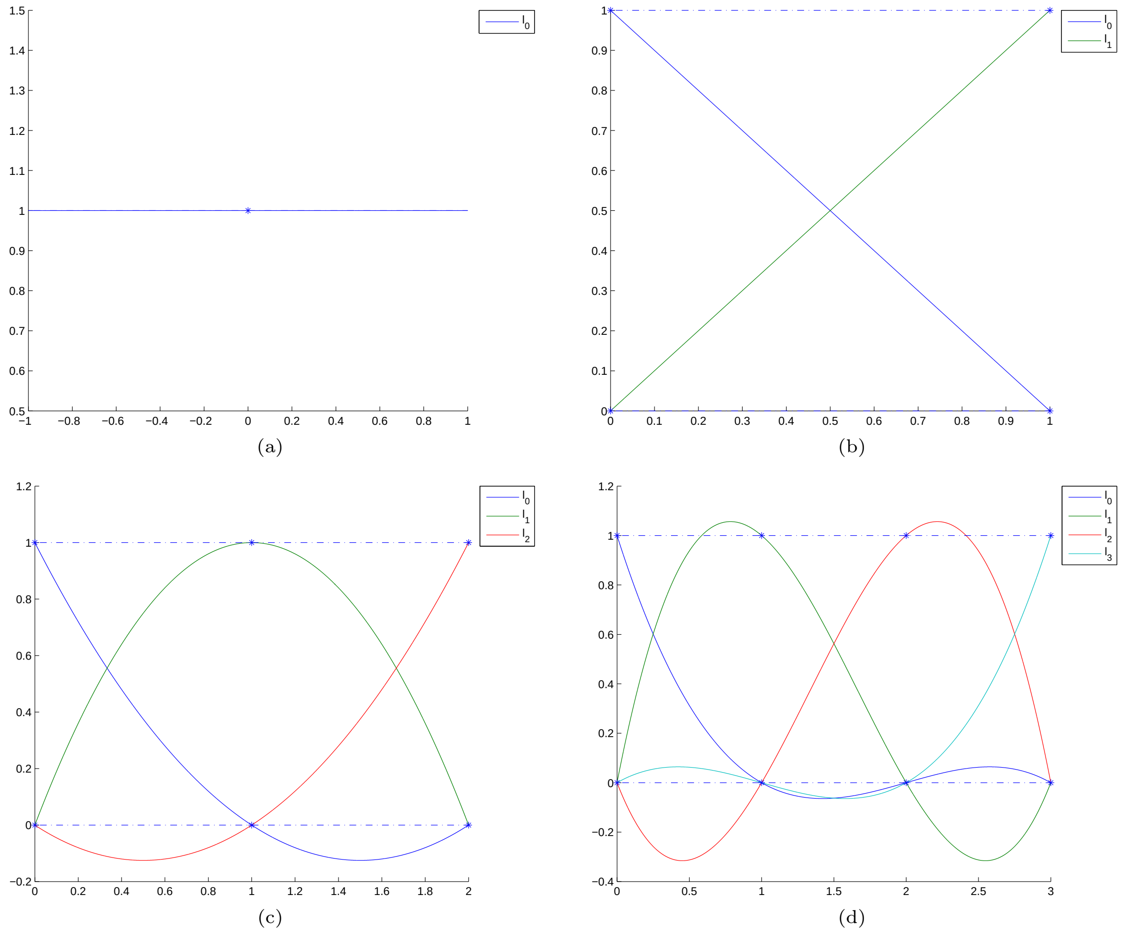


Figure 2 – Quelques tracés de polynômes de Lagrange l_i (question 7).

Question 9 ♣ Soient A et B deux points distincts du plan. L'équation de la droite passant par les points A et B est donnée

■ si $x_A = x_B$, par $x = x_A$.

■ si $x_A \neq x_B$ par :

$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x + y_A - x_A \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

■ si $x_A \neq x_B$ par :

$$\frac{y - y_a}{x - x_a} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

■ si $x_A \neq x_B$ par :

$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x + \frac{x_B y_A - x_A y_B}{x_B - x_A}.$$

■ si $x_A \neq x_B$ par :

$$y = y_A \frac{x - x_B}{x_A - x_B} + y_B \frac{x - x_A}{x_B - x_A}.$$

■ si $x_A \neq x_B$ par :

$$y = y_A + \frac{Y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A).$$

□ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Toutes ces équations sont correctes. On renvoie aux exemples 2.2 page 13 et 2.22 page 29 ainsi qu'à l'annexe C du cours.

