TRAVAUX DIRIGÉS DE l'UE MNBmater

Matériaux 3A

MÉTHODES NUMÉRIQUES DE BASE

2023-2024, Automne

N. Débit & J. Bastien

Document compilé le 9 août 2023

Liste des Travaux Dirigés

Avant-propos

Ce polycopié constitue les TD de Méthodes Numériques de Base du département Matériaux 3A (2023-2024, Automne).

Ce polycopié de TD est normalement disponible à la fois

- en ligne sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html` à la rubrique habituelle ;
- en cas de problème internet, sur le réseau de l'université Lyon I : il faut aller sur :
  - 'Poste de travail',
  - puis sur le répertoire '`P:`' (appelé aussi '`\\teraetu\Enseignants`'),
  - puis '`jerome.bastien`',
  - puis '`Polytech`',
  - puis '`Matériaux 3A`'.
  - enfin sur '`MNBmater`'.

Des exercices facultatifs, non traités en séances (sauf si demande), sont proposés sur cette version distribuée sur le Ouaib et le réseau.

TRAVAUX DIRIGÉS 1

Introduction

EXERCICE 1.1.
Cet exercice correspond à l'exercice du cours du chapitre 1 page suivante (voir section 1.3).

(1) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n à la fonction e^x sur l'intervalle $[0, x]$ (ou $[x, 0]$) et en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = p_n(x) + R_n(x).$$

où $p_n(x)$ est un polynôme de degré n en x et $R_n(x)$ une expression à déterminer.

(2) En distinguant les cas $x < 0$ et $x > 0$, obtenir deux expressions polynômiales d'un minorant et d'un majorant de $e^x - p_n(x)$.

(3) Conclure sur une expression
   (a) d'une approximation de e^x et la majoration d'erreur commise.
   (b) de deux approximations de e^x par défaut et par excès et la majoration d'erreur commise.

Exercices facultatifs

EXERCICE 1.2.

(1) Écrire les développements limités des fonctions sin et cos aux ordres respectifs 3 et 2 en 0.

(2) En déduire les approximations de $\sin\left(10^{-3}\right)$ et de $\cos\left(10^{-3}\right)$.

(3) Confirmez cela avec votre calculatrice.

On pourra consulter l'exercice 1.3 qui reprend et développe cet exercice.

EXERCICE 1.3.
Cet exercice est l'étude rigoureuse de l'exercice 1.2.

(1) *Approximation de* $\cos x$ *et de* $\sin x$. Attention, x est mesuré en radians.
   (a) Montrer que pour tout entier n et pour tout réel x

$$\begin{cases} \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + R_n^c, \\ \\ \sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_n^s, \end{cases} \tag{1.1}$$

avec

$$R_n^c \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \text{ et } R_n^s \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

(b) On note désormais

$$\begin{cases} C_n(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \\ \\ S_n(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{cases}$$

Pourquoi les formules (1.1) permettent-elles d'obtenir une approximation de $\cos x$ et de $\sin x$ avec une erreur respectivement inférieure à $(|x|^{2n+2})/(2n+2)!$ et $(|x|^{2n+3})/(2n+3)!$?

(2) On suppose dans toute cette question que $x = 10^{-3}$.

(a) Déterminer un entier n_1 tel que

$$\frac{|x|^{2n_1+2}}{(2n_1+2)!} \leq 10^{-9} \text{ et } \frac{|x|^{2n_1+3}}{(2n_1+3)!} \leq 10^{-9}.$$

Nb : On pourra procéder par «tâtonnement».

(b) En calculant $C_n(10^{-3})$ et $S_n(10^{-3})$ pour $n = 1$, proposez une approximation de $\cos(10^{-3})$ et de $\sin(10^{-3})$ à 10^{-9} près.

Comparez ces valeurs approchées aux valeurs de $\cos(10^{-3})$ et de $\sin(10^{-3})$ «exactes» renvoyées par la machine et commentez brièvement.

(3) On suppose pour toute cette question que x est élément de $[0, \pi/4]$.

(a) Montrer que

$$\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+2} \frac{1}{(2n+2)!} \text{ et } \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+2} \frac{1}{(2n+2)!}. \tag{1.2}$$

(b) Montrer que, pour $n = 5$, on a, pour tout x de $[0, \pi/4]$:

$$\begin{cases} |\cos x - C_n(x)| \leq 10^{-9}, \\ |\sin x - S_n(x)| \leq 10^{-9}. \end{cases} \tag{1.3}$$

(c) Déduire de (1.3) une approximation de $\cos x$ et de $\sin x$ pour x élément de $\{10^{-3}, \pi/7, \pi/4\}$.

Comparez les aux valeurs «exactes» renvoyées par la machine et commentez brièvement.

(d) Comparez et commentez les méthodes des questions 2 et 3.

(4) *Extension des résultats obtenus*

(a) Comment peut-on utiliser les résultats de la question 3 pour calculer des approximations du cosinus et de sinus de tout réel à 10^{-9} près ?

(b) Proposez des approximations de $\cos x$ et de $\sin x$ pour x élément de $\{\pi/3, 3.2, 6\}$.

Comparez les aux valeurs «exactes» renvoyées par la machine et commentez brièvement.

TRAVAUX DIRIGÉS 2

Interpolation

EXERCICE 2.1.
Le but de cet exercice est, entre autre, de justifier la convention (2.28) du polycopié de cours.

