Matériaux 3A MNBmater — Automne 2024

# Corrigé du contrôle continu 1 du 20 novembre 2024

**Correction de l'exercice 1.**
Voir correction du QCM n° 2 en date du 20 novembre 2024, disponible sur Internet.

**Correction de l'exercice 2.**

*Remarque* 1. On rappelle deux types d'interpolations polynomiale (parmi d'autre) vus en cours :

(1) Interpolation de Lagrange : on se donne $x_0$, $x_1$, ...., $x_n$, $n+1$ points deux à deux distincts et $f$ une fonction. On dit que $\Pi_n$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction $f$ aux points $x_0$, $x_1$, ...., $x_n$ si et seulement si

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad \Pi_n(x_i) = f(x_i). \tag{1}$$

Ce polynôme est unique et est donné par

$$\Pi_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + ... \\ + f[x_0, x_1, ..., x_n](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_{n-1}). \tag{2}$$

Les différences divisées $f[x_0]$ $f[x_0, x_1]$, $f[x_0, x_1, x_2]$, ..., $f[x_0, x_1, ..., x_n]$ se calculent grâce aux formules

$$f[x_0] = f(x_0), \tag{3a}$$

$$f[x_0, ..., x_p] = \frac{f[x_1, ..., x_p] - f[x_0, ..., x_{p-1}]}{x_p - x_0}. \tag{3b}$$

Pour plus de détails, on pourra consulter le chapitre 2 du polycopié de cours, [o1, chapitre 2] et [CM84, chapitre 1].

(2) Interpolation d'Hermite : les points $x_i$ sont quelconques et ne sont plus nécesairement 2 à 2 distincts. Dans ce cas, le polynôme $\Pi_n$ est encore unique. Mais les équations (1) sont remplacées par

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad \Pi_n^{(r_i-1)}(x_i) = f^{(r_i-1)}(x_i), \tag{4}$$

où $r_i$ est l'entier égal au nombre de fois où le point $x_i$ est présent dans la liste $(x_0, ..., x_n)$. L'égalité (3) est toujours valable, mais la relation de récurrence n'est plus valable si $x_0 = x_p$. Dans ce cas, les différences divisées font intervenir des dérivées de $f$. Enfin, l'égalité (2) est toujours valable.

Pour plus de détails, on pourra consulter la section 2.7 du cours, la correction de l'exercice de TD 2.7, mais aussi [o1, chapitre 2, exercice corrigé 2.8 p. 56 et p. 247, exercice corrigé 3.2 p. 119 et 260, TP 2.F p. 67] et [CM84, chapitre 1].

*Début du corrigé !*

(1) (a) On a en toute généralité, si on considère le support $\{a, a, b, b\}$ où $a < b$,

$$f[a] = f(a), \tag{5a}$$

$$f[a, a] = f'(a), \tag{5b}$$

$$f[a, a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)^2} - \frac{f'(a)}{b - a}, \tag{5c}$$

$$f[a, a, b, b] = \frac{f'(a) + f'(b)}{(b - a)^2} + 2\frac{f(a) - f(b)}{(b - a)^3}. \tag{5d}$$

En effet, d'après (4) on a

$$f[a,a] = f'(a)$$

puis, d'après (3b)

$$\begin{aligned} f[a,a,b] &= \frac{f[a,b]-f[a,a]}{b-a}, \\ &= \frac{f[a,b]-f'(a)}{b-a}, \end{aligned}$$

soit

$$f[a,a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2} - \frac{f'(a)}{b-a}.$$

