

**QCM du 20 novembre 2024**

Durée : 15 minutes

 Documents autorisés : OUI  NON 

 Calculatrice autorisée : OUI  NON 
**Important :**

Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter aucune, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres questions ont une unique bonne réponse.

Les réponses seront données dans la feuille de réponse (à la fin du sujet).

**Corrigé**

 Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.cherz-alice.fr/Polytech/index.html>
**Question 1** On connaît les valeurs d'une fonction  $f$  aux points  $(x_i)_{0 \leq i \leq 4}$  :

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 4,$$

données par

$$f(x_0) = -4, \quad f(x_1) = 2, \quad f(x_2) = 50, \quad f(x_3) = 248, \quad f(x_4) = 776.$$

 $\Pi_4$ , le polynôme d'interpolation de  $f$  sur le support  $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$ , est égal à

$3x^4 + 3x - 4$

$9x^4 + 16x - 12$

$-6x^4 - 2x + 8$

$6x^4 + 11x - 8$

**Explication :**

 On peut constater que, parmi tous les polynômes proposés, un seul avait un coefficient constant égal à  $-4$  qui doit être égal à  $\Pi_4(0) = -4$ , d'après les données. Il agit de  $3x^4 + 3x - 4$ .  $\Pi_4$  vaut donc  $3x^4 + 3x - 4$ . Il n'était donc pas nécessaire de calculer complètement ni les différences divisées, ni le polynôme  $\Pi_4$  !

Autrement, on pouvait raisonner comme suit :

On obtient les différences divisées données dans le tableau suivant

$x_i \setminus k$	0	1	2	3	4
$x_0 = 0$	-4				
$x_1 = 1$	2	6			
$x_2 = 2$	50	48	21		
$x_3 = 3$	248	198	75	18	
$x_4 = 4$	776	528	165	30	3

 On envoie au point 1 de la remarque 2.17 page 23 du cours. Ici, pour  $n = 4$ , le coefficient dominant de  $\Pi_4$  est égal à la différence divisée  $f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = 3$ . Parmi tous les polynômes proposés, un seul a un coefficient dominant égal à 3, c'est  $3x^4 + 3x - 4$ .  $\Pi_4$  vaut donc  $3x^4 + 3x - 4$ . Il n'était donc pas nécessaire de calculer complètement le polynôme  $\Pi_4$  !

 On peut aussi retrouver par le calcul, à partir du tableau des différences divisées donnés ci-dessus, le polynôme  $\Pi_4$ . Une dernière possibilité consistait à évaluer les polynômes proposés aux points  $x_i$  et ne conserver que celui pour lequel, chaque  $x_i$  a pour image le  $y_i$  correspondant.

**Question 2** La valeur de la différence divisée  $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$  ne dépend que des points  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .  
 A c'est vrai  C'est faux

**Explication :** Évidemment, car elle dépend aussi des valeurs de  $f$  en ces points! Voir la section 2.2 du polycopié de cours.

**Question 3** La valeur de la différence divisée  $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$  ne dépend pas de l'ordre des points  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .  
 c'est vrai  B C'est faux

**Explication :** La différence divisées  $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$  est invariante par permutation des éléments, c'est-à-dire : pour toute permutation  $\sigma$  de  $\{0, \dots, n\}$ , on a

$$f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}] = f[x_0, x_1, \dots, x_n]. \quad (1)$$

Il n'est pas nécessaire de faire de savants calculs. Il suffit d'utiliser la caractérisation (2.26) du cours de  $\Pi_n$ . On a donc l'égalité (2.26) du polycopié de cours dont on déduit de façon immédiate que pour toute permutation  $\sigma$  de  $\{0, \dots, n\}$

$$\forall j \in \{0, \dots, n\} \quad \Pi_n(x_{\sigma(j)}) = y_{\sigma(j)}.$$

D'après le point 1 page 23 du cours et (1),  $f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}]$  est le coefficient dominant de  $\Pi_n$  qui est aussi  $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$  et ces deux différences divisées sont donc égales. Cette propriété est en cas particulier de la théorie de l'interpolation d'Hermite (voir section 2.7.)

**Question 4** Pour déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange,  
 il est préférable d'utiliser la méthode de Newton.  
 B il est préférable d'utiliser les polynômes de Lagrange.  
 C on peut utiliser indifféremment la méthode de Newton ou les polynômes de Lagrange.

**Explication :** Voir la section 2.2.2.5 du polycopié de cours.

**Question 5** Le polynôme d'interpolation  $\Pi_n$  est de degré  
 inférieur ou égal à  $n$ .  D exactement  $n$ .  
 B inférieur ou égal à  $n - 1$ .  E exactement  $n + 1$ .  
 C inférieur ou égal à  $n - 2$ .

**Explication :** Voir la phrase juste après la proposition 2.6 du polycopié de cours.

**Question 6 ♣** Le polynôme au sens des moindres carrés, définis par le nuage de points  $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq n+1}$  et de degré  $p \leq n$ , passe par chacun des points  $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ .  
 A oui  Aucune de ces réponses n'est correcte.  
 B non

**Explication :** Si  $p = n$ , il correspond au polynôme d'interpolation et dans ce cas, il passe par chacun des point ; sinon, il ne passe pas nécessairement par ces points, mais "au plus proche". Voir section 2.8 du polycopié de cours

**Question 7** La méthode d'intégration élémentaire du point milieu sur l'intervalle  $[a, b]$  est donnée par

$$\input checked="" type="checkbox"/>  $(b - a)f((a + b)/2)$   B  $(b - a)f(a)$   C  $(b - a)f((a + b)/3)$$$

**Explication :** Voir le tableau 3.2 du polycopié de cours.

**Question 8** La méthode élémentaire de Simpson est plus précise que la méthode élémentaire du rectangle.

$$\input type="checkbox"/> A C'est faux.  C'est vrai.$$

**Explication :** Voir le tableau 3.3 du polycopié de cours qui fait apparaître une erreur en  $(b - a)^5$  pour Simpson contre une erreur en  $(b - a)^2$  pour le rectangle.



### Feuille de réponses :

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille.

Il est préférable que vous utilisiez un stylo noir ou bleu ou un crayon à papier de type B ou HB. Vous devez noircir complètement<sup>1</sup> les cases choisies. Les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

← codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

- QUESTION 1 :   B  C  D
- QUESTION 2 :  A
- QUESTION 3 :   B
- QUESTION 4 :   B  C
- QUESTION 5 :   B  C  D  E
- QUESTION 6 :  A  B
- QUESTION 7 :   B  C
- QUESTION 8 :  A

1. Dans ce cas, vous pouvez effacer la/les case(s) avec la gomme ou la recouvrir de ruban correcteur et vous n'avez pas d'autre possibilité de corriger une case cochée par erreur.