(1) En redéfinissant rapidement, a^n, pour a réel et n entier relatif, expliquer pourquoi $a^0 = 1$ (cela, de façon élémentaire, au niveau collège.).

(2) De la même façon, montrer que, si I est un ensemble vide, le produit

$$P = \prod_{i \in I} x_i,$$

doit être choisi conventionnellement égal à 1 et que la somme

$$S = \sum_{i \in I} x_i,$$

doit être choisie conventionnellement égale à 0.

EXERCICE 2.2.
On connaît les valeurs d'une fonction g aux points $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ et $x_2 = 6$:

$$g(x_0) = -3, \quad g(x_1) = 1, \quad g(x_2) = 2.$$

(1) Construire les interpolants de Lagrange pour trouver le polynôme de degré au plus 1 (noté $\Pi_1(g)$), interpolant la fonction g aux nœuds x_0 et x_1. Pour $\alpha = 1.8$, donner une valeur approchée de $g(\alpha)$.

(2) Construire les interpolants de Lagrange pour trouver le polynôme de degré au plus 2 (noté $\Pi_2(g)$), interpolant la fonction g aux nœuds x_0, x_1 et x_2. Donner une valeur approchée de $g(\alpha)$.

(3) Traiter de nouveau ces deux questions en utilisant la forme de Newton.

(4) Comparer les deux méthodes et conclure.

EXERCICE 2.3. Soient $a = 6$, $b = 7$, $A = 2$, $B = 3$. On se donne la fonction :

$$f(x) = \ln(Ax + B), \quad x \in [a, b]$$

(1) Donner l'expression du polynôme $\Pi_3 f$ de degré 3 interpolant f aux nœuds de Chebyshev x_0, x_1, x_2, x_3, que l'on calculera.

(2) Estimer l'erreur $E_3(f) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - \Pi_3 f(x)|$ sachant que la fonction $|\omega_4(x)| = |\prod_{i=0}^{3}(x - x_i)|$ est représentée par la figure 2.1.

EXERCICE 2.4. Soit la fonction à valeurs réelles :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right).$$

Soit $\Pi_n f$ le polynôme interpolant la fonction f aux nœuds équidistribués $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

(1) Estimer l'erreur d'interpolation $E_n(f) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - \Pi_n f(x)|$ en fonction du degré n du polynôme $\Pi_n f$. Etudier le comportement de l'erreur lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

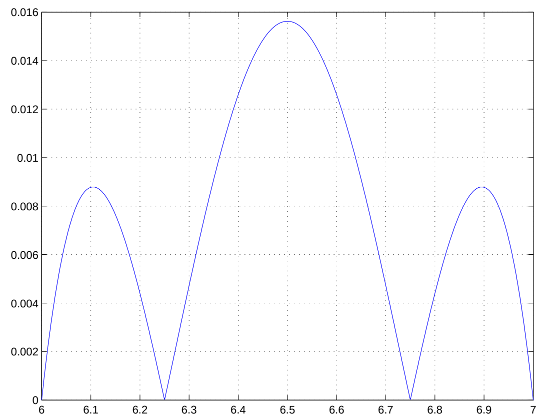

FIGURE 2.1. Le graphique de la fonction $x \mapsto |\omega_4(x)|$.

(2) Trouver le nombre minimal de nœuds équirépartis pour que $E_n(f) \leq 10^{-4}$.

(3) Est-ce que tous les résultats sont encore valables pour g définie par

$$\forall x \in [6000, 6001], \quad g(x) = \sin\left(\frac{x - 6000}{3}\right)?$$

EXERCICE 2.5. Soit la fonction f à valeurs réelles :

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad x \in [0, 1].$$

On considère le polynôme composite $\Pi_1^h f$ de degré 1 par morceaux qui interpole la fonction f sur N sous-intervalles de longueur uniforme h.
Trouver le nombre minimal N de sous-intervalles pour que l'erreur $E_1^h(f) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - \Pi_1^h f(x)|$ soit inférieure à $5\,10^{-7}$.

EXERCICE 2.6.
On dispose des résultats expérimentaux pour la position $f(t)$ d'une étoile à différents temps t,

t	1.0000	1.5000	2.0000	2.5000	3.0000	3.5000	4.0000
$f(t)$	4.4836	5.4086	6.5509	7.8307	9.2060	10.6105	12.0076

(1) Utiliser la forme de Newton du polynôme d'interpolation (table des différences divisées) pour estimer la position de l'étoile au temps $\tau = 3.1$, au moyen d'un polynôme cubique.

(2) Donner l'expression analytique de l'erreur pour le polynôme obtenu.

(3) Donner une approximation de l'erreur commise dans cette estimation.

On pourra consulter l'exercice très proche 2.8 page suivante.

Exercices facultatifs

EXERCICE 2.7.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$, et des points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ deux à deux distincts. Soit Π_n relatif au support $\{x_0, ..., x_n\}$ tel que,

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad \Pi_n(x_i) = y_i.$$

(1) Construire des points $(y_i)_{0\leq i\leq n}$ tels que Π_n soit de degré exactement égal à p.

(2) Application numérique :

On choisit $n = 3$, $p = 2$ et les points $(x_i)_{0\leq i\leq 3}$ donnés par

$$\forall i \in \{0, ..., 3\}, \quad x_i = i.$$

Déterminer des valeurs de y_i et construire Π_3.

EXERCICE 2.8.