On a aussi (puisque $a \neq b$)

$$f[a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

On a aussi

$$\begin{aligned} f[a,b,b] &= \frac{f[b,b]-f[a,b]}{b-a}, \\ &= \frac{f'(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{b-a}, \end{aligned}$$

et donc

$$f[a,b,b] = \frac{1}{b-a}\left((b-a)f'(b) - f(b) + f(a)\right).$$

Enfin, on écrit en utilisant les calculs précédents

$$\begin{aligned} f[a,a,b,b] &= \frac{f[a,b,b]-f[a,a,b]}{b-a}, \\ &= \frac{\frac{1}{b-a}\left((b-a)f'(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) - \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2} + \frac{f'(a)}{b-a}}{b-a}, \\ &= \frac{1}{(b-a)^2}\left(f'(b) - 2\frac{f(b)-f(a)}{b-a} + f'(a)\right), \end{aligned}$$

dont on déduit (5d). Compte tenu de $a = 0$, $b = 1$, les formules (5) se simplifient sous la forme

$$f[0] = f(0), \tag{6a}$$

$$f[0,0] = f'(0), \tag{6b}$$

$$f[0,0,1] = f(1) - f(0) - f'(0), \tag{6c}$$

$$f[0,0,1,1] = f'(0) + f'(1) + 2(f(0) - f(1)). \tag{6d}$$

On peut disposer les calculs comme dans le cours. Voir le tableau 1 page ci-contre.

(b) Dans le cas où les valeurs sont données par l'équation (1) de l'énoncé, on a, après calculs, d'après (6)

$$f[0] = 0, \tag{7a}$$

$$f[0,0] = 0, \tag{7b}$$

$$f[0,0,1] = \frac{1}{2}, \tag{7c}$$

$$f[0,0,1,1] = 0. \tag{7d}$$

(c) (i) D'après la proposition 2.6 du polycopié de cours (valable pour la théorie de Lagrange comme celle d'Hermite), le polynôme d'interpolation $\Pi_3$ est de degré au plus 3. Cela pouvait aussi se voir grâce à l'expression (2) de l'énoncé.

| $x_i \setminus k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x_0 = 0$ | $\boxed{f(0)}$ | | | |
| | | $\boxed{f'(0)}$ | | |
| $x_1 = 0$ | $f(0)$ | | $\boxed{f(1) - f(0) - f'(0)}$ | |
| | | $f(1) - f(0)$ | | $\boxed{f'(0) + f'(1) + 2(f(0) - f(1))}$ |
| $x_2 = 1$ | $f(1)$ | | $f'(1) - f(1) + f(0)$ | |
| | | $f'(1)$ | | |
| $x_3 = 1$ | $f(1)$ | | | |

TABLE 1. Différences divisées de $f$.

(ii) D'après le point 1 page 23 du cours et le point 2 page 23 du cours (valable pour la théorie de Lagrange comme celle d'Hermite) puisque $f[0, 0, 1, 1]$ est nulle, $\Pi_3$ est de degré au plus 2. De plus, puisque $f[0, 0, 1]$ est non nulle, $\Pi_3$ est de degré exactement 2. Cela pouvait aussi se voir grâce à l'expression (2) de l'énoncé.

*Remarque* 2. C'est la nullité de $f[0, 0, 1, 1]$ donnée par

$$f[0, 0, 1, 1] = f'(0) + f'(1) + 2(f(0) - f(1)), \tag{8}$$

et les équations (1) de l'énoncé ainsi que la non nullité de $f[0, 0, 1]$ donnée par

$$f[0, 0, 1] = f(1) - f(0) - f'(0) \tag{9}$$

et les équations (1) de l'énoncé qui permettent donc d'affirmer que $\Pi_3$ est de degré exactement 2

(iii) Des valeurs du tableau 1 et de l'équation (2) de l'énoncé, on déduit que

$$\Pi_3(x) = \frac{1}{2}x^2. \tag{10}$$

(iv) Il est très facile de vérifier à la main que

$$\Pi_3(0) = 0, \tag{11a}$$
$$\Pi_3'(0) = 0, \tag{11b}$$
$$\Pi_3(1) = \frac{1}{2}, \tag{11c}$$
$$\Pi_3'(1) = 1, \tag{11d}$$

ce qui était aussi une conséquence de l'équation (1) de l'énoncé et de (4) !