Chapitre 2, section 2.4

Question 10 Les points de Tchebycheff

■ ne sont équirépartis

□ sont équirépartis

Explication : Voir la définition 2.32 du polycopié de cours.

Chapitre 2, section 2.5

Question 11 ♣ Soient $x_0 = A < x_1 < \cdots < x_N = B$ des points qui divisent $I = [A, B]$. On note $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ les sous-intervalles de longueur h_j et $h = \max_{1 \leq j \leq N} h_j$. Sur chaque sous-intervalle I_j, on interpole $f_{|I_j}$ par un polynôme de degré n avec des points équirépartis. Le polynôme par morceaux est noté $\Pi_n^h f(x)$. Un majorant de l'erreur commise dans l'interpolation par morceaux est donné par

- ■ $\frac{1}{4(n+1)n^{n+1}} \max_{x\in[A,B]} \left|f^{(n+1)}(x)\right| h^{n+1}$
- ■ $\frac{(B-A)^{n+1}}{4(n+1)n^{n+1}} \max_{x\in[A,B]} \left|f^{(n+1)}(x)\right| \frac{1}{N^{n+1}}$
- ☐ $\frac{1}{8(n+1)n^{n+1}} \max_{x\in[A,B]} \left|f^{(n+3)}(x)\right| h^{n+1}$
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Voir la proposition 2.38 du polycopié de cours.

Chapitre 2, section 2.7

Question 12 ♣ On considère le polynôme d'interpolation Π_1 d'une fonction f sur le support $\{x_0, x_1\}$ pour $x_0 \neq x_1$. On suppose que f dérivable en x_0 et on fait tendre x_1 vers x_0.

- ☐ Le polynôme limite Π_1 n'existe pas.
- ■ Le polynôme limite Π_1 existe et vérifie
$$\Pi_1(x_0) = f(x_0)$$
.
- ■ Le polynôme limite Π_1 existe et vérifie
$$\Pi_1'(x_0) = f'(x_0)$$
.
- ■ Le polynôme limite Π_1 existe et son equation est donnée par
$$\Pi_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$
- ■ La différence divisée $f[x_0, x_1]$ admet une limite égale à $f'(x_0)$.
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Naturellement, le polynôme limite Π_1 existe et correspond à la tangente de f au point x_0. Toutes les réponses sont correctes (sauf la non existence du polynôme limite !). C'est la théorie de l'interpolation d'Hermite dans le cas $n = 1$, présenté en début de section 2.7 du cours.Voir aussi l'exercice de TD 2.6.

Question 13 ♣ On suppose que f dérivable en a. La différence divisée $f[a, a]$

- ☐ n'existe pas car il est nécessaire que les deux arguments soient deux à deux distincts.
- ☐ existe et vaut $f(a)$.
- ■ existe et vaut $f'(a)$.
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : C'est la théorie de l'interpolation d'Hermite dans le cas $n = 1$, présenté en début de section 2.7 du cours. Voir aussi l'exercice de TD 2.6.

Question 14 ♣ On suppose que f admet une dérivée seconde en a. La différence divisée $f[a, a, a]$

- ☐ n'existe pas car il est nécessaire que les deux arguments soient deux à deux distincts.
- ☐ existe et vaut $f(a)$.
- ☐ existe et vaut $f'(a)$.
- ■ existe et vaut $f''(a)/2$.
- ☐ existe et vaut $f'''(a)/6$.
- ☐ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : C'est la théorie de l'interpolation d'Hermite dans le cas $n = 2$, présenté en début de section 2.7 du cours (dans le cas seulement où $n = 2$). Voir aussi l'exercice de TD 2.6.

Chapitre 2, section 2.8

Question 15 ♣ Le polynôme au sens des moindres carrés, définis par le nuage de points $(x_i, y_i)_{0\leq i\leq n+1}$ et de degré $p \leq n$, passe par chacun des points $(x_i, y_i)_{0\leq i\leq n+1}$.

- ☐ oui
- ☐ non
- ■ *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Explication : Si $p = n$, il correspond au polynôme d'interpolation et dans ce cas, il passe par chacun des point ; sinon, il ne passe pas nécessairement par ces points, mais "au plus proche". Voir section 2.8 du polycopié de cours