En course à pied sur route, on utilise des modèles d'interpolation pour estimer, à partir de performances (temps) qu'un coureur a déjà réalisées sur certaines distances, les performances qu'il pourrait réaliser sur d'autres distances. On cherche ainsi à approcher la fonction $t(x)$ qui indique le temps en secondes que le coureur mettrait pour parcourir x mètres. On considère ici un coureur dont les performances sont indiquées dans le tableau suivant :

x (en mètres)	0	100	1500	10000
$t(x)$ (en secondes)	0	13	245	1980

(1) Utiliser un polynôme d'interpolation de degré 2 pour estimer la performance que devrait réaliser ce coureur sur une distance de 5000 m.

(2) Donner une approximation de l'erreur commise dans cette estimation en calculant l'écart absolu avec l'estimation par un polynôme d'interpolation de degré 3.

EXERCICE 2.9.

Démontrer les formules (2.54) page 33 du cours à partir de l'interprétation géométrique de la figure 2.10 (du cours).

TRAVAUX DIRIGÉS 3

Intégration

On pourra consulter les formules d'erreur données en page 7.

EXERCICE 3.1. On recherche une approximation de l'intégrale $I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$, dont on ne connaît pas la primitive.

(1) Donner une approximation de cette intégrale en appliquant la méthode du trapèze composite sur 4 sous-intervalles.

(2) Indiquer le terme d'erreur globale que l'on fait par cette méthode de trapèze composite.

Théoriquement de combien devrait-on diminuer le pas d'intégration, *i.e.*, la largeur des intervalles, pour faire une erreur 4 fois moins grande que celle commise en question 1 ? Justifier votre réponse.

(3) Déterminer alors le nombre d'intervalles minimal nécessaire pour déterminer l'approximation de l'intégrale I par la méthode du trapèze composite avec une erreur égale à

$$\varepsilon = 10^{-4}. \tag{3.1}$$

(4) Donner une approximation de cette intégrale en appliquant la méthode de simpson composite sur 2 sous-intervalles.

(5) Déterminer maintenant le nombre d'intervalles minimal nécessaire pour déterminer l'approximation de l'intégrale I par la méthode de Simpson composite avec la même erreur que précédemment, donnée par (3.1).

EXERCICE 3.2. On considère la formule de quadrature suivante pour approcher l'intégrale $\int_{-1}^1 g(t)\,dt$,

$$Q(g) = \frac{4}{3}g\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3}g(0) + \frac{4}{3}g\left(\frac{1}{2}\right). \tag{3.2}$$

(1) Utiliser cette formule pour approcher l'intégrale $\int_{-1}^1 xe^{-x}\,dx$.

(2) Utiliser maintenant cette formule pour approcher l'intégrale $\int_1^3 x\ln(x)\,dx$.

(3) On a appliqué la formule de quadrature composite, I_h, associée à la formule (3.2) introduite ici, pour approcher l'intégrale $\int_1^3 x\ln(x)\,dx$. Le tableau suivant montre l'erreur commise pour différentes valeurs de h, longueur de chaque sous-intervalle :

h	erreur
1	2.284218 e-4
0.5	1.439331 e-5
0.25	9.033080 e-7

Déduire de façon approximative l'ordre de convergence $q \in \mathbb{N}$ de cette formule composite.

Erreurs des méthodes d'intégration

Méthodes élémentaires sur $[a,b]$. Dans le tableau qui suit, η appartient à $]a,b[$.

méthode	erreur
rectangle	$\frac{(b-a)^2}{2}f'(\eta)$
milieu	$\frac{(b-a)^3}{24}f''(\eta)$
trapèze	$-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)$
Simpson	$-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\eta)$

Méthodes composites (composées) sur $[A,B]$ avec un pas $h=(B-A)/N$. Dans le tableau qui suit, η appartient à $[A,B]$.

méthode	erreur
rectangle	$h\frac{B-A}{2}f'(\eta)$
milieu	$h^2\frac{B-A}{24}f''(\eta)$
trapèze	$-h^2\frac{B-A}{12}f''(\eta)$
Simpson	$-h^4\frac{B-A}{2880}f^{(4)}(\eta)$

Exercices facultatifs

EXERCICE 3.3. On considère la formule de quadrature $Q(f)=\alpha_1 f(0)+\alpha_2 f(1)+\alpha_3 f'(0)$, pour approcher numériquement l'intégrale $I(f)=\int_0^1 f(x)\,dx$, f étant une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$ et dérivable en 0.

(1) Trouver les poids α_j, $j=1,2,3$, tels que la formule intègre exactement des polynômes jusqu'au degré 2. Quel est le degré d'exactitude de cette formule ?

(2) Utiliser la formule de quadrature trouvée pour calculer l'intégrale $I=\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

EXERCICE 3.4.
Soit f, une fonction continue sur l'intervalle $[-1,1]$. On considère la formule de quadrature

$$Q(f)=W_0 f(x_0)+W_1 f(x_1). \tag{3.3}$$

où les points x_0 et x_1 sont donnés par

$$x_0=-1/3\sqrt{3}, \tag{3.4}$$

$$x_1=1/3\sqrt{3}, \tag{3.5}$$

pour approcher numériquement l'intégrale

$$\mathcal{I}(f)=\int_{-1}^1 f(x)dx. \tag{3.6}$$

(1) (a) Trouver les poids W_0 et W_1, pour que la formule (3.3) intègre exactement les polynômes jusqu'au degré 1.

