Matériaux 3A MNBmater — Automne 2024

Contrôle continu 2 (rattrapage) du 29 janvier 2025

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐
Autorisés *: Polycopiés de l'UE, notes manuscrites.*
Interdits *: Écrans (sauf tablette et ordinateurs en mode avion), Livres et Internet*

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐
Tout type

Exercice 1.

On cherche à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\forall t \in \left[e^{-e}, e^{1/e}\right[, \quad y'(t) = \frac{y^2(t)}{t(1-y(t)\ln(t))}, \tag{1a}$$

$$y(1) = \xi_0 = 1. \tag{1b}$$

(1) On se place tout d'abord sur l'intervalle $[1, e^{1/e}[$. On pose $h = 0.01$. Déterminer les approximations y_0, y_1, y_2 et y_3 de la solution exacte aux instants $t_0 = 1$, $t_1 = 1 + h$, $t_2 = 1 + 2h$, et $t_3 = 1 + 3h$, en utilisant le schéma d'Euler explicite.

Malgré le fait qu'à la différence du cours, t_0 n'est pas nul, la définition du schéma d'Euler explicite est la même qu'en cours !

(2) (a) On se place maintenant sur l'intervalle $[e^{-e}, 1]$. Serait-ce possible d'utiliser le schéma d'Euler explicite pour déterminer les approximations y_0, y_{-1}, y_{-2} et y_{-3} de la solution exacte aux instants $t_0 = 1$, $t_{-1} = 1 - h$, $t_{-2} = 1 - 2h$, et $t_{-3} = 1 - 3h$?

(b) Déterminer numériquement ces valeurs !

Exercice 2.

(1) On considère la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x}. \tag{2}$$

et on pose

$$a = 2/5, \quad b = 1. \tag{3}$$

(a) Montrer que g a un unique point fixe r sur $[a, b]$ et que la méthode du point fixe est convergente pour tout point de $x_0 \in [a, b]$ vers $r = 1$.

(b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite associée à la méthode du point fixe. Déterminer l'entier n à partir duquel $|x_n - r| \leq \varepsilon$ où $\varepsilon = 1.10^{-1}$.

(c) Calculer les termes de la suite correspondant en choisissant $x_0 = 1/2$.

(2) On considère la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = (1/2)^x. \tag{4}$$

et on pose

$$a = 0, \quad b = 1. \tag{5}$$

(a) Montrer que g a un unique point fixe r sur $[a, b]$ et que la méthode du point fixe est convergente pour tout point de $x_0 \in [a, b]$ vers $r = \frac{LambertW(\ln(2))}{\ln(2)}$.

(b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite associée à la méthode du point fixe. Déterminer l'entier n à partir duquel $|x_n - r| \leq \varepsilon$ où $\varepsilon = 1.10^{-1}$.

(c) Calculer les termes de la suite correspondant en choisissant $x_0 = 1/2$.

(3) *Les questions suivantes sont facultatives*

On cherche à donner un sens à l'expression

$$y = x^{x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}}, \tag{6}$$

où la puissance est prise "un nombre infini de fois".

Cette notation est ambigüe puisqu'elle peut correspondre aux deux définitions suivantes : on prend la puissance à chaque fois par "au-dessus" :

$$y = \left((((x^x)^x)^x)^x\right)^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}, \tag{7}$$

ou, au contraire, par "en-dessous"

$$y = {}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}} x^{\left(x^{\left(x^{(x^x)}\right)}\right)}. \tag{8}$$

Dans le premier cas, on définira donc une suite, à x fixé, définie par :

$$h_0(x) = x, \tag{9a}$$

$$h_1(x) = x^x = (h_0(x))^x, \tag{9b}$$

$$h_2(x) = (x^x)^x = (h_1(x))^x, \tag{9c}$$

et ainsi de suite ... On a donc la relation de récurrence suivante :

$$\forall x, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad h_{n+1}(x) = (h_n(x))^x, \tag{10a}$$

avec l'initialisation suivante

$$\forall x, \quad h_0(x) = x. \tag{10b}$$

Dans le second cas, on définira donc une suite, à x fixé, définie par :

$$f_0(x) = x, \tag{11a}$$

$$f_1(x) = x^x = x^{f_0(x)}, \tag{11b}$$

$$f_2(x) = x^{(x^x)} = x^{f_1(x)}, \tag{11c}$$

$$f_3(x) = x^{\left(x^{(x^x)}\right)} = x^{f_2(x)}, \tag{11d}$$

et ainsi de suite ... On a donc la relation de récurrence suivante :

$$\forall x, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_{n+1}(x) = x^{f_n(x)}, \tag{12a}$$

avec l'initialisation suivante

$$\forall x, \quad f_0(x) = x. \tag{12b}$$

(a) Pour x fixé, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = h_n(x). \tag{13}$$

(i)(A) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = G_x(u_n), \\ u_0 \text{ est donné.} \end{cases} \tag{14}$$

On précisera (à x fixé) u_0 et la fonction (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) G_x.

(B) Étudier la fonction G_x. On montrera notamment que G_x laisse stable les intervalles $[0, 1]$ et $]1, +\infty[$.

(C) Quels sont les points fixes de G_x ?

(D) En déduire les limites possibles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(E) Montrer que si $x \in [0, 1]$, la suite u_n tend vers 1 et que si $x \in]1, +\infty[$, la suite u_n tend vers $+\infty$.

(F) Quel est le lien avec la question 1 ?

(G) En déduire finalement l'expression de y défini par (7).

(ii) Les résultats de la question 3(a)i, peuvent être en fait établis beaucoup plus rapidement !

(A) Montrer que l'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad h_n(x) = x^{(x^n)}. \tag{15}$$

(B) Conclure alors sur la convergence de la suite $h_n(x)$.

(b) Pour x fixé, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = f_n(x). \tag{16}$$

(i) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = G_x(v_n), \\ u_0 \text{ est donné.} \end{cases} \tag{17}$$

On précisera (à x fixé) u_0 et la fonction (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) G_x.

(ii) Étudier la fonction G_x.

(iii) Quels sont les points fixes de G_x ?

(iv) En déduire les limites possibles de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(v) Étudier la convergence de la suite v_n.

(vi) Quel est le lien avec la question 2 ?

(vii) En déduire finalement l'expression de y défini par (8).

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`