(v) Il suffit d'utiliser directement la théorie de l'interpolation d'Hermite (voir section 2.7 du polycopié de cours ou exercice 2.7 page 22 de TD) qui fournit directement l'équation de la tangente d'une fonction $f$ au point $x_0$, en considérant que la tangente à la courbe est le polynôme d'interpolation de $f$ sur le support $\{x_0, x_0\}$. Les équations (2.72) du polycopié de cours et (2.73) du polycopié de cours sont rappelées ici :

$$f[x_0, x_1] = f'(x_0), \tag{12}$$

et

$$\Pi_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{13}$$

et donc l'équation de la tangente à la courbe $f$ au point d'abscisse $x_0$ est

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{14}$$

équation que l'on pouvait aussi se rappeler !
On applique ces formules pour $f = \Pi_3$.

(A) Si l'on choisit $x_0 = 0$, d'après (11a), (11b) et (14) l'équation de la tangente à la courbe représentative de $\Pi_3$ en 0 est

$$y = \Pi_3(x_0) + \Pi_3'(x_0)(x - x_0)$$

soit

$$y = 0. \tag{15}$$

(B) De même, si l'on choisit $x_0 = 1$, d'après (11c), (11d) et (14) l'équation de la tangente à la courbe représentative de $\Pi_3$ en 1 est

$$y = \Pi_3(x_0) + \Pi_3'(x_0)(x - x_0) = \frac{1}{2} + x - 1,$$

soit

$$y = x - \frac{1}{2}. \tag{16}$$

(vi) Pour tracer $\Pi_3$ et les deux tangentes déterminées à question 1(c)v dans un repère orthonormé, on peut utiliser les équations (15), (16) et (10), mais il est plus simple de remarquer que $\Pi_3$ est l'équation d'une parabole dont on connaît deux points et deux tangentes, que l'on trace et dont on déduit approximativement le tracé, qui peut être précisé en prenant quelques valeurs données par (10).

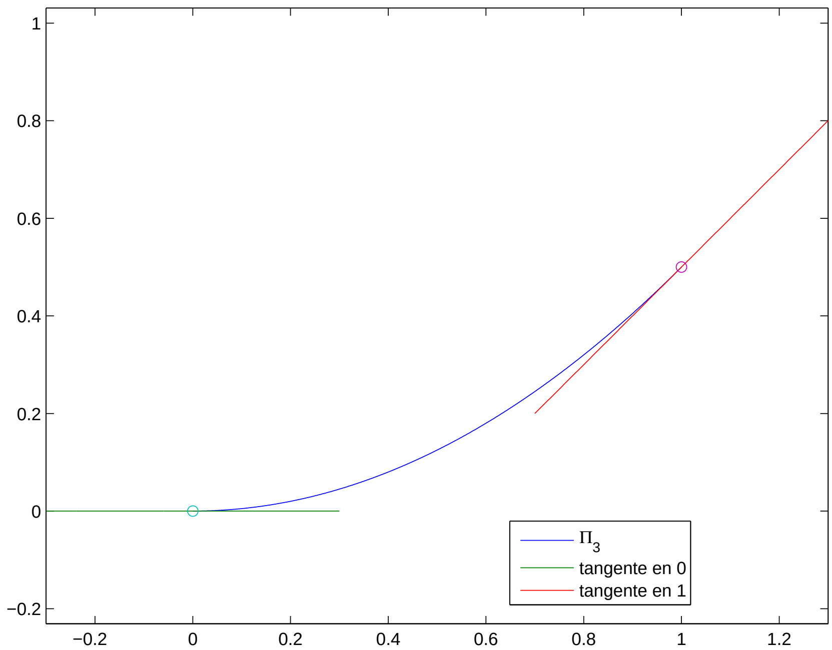


FIGURE 1. La fonction $\Pi_3$ et ses tangentes en 0 et 1.

Voir la figure (1).