(b) On propose dans cette question de procéder autrement pour éviter le calcul de l'inverse d'une matrice.

(i) Calculer $\Pi_1(f)$, le polynôme d'interpolation de f sur le support $\{x_0, x_1\}$ en fonction de $f(x_0)$ et $f(x_1)$.

(ii) Calculer

$$\mathcal{I}\big(\Pi_1(f)\big) = \int_{-1}^{1} \Pi_1(f)(x)dx, \tag{3.7}$$

en fonction de $f(x_0)$ et $f(x_1)$.

(iii) En justifiant et en utilisant l'égalité de $Q\left(\Pi_1(f)\right)$ et de $\mathcal{I}\big(\Pi_1(f)\big)$, en déduire de nouveau l'expression des poids W_0 et W_1.

(2) Calculer le degré d'exactitude de cette formule.

(3) Utiliser la formule mise au point pour approcher l'intégrale donnée par

$$\mathcal{I}(f) = \int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx. \tag{3.8}$$

EXERCICE 3.5.
Soit f, une fonction continue sur l'intervalle $[-1, 1]$. On considère la formule de quadrature

$$Q(f) = W_0 f(x_0) + W_1 f(x_1) + W_2 f(x_2). \tag{3.9}$$

où les points x_0, x_1 et x_2 sont donnés par

$$x_0 = -1/5\,\sqrt{15}, \tag{3.10}$$

$$x_1 = 0, \tag{3.11}$$

$$x_2 = 1/5\,\sqrt{15}, \tag{3.12}$$

pour approcher numériquement l'intégrale

$$\mathcal{I}(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx. \tag{3.13}$$

(1) (a) Trouver les poids W_0, W_1 et W_2, pour que la formule (3.9) intègre exactement les polynômes jusqu'au degré 2.

(b) On propose dans cette question de procéder autrement pour éviter le calcul de l'inverse d'une matrice.

(i) Calculer $\Pi_2(f)$, le polynôme d'interpolation de f sur le support $\{x_0, x_1, x_2\}$ en fonction de $f(x_0)$, $f(x_1)$ et $f(x_2)$.

(ii) Calculer

$$\mathcal{I}\big(\Pi_2(f)\big) = \int_{-1}^{1} \Pi_2(f)(x)dx, \tag{3.14}$$

en fonction de $f(x_0)$, $f(x_1)$ et $f(x_2)$.

(iii) En justifiant et en utilisant l'égalité de $Q\left(\Pi_2(f)\right)$ et de $\mathcal{I}\big(\Pi_2(f)\big)$, en déduire de nouveau l'expression des poids W_0, W_1 et W_2.

(2) Calculer le degré d'exactitude de cette formule.

(3) Utiliser la formule mise au point pour approcher l'intégrale donnée par

$$\mathcal{I}(f) = \int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx. \tag{3.15}$$

TRAVAUX DIRIGÉS 4

Équations non-linéaires

EXERCICE 4.1.
On considère la fonction suivante

$$f(x) = e^{2\,x} - 2\,x - 8.$$

(1) Déterminer le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ pour $x \geq 0$.

(2) (a) Est-ce que la méthode de la bissection converge sur l'intervalle $[0, 1.2]$?

(b) Faire *quatre* itérations de la méthode de la bissection à partir de l'intervalle $[0, 1.2]$.

(3) Sans faire d'itérations, déterminer combien vous devriez faire d'itérations pour calculer la racine à l'aide de la méthode de la bissection, avec une précision de $\varepsilon = 1.0\,10^{-8}$. en partant de l'intervalle $[1.0, 2.0]$.

(4) Répondre aux questions 1, 2 et 3 lorsque

$$f(x) = x - \cos(x)$$

dans l'intervalle $[-1.0, 2.0]$.

EXERCICE 4.2.
On rappelle l'exemple 4.10 page 79 du cours, rappelé ci-dessous :

EXEMPLE 4.1. On considère le polynôme P donné par

$$P(x) = x^2 - 3 - 2\,x.$$

dont les racines sont $\{3, -1\}$. On transforme l'équation $P(x) = 0$ en une équation de point fixe de trois façons différentes. Elle est équivalente à $g_i(x) = x$, pour $i \in \{1, 2, 3\}$ avec

$$g_1(x) = \sqrt{2\,x + 3},$$
$$g_2(x) = 3\,(x - 2)^{-1},$$
$$g_3(x) = 1/2\,x^2 - 3/2.$$

Les comportements de convergence dépendent du choix de g_i comme le montre le tableau 4.1.
Les deux premiers choix présente une convergence vers l'une des racines de P, tandis que le dernier choix correspond à une divergence.

Nous démontrons, dans cet exercice, les différents comportements observés.

(1)

On considère la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{2\,x + 3}. \tag{4.1}$$

et on pose

$$a = 2, \quad b = 4. \tag{4.2}$$

(a) Montrer que g a un unique point fixe r sur $[a, b]$ et que la méthode du point fixe est convergente pour tout point de $x_0 \in [a, b]$ vers $r = 3$.

