Matériaux 3A MNBmater — Automne 2024

Contrôle continu 2 du 08 janvier 2025

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés (hors QCM) : OUI ☒ NON ☐

Autorisés *: Polycopiés de l'UE, notes manuscrites.*

Interdits *: Écrans (sauf tablette et ordinateurs en mode avion), Livres et Internet*

Calculatrice autorisée (hors QCM) : OUI ☒ NON ☐

Tout type

Exercice 1.

Durée : 15 minutes.

Voir sujet de QCM n° 3 distribué.

Aucun document, aucun écran autorisé pendant le temps de ce QCM.

Exercice 2.

Soit $K \in \mathbb{R}$. Dans cet exercice, on étudie l'équation

$$e^x = -x + K. \tag{1}$$

(1) Montrer que l'équation (1) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée r.

(2) On définit la fonction g par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = K - e^x, \tag{2}$$

On met désormais l'équation (1) sous la forme

$$g(x) = x, \tag{3}$$

et on considère la méthode du point fixe associée sur un intervalle $[a, b]$ (définie par $x_0 \in [a, b]$ et $x_{n+1} = g(x_n)$).

(a) On pose, dans cette question :

$$a = -2, \tag{4a}$$

$$b = -1/2, \tag{4b}$$

$$K = -1. \tag{4c}$$

(i) Montrer qu'avec ces valeurs la méthode du point fixe converge pour tout $x_0 \in [a, b]$.

(ii) Déterminer la valeur de n telle que $|x_n - r| \leq \varepsilon$ avec

$$\varepsilon = 10^{-2}. \tag{5}$$

(iii) Pour cette valeurs de n, calculer les valeurs de $(x_p)_{0\leq p\leq n}$ avec $x_0 = -5/4$.

(b) On pose, dans cette question :

$$a = 1/4, \tag{6a}$$

$$b = 1, \tag{6b}$$

$$K = 5/2. \tag{6c}$$

(i) Est-ce que la méthode du point fixe converge ?

(ii) Quelle méthode pourriez-vous utiliser pour résoudre (1) dans ce cas ?

Exercice 3.
Si vous avez une calculatrice qui ne dispose que des quatre opérations élémentaires, il est néanmoins possible d'estimer la racine carrée d'un nombre $a \geq 0$ par la méthode de Newton.

(1) Donner une fonction f, polynomiale de degré strictement supérieur à 1, telle que $f(\sqrt{a}) = 0$.

(2) Écrire la méthode de Newton pour résoudre l'équation $f(x) = 0$.

(3) Estimer la valeur de $\sqrt{10}$ obtenue avec cette méthode en partant de la valeur initiale $x_0 = 5$. On s'arrêtera quand l'erreur absolue sur la valeur finale sera inférieure à $1.0\,10^{-3}$.

(4) Quel est l'ordre de convergence de cette méthode ? Justifier votre réponse.

(5) Si on voulait développer un algorithme général qui fournit avec un minimum d'itérations la racine carrée d'un nombre positif quelconque, quelle stratégie recommanderiez-vous ? Faudrait-il préférer le méthode de Newton ou une autre méthode vue en cours ? Pourquoi ? Comment procéder pour choisir automatiquement une valeur initiale qui convienne ? (On pourra s'aider d'un schéma).

Exercice 4.
La solution de l'équation différentielle $y''(t) = -2y(t)y'(t)$ avec $y(t = 0) = 0$, $y'(t = 0) = 4$ tend rapidement vers une valeur asymptotique.

(1) Estimez cette valeur asymptotique en utilisant la méthode d'Euler progressif, avec un pas de $h = 0.25$.

(2) Tracer l'évolution de y en fonction du temps t obtenue par cette méthode sur la figure proposée en annexe (en figure 1 page ci-contre). Sans refaire de calcul, proposer une solution pour améliorer ce résultat.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

ANNEXE

Nom :
Prénom :

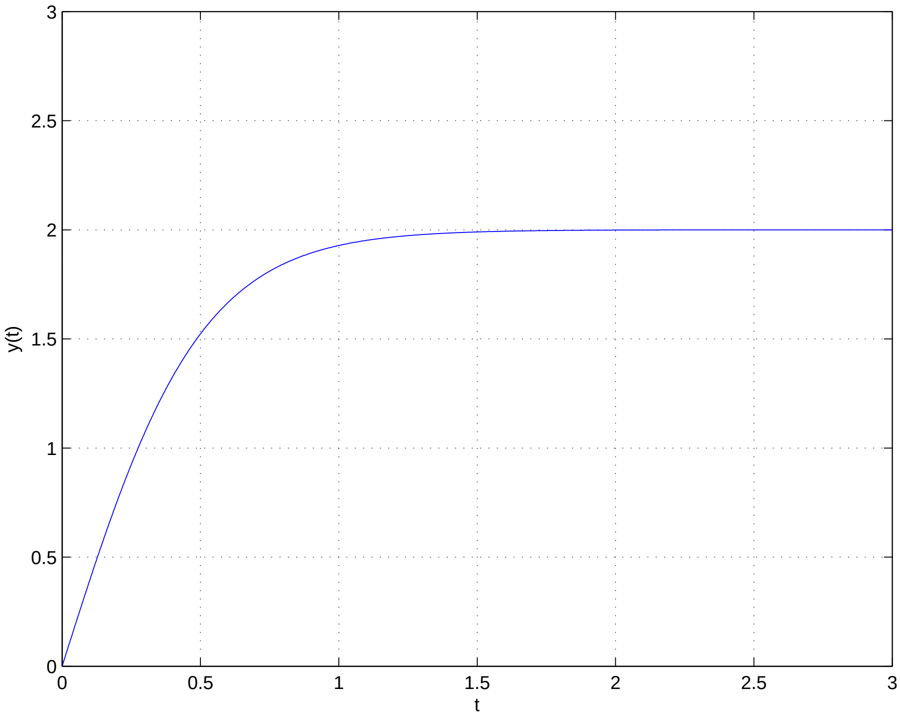

FIGURE 1. La solution exacte de l'exercice 4.