*Remarque* 3. On pourra consulter à l'adresse web habituelle le zip `figurefinalecorrigeparabole.zip` qui contient le script et les fonctions matlab qui permettent de déterminer tous les éléments de ce corrigé. Le script est aussi donné ci-dessous :

```
syms x;

a=0;
b=1;
T=[a a b b ];
X=sym([0 0 1/2 1]);
Dx=diff_div(T,X);
Px=eval_horner(x,T(1:end-1),Dx);
Ppx=diff(Px);
Fx=inline(vectorize(Px));
disp('\Pi_3');
disp(Px);

a1=0;
T=[a1 a1];
X=[subs(Px,x,a1),subs(Ppx,x,a1)];
Dx=diff_div(T,X);
P1x=eval_horner(x,T(1:end-1),Dx);
F1x=inline(vectorize(P1x));
disp('tangente en 0');
disp(P1x);

a2=1;
T=[a2 a2];
X=[subs(Px,x,a2),subs(Ppx,x,a2)];
Dx=diff_div(T,X);
P2x=eval_horner(x,T(1:end-1),Dx);
F2x=inline(vectorize(P2x));
disp('tangente en 1');
disp(P2x);



Ng=1000;
ep=0.3;
xg=linspace(0,1,Ng);
xg1=linspace(a1-ep,a1+ep,Ng);
xg2=linspace(a2-ep,a2+ep,Ng);
plot(xg,Fx(xg),xg1,zeros(1,Ng),xg2,F2x(xg2),a1,Fx(a1),'o',a2,Fx(a2),'o');
axis equal;
legend('\Pi_3','tangente en 0','tangente en 1','location','best');
```

(2) (a) Cherchons $p$ sous la forme

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3,$$

et, comme dans la section 2.2.2.1 du polycopié de cours, nous allons déterminer $p$ vérifiant les équations (3) de l'énoncé. On a donc successivement

$$p'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2,$$

puis

$$\begin{aligned} 0 &= p(0), \\ &= \alpha_0, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} 0 &= p'(0), \\ &= \alpha_1, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= p(1), \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} 1 &= p'(1), \\ &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 \end{aligned}$$

qui sont équivalentes à

$$\begin{aligned} &\alpha_0 = 0, \\ &\alpha_1 = 0, \\ &\alpha_2 + \alpha_3 = \frac{1}{2}, \\ &2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 1, \end{aligned}$$

soit encore, après calculs

$$\begin{aligned} &\alpha_3 = 0, \\ &\alpha_2 = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

et donc

$$p(x) = \frac{1}{2} x^2. \tag{17}$$

(b) D'après (10), il est naturellement égal au polynôme $\Pi_3$ déterminé plus haut, puisque la théorie de l'interpolation d'Hermite fournit l'existence et l'unicité d'un tel polynôme ! Voir la correction de l'exercice de TD 2.7, mais aussi [o1, chapitre 2, exercice corrigé 2.8 p. 56 et p. 247, exercice corrigé 3.2 p. 119 et 260, TP 2.F p. 67] et [CM84, chapitre 1].

**Correction de l'exercice 3.**

(1) (a) En utilisant le tableau 3.2 du polycopié de cours, on détermine la valeur approchée avec la méthode élémentaire du trapèze :

$$I^T = \frac{25}{2} + 1/2\ \ln(3) + \ln(2) \tag{18}$$

soit

$$I^T = 13.74245332489400. \tag{19}$$

(b) On obtient les dérivées successives de $f$ :

$$f'(x) = 2\,x + x^{-1}\,; \tag{20a}$$

$$f''(x) = 2 - x^{-2}. \tag{20b}$$

La fonction $f''$ est monotone et atteint son maximum en l'une des extrémités de l'intervalle d'étude. On en déduit

$$M_2 = \max_{x\in[3,4]} \left|f^{(2)}(x)\right|, \tag{21}$$

le maximum de la valeur absolue de la dérivée 2-ième de $f$ sur l'intervalle d'étude, donné numériquement par

$$M_2 = 1.9375000000000. \tag{22}$$

On note

$$a = 3, \quad b = 4. \tag{23}$$

Le tableau 3.3 du polycopié de cours fournit l'expression de l'erreur commise avec la méthode élémentaire du trapèze :

$$\mathcal{E}^T = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta), \tag{24}$$