(b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite associée à la méthode du point fixe. Déterminer l'entier n à partir duquel $|x_n - r| \leq \varepsilon$ où $\varepsilon = 1.\,10^{-3}$.

n	g_1	g_2	g_3
0	4	4	4.
1	3.3166247903554	1.5000000000000	6.500000000000
2	3.1037476670488	-6	1.962499999999 10^1
3	3.0343854953017	-0.3750000000000	1.910703125000 10^2
4	3.0114400194265	-1.2631578947368	1.825243215942 10^4
5	3.0038109192912	-0.9193548387097	1.665756383672 10^8
6	3.0012700375978	-1.0276243093923	1.387372164872 10^{16}
7	3.0004233159999	-0.9908759124088	9.624007619305 10^{31}
8	3.0001411020150	-1.0030506406345	4.631076132821 10^{63}
9	3.0000470336363	-0.9989841527834	1.072343307399 10^{127}
10	3.0000156778378	-1.0003387304383	5.749600844623 10^{253}
11	3.0000052259414	-0.9998871026012	$+\infty$
12	3.0000017419800	-1.0000376338825	$+\infty$
13	3.0000005806599	-0.9999874555299	$+\infty$
14	3.0000001935533	-1.0000041815075	$+\infty$
15	3.0000000645178	-0.9999986061661	$+\infty$
16	3.0000000215059	-1.0000004646115	$+\infty$
17	3.0000000071686	-0.9999998451295	$+\infty$
18	3.0000000023895	-1.0000000516235	$+\infty$
19	3.0000000007965	-0.9999999827922	$+\infty$
20	3.0000000002655	-1.0000000057359	$+\infty$
21	3.0000000000885	-0.9999999980880	$+\infty$
22	3.0000000000295	-1.0000000006373	$+\infty$
23	3.0000000000098	-0.9999999997876	$+\infty$
24	3.0000000000033	-1.0000000000708	$+\infty$

TABLE 4.1. Valeurs des itérés du point fixe x_n pour plusieurs choix de g_i

(c) Calculer les termes de la suite correspondant en choisissant $x_0 = 4$.

(2)

On considère la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = 3\ (x-2)^{-1}. \tag{4.3}$$

et on pose

$$a = -2, \quad b = 1/4. \tag{4.4}$$

(a) Montrer que g a un unique point fixe r sur $[a,b]$ et que la méthode du point fixe est convergente pour tout point de $x_0 \in [a,b]$ vers $r = -1$.

(b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite associée à la méthode du point fixe. Déterminer l'entier n à partir duquel $|x_n - r| \leq \varepsilon$ où $\varepsilon = 1.\,10^{-3}$.

(c) Calculer les termes de la suite correspondant en choisissant $x_0 = 1/4$.

(3)

On considère la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = 1/2\, x^2 - 3/2. \tag{4.5}$$

et on pose

$$a = 2, \quad b = 4. \tag{4.6}$$

Montrer que la méthode du point fixe est divergente pour tout point x_0 de $[a,b] \setminus \{3\}$.

EXERCICE 4.3.
On considère la fonction à valeurs réelles : $f(x) = 4\,\cos(1/4\,\pi\,x) + 2\,e^{-x}$ sur l'intervalle $[0,4]$.

(1) Montrer l'existence et l'unicité d'un zéro x^* sur l'intervalle $[0,4]$.
(2) Ecrire la méthode de Newton pour la fonction f et montrer que la convergence est quadratique.
(3) Soit $x_{n+1} = g(x_n)$ la méthode de point fixe associée à la méthode de Newton. Démontrer que l'inégalité
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_{n+1} - x^*| \leq D\,|x_n - x^*|^2 \tag{4.7}$$
est satisfaite pour $D = \frac{1}{2} \max\limits_{x \in [0,4]} |g''(x)|$.
(4) On se place désormais sur l'intervalle $[1.8, 2.3]$ et on admet que l'étude précédente est encore valable sur cet intervalle. On admet que $D \leq D_0$ où
$$D_0 = 0.2. \tag{4.8}$$
Déterminer l'entier n pour lequel l'erreur $|x_n - x^*|$ est inférieure à ε défini par
$$\varepsilon = 10^{-10}. \tag{4.9}$$

EXERCICE 4.4.
On s'intéresse à l'équation
$$p(x) = 0, \tag{4.10}$$
où
$$p(x) = x^4 - 13x^3 + 45x^2 + 25x - 250. \tag{4.11}$$

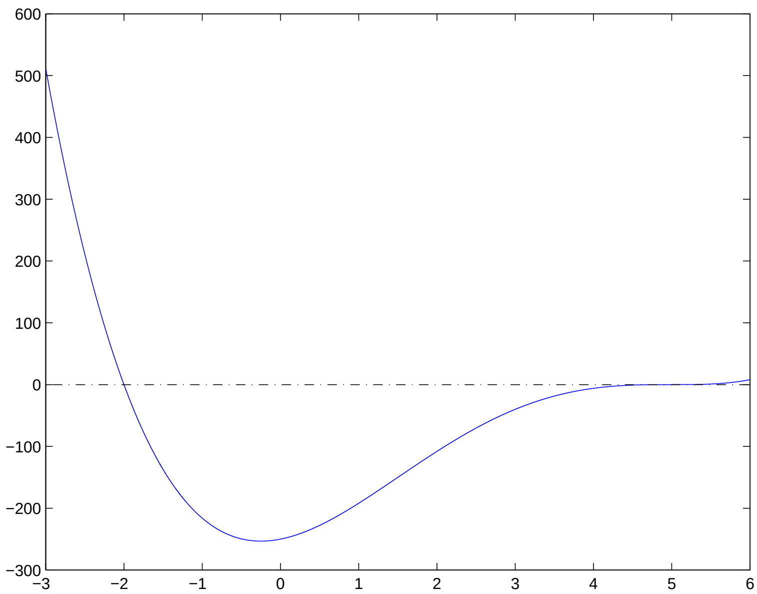

FIGURE 4.1. Fonction p.

