Matériaux 3A MNBmater | Automne 2023

# Examen du 20 décembre 2023

Durée : 1,5 heure(s)

**Documents autorisés** : OUI ☒ NON ☐

*Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Écrans, Livres et Internet interdits*

**Calculatrice autorisée** : OUI ☒ NON ☐

*Tout type*

## Exercice 1.

(1) On cherche à déterminer l'équation de la droite passant par les points distincts $A$ et $B$, de coordonnées respectives $(x_A, y_A)$ et $(x_B, y_B)$.

En utilisant la théorie de l'interpolation et l'une des méthodes vue en cours (utilisation de la matrice de Vandermonde, polynôme de Lagrange ou Méthode de Newton), déterminer l'équation de cette droite.

(2) On considère que cette droite interpole une fonction $f$ qui vérifie donc

$$f(x_A) = y_A \text{ et } f(x_B) = y_B. \tag{1}$$

On cherche à étudier maintenant ce qui se passe quand[1] $x_B$ tend vers $x_A$.

(a) Montrer que l'équation de la droite déterminée dans la question 1 admet une limite quand $x_B$ tend vers $x_A$.

(b) En utilisant la convention (1) que peut-on dire de la droite limite par rapport à la courbe $\mathcal{C}$, d'équation $y = f(x)$ ?

## Exercice 2.

| $x_i$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | $-9/2$ | $-1$ | $3$ | $4$ |

TABLE 1. valeurs des couples $(x_i, y_i)$

1. Attention, l'hypothèse $y_A = y_B$ a été rajoutée par erreur et a été supprimée. On a seulement $y_B$ tend vers $y_A$. J'ai pris en compte cette erreur pour la correction et l'évaluation de ceux qui auraient été gênés par cette erreur.

On pose $n = 4$. Les couples $(x_i, y_i)_{1\leq i\leq n}$ sont donnés dans le tableau 1.
On cherche à déterminer la droite de régression linéaire passant le plus proche de ce nuage de point.

(1) Que doit vérifier l'équation de cette droite ?

(2) Si on note $y = \alpha x + \beta$ l'équation de cette droite, on rappelle que

$$ {}^tAA \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = {}^tAb \tag{2} $$

où

$$ A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, $$

$$ b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} $$

Déterminer $\alpha$ et $\beta$ en résolvant le système linéaire (2) et en utilisant les données issues du tableau 1.

(3) Tracer les points $(x_i, y_i)$ et la droite de régression linéaire ainsi trouvée.

(4) Quelle est la valeur numérique de la somme des carrés des écarts entre la droite et les points ?

**Exercice 3.**
On cherche à calculer $8^{1/3}$ en recherchant la racine de la fonction $f(x) = x^3 - 8$. En utilisant successivement les méthodes de la bissection (intervalle initial :$[a_0, b_0]$ avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 3$), de Newton (valeur initiale : $x_0 = 3$) et de la sécante (valeurs initiales : $x_0 = 0$ et $x_1 = 3$), effectuez les premières itérations en remplissant le tableau 2 page 5 qu'il faudra détacher et rendre avec sa copie (les calculs effectués seront détaillés dans la copie).

**Exercice 4.**
On veut approcher numériquement la solution $y$ de l'équation différentielle suivante

$$ y'(t) = 2\,ty(t) - y(t) + t, \qquad y(0) = 1 \tag{3} $$

On utilise pour cela une méthode de Runge-Kutta d'ordre 2.

(1) Calculer au moyen de cette méthode une approximation de $y(0.40)$, solution de (3) à $t = 0.40$ en fixant le pas à $h = 0.20$.

(2) On a appliqué cette méthode et de Runge-Kutta d'ordre 2 et la méthode d'Euler explicite pour différentes valeurs du pas de temps $h$. Le tableau suivant montre les erreurs (|solution exacte - solution calculée|) commises par les deux méthodes à l'instant $t = 1.00$, vu qu'on connaît ici la solution exacte :

| $h$ | méthode 1 | méthode 2 |
|---|---|---|
| 0.125 | $8.2288\,10^{-4}$ | $2.4215\,10^{-1}$ |
| 0.250 | $2.9821\,10^{-3}$ | $4.5557\,10^{-1}$ |

Identifier quelle colonne a été calculée en utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2. Justifier votre réponse.

**Exercice 5.**
On se propose, dans cet exercice, de montrer que l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \tag{4}$$

est convergente et d'en calculer une valeur approchée par la méthode de Simpson à $\varepsilon$ près ($\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé).

(1) Peut-on calculer directement $I$ par la méthode de Simpson ? Pourquoi ?

(2) Soit $A$ appartenant à $[1, +\infty[$. On veut évaluer

$$I_A = \int_0^{A} e^{-x^2} dx$$

à $\varepsilon/2$ près.

(a) Soit la fonction $g$ donnée par

$$g(x) = e^{-x^2} p(x), \tag{5}$$

où $p$ est un polynôme quelconque.
Montrer par récurrence sur $n \geq 0$ la propriété suivante : il existe un polynôme $p_n$ tel que la dérivée $n$-ième de $g$ vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = e^{-x^2} p_n(x), \tag{6}$$

où les polynômes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient

$$p_0 = p, \tag{7}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1}(x) = p_n'(x) - 2x p_n(x). \tag{8}$$

(b) En déduire la dérivée quatrième $f^{(4)}$ de la fonction $f$ définie par $f(x) = e^{-x^2}$.

(c) Déterminer un majorant $M$ de $\left|f^{(4)}\right|$ sur $[0, A]$.
*On pourra admettre que, pour tout $A$, $M = 12$.*

(d) En déduire, en fonction de $A$, $M$ et de $\varepsilon$, le pas maximal $h_{\max}$ autorisé en méthode de Simpson pour que l'erreur d'intégration commise soit de valeur absolue inférieure à $\varepsilon/2$.

(3) Convergence de $I$ et choix de $A$.
Soit $X$ un réel vérifiant $X \geq A$ et $A$ un élément de $[1, +\infty[$.

(a) On pose

$$R(X) = \int_A^{X} e^{-x^2} dx.$$

Montrer que $R(X)$ est défini et que

$$R(X) \leq \int_A^{X} e^{-x} dx. \tag{9}$$

(b) Calculer

$$b(X) = \int_A^X e^{-x} dx \text{ et } l = \lim_{X \to +\infty} b(X) \text{ en fonction de } A.$$

(c) Montrer que

$$\forall X \geq A, \quad R(X) \leq e^{-A}. \tag{10}$$

(d) En déduire que $I$ est convergente et que

$$\int_A^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq e^{-A}. \tag{11}$$

(e) Déterminer en fonction de $\varepsilon$ une valeur de $A$ telle que

$$\int_A^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{12}$$

(4) Bilan

On donne $\varepsilon = 10^{-4}$.

(a) Déterminer $A$ issu de la question 3e.

(b) Déterminer le pas maximal $h_{max}$ issu des questions 2c et 2d.

(c) Conclure sur le nombre de sous-intervalles à considérer pour évaluer $I$ à $10^{-4}$ près.

**Corrigé**

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

**Page à détacher et à rendre (le cas échéant !)**

Nom :
Prénom :

| Itération | Méthode de la bissection | | Méthode de Newton | Méthode de la sécante |
|---|---|---|---|---|
| $i$ | $a_i$ | $b_i$ | $x_i$ | $x_i$ |
| 0 | 0 | 3 | 3 | 0 |
| 1 | | | | 3 |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |

TABLE 2. : Tableau à remplir et à rendre pour l'exercice 3.