POLYTECH LYON

Université Claude Bernard Lyon 1

Matériaux 3A MNBmater | Automne 2024

Contrôle continu 1 du 20 novembre 2024

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés (hors QCM) : OUI ☒ NON ☐
Autorisés *: Polycopiés de l'UE, notes manuscrites.*
Interdits *: Écrans (sauf tablette et ordinateurs en mode avion), Livres et Internet*

Calculatrice autorisée (hors QCM) : OUI ☒ NON ☐
Tout type

Exercice 1.
Durée : 15 minutes.
Voir sujet de QCM n° 2 distribué.
Aucun document, aucun écran autorisé pendant le temps de ce QCM.

Exercice 2.
Dans cet exercice, on pourra admettre le résultat de certaines questions.

(1) (a) Soit f une fonction définie de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On choisit le suppport d'interpolation $\{0,0,1,1\}$. Déterminer les différences divisées $f[0]$, $f[0,0]$, $f[0,0,1]$, $f[0,0,1,1]$ en fonction de $f(0)$, $f'(0)$, $f(1)$, $f'(1)$.

$$\begin{array}{c|cccc}
x_i \setminus k & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline
x_0 = 0 & \boxed{f[0]} & & & \\
 & & \boxed{f[0,0]} & & \\
x_1 = 0 & f[0] & & \boxed{f[0,0,1]} & \\
 & & f[0,1] & & \boxed{f[0,0,1,1]} \\
x_2 = 1 & f[1] & & f[0,1,1] & \\
 & & f[1,1] & & \\
x_3 = 1 & f[1] & & &
\end{array}$$

TABLE 1. Différences divisées de f.

On pourra généraliser les résultats vus dans l'exercice de TD 2.7 page 4 et disposer les différences divisées obtenues sous la forme du tableau 1 page précédente.

(b) Que valent ces différences divisées dans le cas où

$$f(0) = 0, \tag{1a}$$
$$f'(0) = 0, \tag{1b}$$
$$f(1) = \frac{1}{2}, \tag{1c}$$
$$f'(1) = 1\,? \tag{1d}$$

(c) Pour toute la suite, on pourra admettre que l'expression de Π_3 vue en cours

$$\Pi_3(x) = f[a] + f[a,a](x-a) + f[a,a,b](x-a)(x-a) + f[a,a,b,b](x-a)(x-a)(x-b). \tag{2}$$

est encore valable ici pour le support $\{a,a,b,b\}$.

(i) De quel degré maximal est Π_3, polynôme d'interpolation de f sur $\{0,0,1,1\}$?

(ii) Peut-on déterminer son degré sans le calculer. Faites-le !

(iii) Déterminer enfin l'expression du polynôme Π_3. .

(iv) Que valent $\Pi_3(0)$, $\Pi_3'(0)$, $\Pi_3(1)$ et $\Pi_3'(1)$?

(v) Quelles sont les équations des tangentes à la courbe représentative de Π_3 aux points d'abcisses respectives 0 et 1 ?

(vi) Tracer Π_3 et les deux tangentes déterminées à question 1(c)v dans un repère orthonormé sur l'intervalle $[0,1]$.

(2) (a) Déterminez directement un polynôme p de degré 3 dont les valeurs de $p(0)$, $p'(0)$, $p(1)$ et $p'(1)$ sont les résultats en principe obtenus dans la question 1(c)iv, c'est-à-dire :

$$p(0) = 0, \tag{3a}$$
$$p'(0) = 0, \tag{3b}$$
$$p(1) = \frac{1}{2}, \tag{3c}$$
$$p'(1) = 1, \tag{3d}$$

(b) Est-il égal au polynôme Π_3 déterminé plus haut ?

Exercice 3.
Soit f donnée par

$$\forall x \in [3,4]\,, \quad f(x) = x^2 + \ln(x)\,, \tag{4a}$$

et l'intégrale I

$$I = \int_3^4 f(x)dx. \tag{4b}$$

(1) (a) Déterminer I^T, l'approximation de I par la méthode élémentaire du trapèze.

(b) Déterminer f' et f'', puis donnez l'expression de l'erreur commise avec la méthode élémentaire du trapèze et fournissez-en une majoration.

(c) On donne la valeur exacte de I :

$$I = \frac{34}{3} - 3\,\ln(3) + 8\,\ln(2)\,, \tag{5a}$$

soit encore

$$I = 13.5826739118086. \tag{5b}$$

En déduire l'erreur commise réelle, c'est-à-dire $\left|I^T - I\right|$ et vérifier qu'elle est inférieure au majorant de l'erreur donné plus haut.

(2) (a) Déterminer I_3^T, l'approximation de I par la méthode composite des trapèzes avec $N = 3$ sous-intervalles.

(b) Donnez l'expression de l'erreur commise avec la méthode composite des trapèzes puis fournissez-en une majoration.

(c) Déterminer l'erreur réelle erreur commise, c'est-à-dire $\left|I_3^T - I\right|$ et vérifier qu'elle est inférieure au majorant de l'erreur donné plus haut.

(3) Déterminer le nombre N de sous-intervalles qu'il faudrait utiliser pour avoir une approximation de I par la méthode composite des trapèzes avec une erreur inférieure à

$$\varepsilon = 10^{-8}. \tag{6}$$

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`