La fonction polynôme p est représenté en figure 4.1. L'application de la méthode de Newton à l'équation (4.11) a produit les résultats donnés dans les tableaux 4.2 et 4.3 page suivante et sur les figures 4.2 et 4.3 page 13.

(1) (a) Utiliser les résultats numériques du tableau 4.2 et de la figure 4.2 pour analyser la convergence de cet algorithme.

n	x_n
0	-3.000000000000000
1	-2.272727272727273
2	-2.027579162410623
3	-2.000320918281175
4	-2.000000044129854
5	-2.000000000000001
6	-2.000000000000000
7	-2.000000000000000

TABLE 4.2. Itérations de la méthode de Newton pour $x_0 = -3$.

n	x_n
0	4.000000000000000
1	4.352941176470588
2	4.576207479797041
3	4.720572778683755
4	4.815024216214991
5	4.877245757124600
6	4.918408748717789
7	4.945713169389419
39	5.000050774973653
40	5.000035026141282
41	5.000021788054147
42	5.000004682255494
43	5.000004682255494

TABLE 4.3. Itérations de la méthode de Newton pour $x_0 = 4$.

(b) Pour déterminer l'ordre de convergence de cet algorithme, on pourra, dans un premier temps, observer le nombre de chiffres significatifs apparemment exacts.

(c) Dans un second temps, on pourra considérer que le dernier itéré (d'indice $n_{\rm f}$) fournit la valeur exacte de la racine recherchée. En considérant la suite des erreurs « approchées » $e_n = x_n - x_{n_{\rm f}}$, dont les logarithmes en base [1] 10, notés log sont donnés dans le tableau 4.4, on pourra montrer que l'ordre p de la méthode vérifie

$$\log(|e_{n+1}|) \approx p \log(|e_n|) + K$$

où K est une constante et utiliser le graphique du nuage de points $(\log(|e_n|), \log(|e_{n+1}|))$.

(2) Reprendre la question 1a en utilisant les résultats du tableau 4.3 et de la figure 4.3 pour analyser la convergence de cet algorithme. Les logarithmes en base 10 des erreurs sont donnés dans le tableau 4.5.

1. Voir par exemple [Bas22, chapitre "Logarithme"].

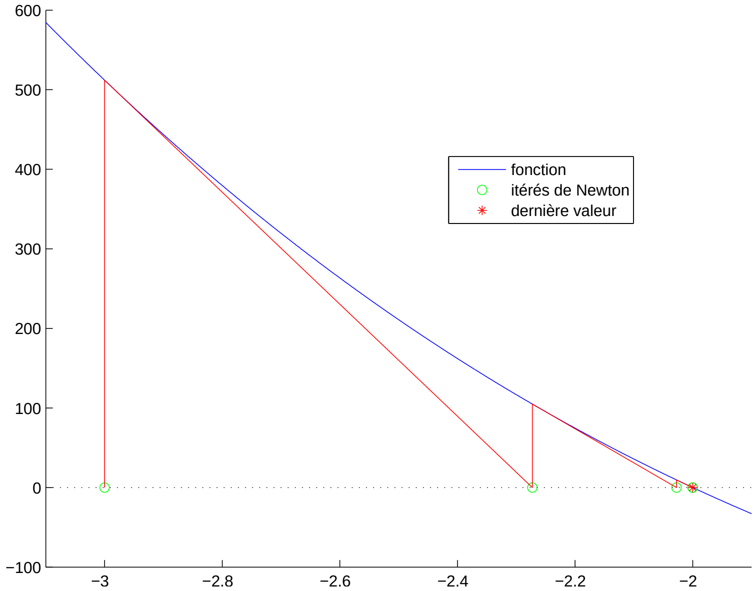

FIGURE 4.2. Graphiques des itérés de la méthode de Newton pour $x_0 = -3$.

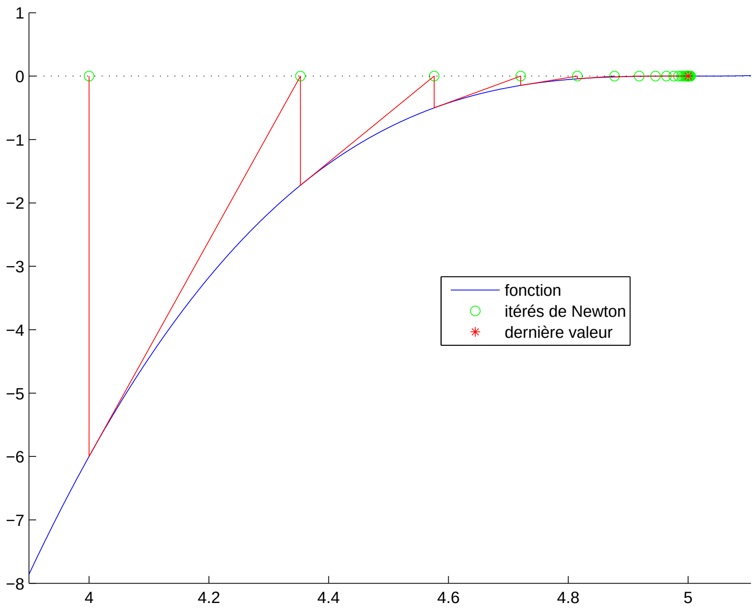

FIGURE 4.3. Graphiques des itérés de la méthode de Newton pour $x_0 = 4$.

