Matériaux 3A MNBmater

Automne 2022

Examen du 02 février 2023

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐

Un formulaire manuscrit d'une feuille A4 recto-verso

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐

Tout type

On pourra consulter les formules d'erreur données en page 6.

Exercice 1.

On dispose des résultats expérimentaux pour la position $f(t)$ d'une étoile à différents temps t :

t	$f(t)$
1.00000	4.47550
1.50000	5.39960
2.00000	6.54960
2.50000	7.82160
3.00000	9.19970

(1) (a) En utilisant un polynôme de degré 2, déterminer une approximation de $f(\tau)$ pour $\tau = 1.2$.

(b) En utilisant un polynôme de degré 3, déterminer une approximation de $f(\tau)$ pour $\tau = 1.2$.

(2) On cherche, dans cette question à approcher l'intégrale de

$$I = \int_A^B f,$$

où $A = \min(t) = 1$ et $B = \max(t) = 3$.

(a) Proposer une approximation en utilisant la méthode composite des trapèzes.

(b)

On a déterminé une spline cubique[1] passant par les points expérimentaux donnés. Voir la figure 1 page suivante.

1. voir section 2.6.1 du cours.

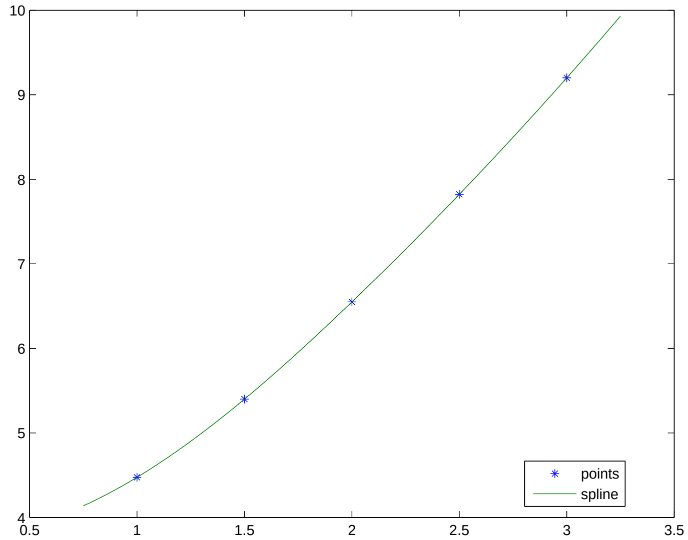

FIGURE 1. Les points $(t, f(t))$ et la spline construite.

(i) De quelles données auriez vous besoin pour déterminer la valeur de l'intégrale de cette spline sur $[A, B]$ en utilisant la méthode composite du point milieu et la méthode composite de Simpson ?

(ii)

t	$f(t)$
1.25000	4.90144
1.75000	5.95423
2.25000	7.17272
2.75000	8.49701

En utilisant le tableau ci-dessus, qui contient les valeurs de f évaluées aux différents milieux grâce à la spline utilisée, calculer une approximation de l'intégrale de cette spline sur $[A, B]$ en utilisant la méthode composite du point milieu et la méthode composite de Simpson.

(c) *Question facultative*

Expliquer pourquoi l'approximation de l'intégrale de cette spline sur [A,B] par la méthode composite de Simpson est égale à son intégrale exacte.

Exercice 2.

Soit une variable aléatoire X suivant une loi normale centrée réduite. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la probabilité que X soit inférieure ou égale à x, notée $P(X \leq x)$ est donnée par la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

i	x_i	$P(X \leq x_i)$
0	1.000000000	0.841344746
1	1.100000000	0.864333939
2	1.200000000	0.884930330

TABLE 1. Les valeurs de x_i et de $P(X \leq x_i)$ pour $i \in \{0, ..., 2\}$

On a calculé cette probabilité pour différentes valeurs de x, au moyen de méthodes d'intégration numérique très précises et les résultats sont reportés dans le tableau 1. On cherche à déterminer par interpolation polynômiale et en utilisant les valeurs données dans ce tableau, la valeur approchée de $P(X \leq 1.0500)$.

(1) Quelle fonction devez-vous interpoler ?

(2) Quelle est sa dérivée ?