où $\eta$ appartient à $]a, b[$. On vérifie que $f$ est bien de classe $\mathcal{C}^2$. On majore la valeur absolue de $f''(\eta)$, par le maximum de la valeur absolue de la dérivée correspondant et la majoration de l'erreur commise est donc donnée par

$$\mathcal{E}^T \leq \frac{(b-a)^3}{12} M_2 \tag{25}$$

Grâce à (23) et (22), on déduit donc la majoration de l'erreur commise suivante :

$$\mathcal{E}^T \leq 0.1614583333. \tag{26}$$

(c) L'erreur réelle commise est égale à

$$\left|I^T - I\right| = |13.5826739118086 - 13.7424533248940| = 0.1597794130854$$

qui est inférieure à celle donnée par (26).

(2) (a) En utilisant le tableau 3.4 du polycopié de cours, on détermine la valeur approchée avec la méthode composite des trapèzes avec $N = 3$ :

$$I_3^T = \frac{667}{54} + 1/6\ \ln(3) + 1/3\ \ln(2) + 1/3\ \ln(10/3) + 1/3\ \ln(11/3) \tag{27}$$

soit

$$I_3^T = 13.60042155630192. \tag{28}$$

(b) On note maintenant

$$A = 3, \quad B = 4. \tag{29}$$

Le tableau 3.5 du polycopié de cours fournit l'expression de l'erreur commise avec la méthode composite des trapèzes :

$$\mathcal{E}_3^T = -h^2 \frac{B-A}{12} f''(\eta), \tag{30}$$

où $\eta$ appartient à $[A, B]$ et

$$h = \frac{B - A}{N}, \tag{31}$$

soit

$$h = \frac{(4) - (3)}{3},$$

et donc

$$h = 0.3333333333333. \tag{32}$$

On peut donc écrire

$$\left|\mathcal{E}_3^T\right| \leq h^2 \frac{B - A}{12} M_2. \tag{33}$$

En utilisant de nouveau (22), on déduit donc la majoration de l'erreur commise suivante :

$$\mathcal{E}_3^T \leq 1.793981\,10^{-2}. \tag{34}$$

(c) L'erreur réelle commise est égale à

$$\left|I_3^T - I\right| = |13.5826739118086 - 13.6004215563019| = 1.774764\,10^{-2}$$

qui est inférieure à celle donnée par (34).

(3) Pour que

$$\left|\mathcal{E}_3^T\right| \leq \varepsilon,$$

il suffit, d'après (33) que l'on ait :

$$h^2 \frac{B - A}{12} M_2 \leq \varepsilon,$$

soit, d'après (31),

$$\left(\frac{B - A}{N}\right)^2 \frac{B - A}{12} M_2 \leq \varepsilon,$$

soit encore

$$\frac{(B - A)^3}{12\varepsilon} M_2 \leq N^2,$$

et donc

$$N \geq \sqrt{\frac{M_2 (B - A)^3}{12\varepsilon}}.$$

Il suffit donc de prendre

$$N = \left\lceil \sqrt{\frac{M_2 (B - A)^3}{12\varepsilon}} \right\rceil. \tag{35}$$

où pour tout réel $X$,

$$\lceil X \rceil \text{ est le plus petit entier supérieur ou égal à } X.$$

Numériquement, on a donc en utilisant de nouveau (22),

$$N = 4019. \tag{36}$$

*Remarque* 4. Avec cette valeur de $N$, on a

$$\mathcal{E}_{4019}^T = 13.582673921697037,$$

et l'erreur réelle

$$\left|\mathcal{E}_{4019}^T - I\right| = 9.8884705\,10^{-9},$$

quantité qui est inférieure à $\varepsilon$ donné par l'équation (6) de l'énoncé.

## Références


[CM84] M. Crouzeix et A. L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles.* Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1984, pages viii+171.

[o1] J. Bastien et J.-N. Martin. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4e étage). Voir `https://www.dunod.com/sciences-techniques/introduction-analyse-numerique-applications-sous-matlab`. Paris : Dunod, 2003. 392 pages.