Exercices facultatifs

EXERCICE 4.5.

(1)

On cherche à déterminer les racines de l'équation suivante, dite de Ferrari :

$$x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0. \tag{4.12}$$

n	$\log(\lvert x_n - x_{n_f}\rvert)$
0	0.00000
1	-0.56427
2	-1.55942
3	-3.49361
4	-7.35527
5	-15.05150

TABLE 4.4. Logarithmes des erreurs approchées

n	$\log(\lvert x_n - x_{n_f}\rvert)$
0	-0.02424
1	-0.22711
2	-0.43238
3	-0.64755
4	-0.88376
5	-1.16452
6	-1.56377

TABLE 4.5. Logarithmes des erreurs approchées

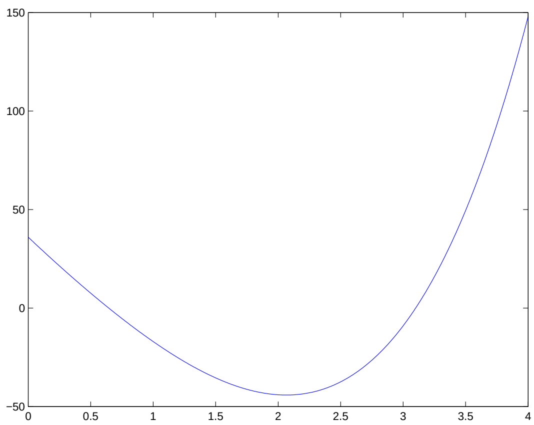

FIGURE 4.4. Le graphique de la fonction $x \mapsto x^4 + 6x^2 - 60x + 36$ sur $[0, 4]$.

Le graphique de cette fonction sur $[0, 4]$ est tracé sur la figure 4.4. Comment montrer que l'équation (4.12) n'a que deux racines sur $[0, 4]$?

(2) (a) Montrer que cette équation peut être mise sous la forme des équations de point fixe $x = g_i(x)$ avec :

$$g_2(x) = -\frac{36}{x^3 + 6x - 60}, \tag{4.13}$$

ou encore

$$g_3(x) = \left(-6x^2 + 60x - 36\right)^{\frac{1}{4}}. \tag{4.14}$$

(b) Montrer que sur $[3, 31/10]$, la fonction g_2 vérifie

$$5 \leq g_2'(x) \leq 10.$$

Qu'en déduire sur la méthode du point fixe pour la fonction g_2 sur $[3, 31/10]$?

(c) (i) Montrer que la méthode du point fixe pour la fonction g_3 sur $[2, 4]$ est convergente vers l'unique solution de (4.12) sur $[2, 4]$.

(ii) Calculer les *sept* premiers itérés de la méthode du point fixe en partant de $x_0 = 2$.

(iii) Estimer le nombre d'itérations nécessaires pour calculer la racine avec une tolérance $\varepsilon = 1.0\,10^{-8}$.

L'exercice 4.5 est inspiré de [BM03, exercice 4.7 p. 175].

EXERCICE 4.6.
On cherche à résoudre l'équation $g(x) = x$ où

$$g(x) = \ln(x) + 2, \tag{4.15}$$

sur l'intervalle

$$I = [2.0, +\infty[. \tag{4.16}$$

(1) Montrer qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que

$$\forall x \in I, \quad |g'(x)| \leq k. \tag{4.17}$$

(2) En déduire la mise au point complète (théorie, calcul numérique) de la méthode du point fixe et proposer une approximation numérique avec une précision $\varepsilon = 1.0\,10^{-5}$. On admettra l'inégalité suivante : si x_n est la suite définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ et α est un point fixe de g

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k}|g(x_0) - x_0|. \tag{4.18}$$

EXERCICE 4.7.
Démontrez les résultats de l'annexe O du polycopié de cours page 220.

TRAVAUX DIRIGÉS 5

Équations différentielles

EXERCICE 5.1.
On étudie l'équation différentielle

$$\forall t \in [0,T], \quad y'(t) = \tan(t)\, y(t), \tag{5.1a}$$

$$y(0) = 1, \tag{5.1b}$$

avec $T = 1$.

(1) Faire quatre itérations avec un pas $h = 0.050$ des méthodes d'Euler progressif (dite aussi Euler explicite) d'Euler modifiée (dite aussi Runge-Kutta d'ordre 2) et de Runge-Kutta d'ordre 4 pour le problème (5.1).

(2) Montrer que la solution exacte de (5.1) est donnée par

$$\forall t \in [0,T], \quad y(t) = (\cos(t))^{-1}. \tag{5.2}$$

Calculer les valeurs exacte de y aux instants t_i pour $0 \leq i \leq N$ et comparer aux valeurs approchées. Commenter.

(3) Quelle expression peut-on proposer pour approcher $y'(t_n)$?.

EXERCICE 5.2.
On étudie l'équation différentielle

$$\forall t \in [0,T], \quad y'(t) = -t^2 + y(t)t, \tag{5.3a}$$

$$y(0) = 1, \tag{5.3b}$$

avec $T = 2$.
Faire deux itérations avec un pas $h = 0.300000$ des méthodes d'Euler progressif (dite aussi Euler explicite) d'Euler modifiée (dite aussi Runge-Kutta d'ordre 2) et de Runge-Kutta d'ordre 4 pour le problème (5.3).