(3)

	$[x_0, x_1]$	$[x_1, x_2]$
$\left\|f^{(2)}\right\|$	0.241971	0.239637
$\left\|f^{(3)}\right\|$	0.045749	0.085442

TABLE 2. Les maximas des valeurs absolue des dérivées $\left|f^{(j)}\right|$ sur les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$.

Obtenir $P(X \leq 1.0500)$ avec une erreur absolue inférieure à $\varepsilon = 6.0\,10^{-6}$.

Dans le tableau 2 ont été affichés les maximums des dérivées $f^{(i)}$ pour $i \in \{2, 3\}$, sur différents intervalles.

Exercice 3.
Soient a et b tels que $a < b$ et f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$. On suppose aussi que f est convexe sur $[a, b]$ (dont on rappelle que cela est équivalent à $f'' \geq 0$ sur $[a, b]$.)
Montrer que

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)dt \leq \frac{1}{2}(b-a)\left(f(a)+f(b)\right). \tag{1}$$

Exercice 4.

(1) Pour cette question et la question 2, on considère f, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0, \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{2}$$

Étudier sommairement et tracer la fonction f. On montrera en particulier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x > 0, \\ \\ \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{3}$$

(2) (a) (i) Pour $u_0 \in \{1, 4\}$, déterminer les premières valeurs de la méthode de Newton associée à la recherche de l'unique zéro de f. On pourra illustrer les valeurs obtenues sur le graphe de la question 1. Que remarquez-vous ?

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note u_n les valeurs de la méthode de Newton définie par $u_0 = x$. Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \begin{cases} x & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -x & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \tag{4}$$

(iii) Qu'en est-il si $x < 0$ et $x = 0$?

(iv) Conclure sur la convergence de la méthode de Newton pour la fonction f.

(b) Pourriez-vous, en utilisant l'un des méthodes vues en cours, approcher numériquement l'unique zéro de f. Faites quelques simulations numériques pour cette méthode choisie.

(3) *Question facultative*

On cherche maintenant s'il existe d'autres fonctions que f présentant le comportement observé pour la méthode de Newton dans les question 1 et 2.

(a) Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur $\mathbb{R}$, que l'on suppose nulle en zéro seulement, impaire et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Montrer que pour $u_0 > 0$, on a

$$u_1 = -u_0 \Longleftrightarrow 2u_0 - \frac{f(u_0)}{f'(u_0)} = 0. \tag{5}$$

et que si (5) est valable alors

$$u_2 = u_0. \tag{6}$$

(b) Que peut-on en déduire sur u_n pour $n \in \mathbb{N}$?

(c) On cherche f telle que (5) ait lieu pour tout $u_0 > 0$, ce qui revient à écrire

$$\forall x > 0, \quad \frac{f(x)}{f'(x)} = 2x.$$

Montrer que cela est équivalent à

$$\forall x > 0, \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2x}$$

et en déduire f sur $\mathbb{R}_+^*$ en supposant que f'/f est de signe constant sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire l'expression de f sur $\mathbb{R}$ et conclure.

Exercice 5.

On étudie l'équation différentielle

$$\forall t \in [0, T], \quad y'(t) = \sin(t) + t^2 y(t)^2, \tag{7a}$$

$$y(0) = 0.2, \tag{7b}$$

avec $T = 1$. On pose, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $h = T/N$ et, pour tout $n \in \{0, ..., N\}$, $t_n = hn$. On choisit $N = 3$. Déterminer y_n, les approximations de $y(t_n)$, pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$, avec le schéma d'Euler progressif (dit aussi d'Euler explicite) et de Runge-Kutta d'ordre 2 pour le problème (7).

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

Erreurs des méthodes d'intégration

Méthodes élémentaires sur $[a, b]$. Dans le tableau qui suit, η appartient à $]a, b[$.

méthode	erreur
rectangle	$\frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta)$
milieu	$\frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta)$
trapèze	$-\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)$
Simpson	$-\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta)$

Méthodes composites (composées) sur $[A, B]$ avec un pas $h = (B - A)/N$. Dans le tableau qui suit, η appartient à $[A, B]$.

méthode	erreur
rectangle	$h \frac{B-A}{2} f'(\eta)$
milieu	$h^2 \frac{B-A}{24} f''(\eta)$
trapèze	$-h^2 \frac{B-A}{12} f''(\eta)$
Simpson	$-h^4 \frac{B-A}{2880} f^{(4)}(\eta)$