EXERCICE 5.3.
En posant

$$y_1 = y,$$
$$y_2 = y',$$
$$y_3 = y''.$$

transformer l'équation différentielle suivante en une équation d'ordre 1 :

$$\forall t \in [0,T], \quad y^{(3)}(t) = y''(t) - 2y'(t) + y(t) - 2, \tag{5.4a}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad y''(0) = 2. \tag{5.4b}$$

EXERCICE 5.4.
On considère le système mécanique représenté sur la figure 5.1, formé de deux points matériels de masses m_1 et m_2, d'abscisses par rapport à la position d'équilibre $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Ces deux points matériels sont reliés à trois ressorts de raideur $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ et $k_3 > 0$. On suppose de plus que chacun des points matériels est

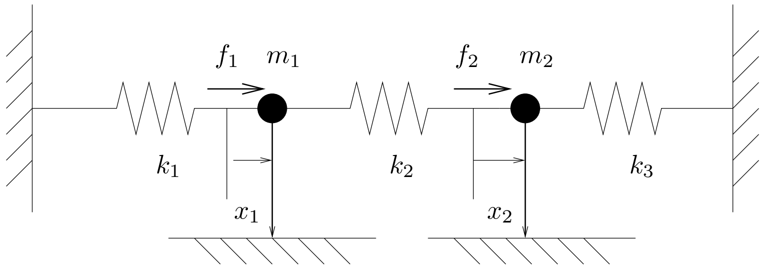

FIGURE 5.1. un système mécanique à deux degrés de liberté.

soumis à une force extérieure $f_i(t)$ et à une force de frottement égale à $-c_i\dot{x}_i(t) - d_i\dot{x}_i^3(t)$ où $c_i, d_i \geq 0$, pour $i = 1, 2$. Le principe fondamental de la dynamique conduit aux deux équations suivantes

$$m_1\ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)\,x_1(t) - k_2x_2(t) + c_1\dot{x}_1(t) + d_1\dot{x}_1^3(t) = f_1(t), \tag{5.5a}$$

$$m_2\ddot{x}_2(t) - k_2x_1(t) + (k_2 + k_3)\,x_2(t) + c_2\dot{x}_2(t) + d_2\dot{x}_2^3(t) = f_2(t). \tag{5.5b}$$

Le système différentiel (5.5) n'est pas une équation différentielle ordinaire de la forme

$$Y'(t) = F(t, Y(t)), \tag{5.6a}$$

$$Y(0) = \Xi_0, \tag{5.6b}$$

où $Y(t)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^p$, mais nous allons montrer que nous pouvons l'écrire sous cette forme.
Pour toute la suite, nous supposerons, pour simplifier [1] que $m_1 = m_2 = 1$.

(1) Montrer en posant

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = \dot{x}_1, \quad y_3 = x_2, \quad y_4 = \dot{x}_2 \tag{5.7}$$

que les équations (5.5) sont équivalentes au système

$$\dot{y}_1(t) = y_2(t), \tag{5.8a}$$

$$\dot{y}_2(t) = -\,(k_1 + k_2)\,y_1(t) + k_2y_3(t) - c_1y_2(t) - d_1y_2^3(t) + f_1(t), \tag{5.8b}$$

$$\dot{y}_3(t) = y_4(t), \tag{5.8c}$$

$$\dot{y}_4(t) = k_2y_1(t) - (k_2 + k_3)\,y_3(t) - c_2y_4(t) - d_2y_4^3(t) + f_2(t). \tag{5.8d}$$

(2) Montrer que si l'on se donne les conditions initiales sous la forme

$$\Xi_0 = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ \dot{x}_1(0) \\ x_2(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

alors le système (5.5) s'écrit sous la forme (5.6) avec $p = 4$.

1. En divisant chacune des deux équations (5.5a) et (5.5b), c'est toujours possible, quitte à modifier les constantes k_i, c_i et d_i et les fonctions f_i.

(3) Faire cinq itérations avec un pas $h = 0.010000$ de la méthode d'Euler progressive et avec les valeurs suivantes :

$$
\begin{aligned}
&f_1 = f_2 = 0,\\
&c_1 = c_2 = c = 0.010000,\\
&d_1 = d_2 = d = 0.010000,\\
&k_1 = k_2 = k_3 = k = 1,\\
&x_1(0) = 1,\\
&\dot{x}_1(0) = 1,\\
&x_2(0) = 2,\\
&\dot{x}_2(0) = 1.
\end{aligned}
$$

Comment peut on obtenir des approximations de $\dot{y}_1(t_i)$ et $\dot{y}_2(t_i)$?

L'exercice 5.4 est inspiré de [BM03, exercice 5.7 p. 215].

TRAVAUX DIRIGÉS 6

Équations aux dérivées partielles

En cours de rédaction

Bibliographie

[Bas22] J. Bastien. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique.* Notes de cours de l'UV MFI (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`. 2022. 270 pages.

[BM03] J. Bastien et J.-N. Martin. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4e étage). Voir `https://www.dunod.com/sciences-techniques/introduction-analyse-numerique-applications-sous-matlab`. Paris : Dunod, 2003. 392 pages.