

Examen de TD du 07 décembre 2022

Durée : 1 heure(s)

Documents autorisés : OUI NON *Polycopiés de l'UE, notes manuscrites. Écrans, Livres et Internet interdits***Calculatrice autorisée :** OUI NON *Tout type***Exercice 1.**On connaît les valeurs d'une fonction g aux points $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ et $x_2 = -1$:

$$g(x_0) = 3, \quad g(x_1) = 2, \quad g(x_2) = 1.$$

- (1) Construire le polynôme de degré au plus 2 (noté $\Pi_2 g$), interpolant la fonction g aux nœuds x_0 , x_1 et x_2 .
- (2) Pour $\alpha = 3/2$, donner une valeur approchée de $g(\alpha)$.

Exercice 2.

On pourra consulter les formules d'erreur données en page 2.

Soit f donnée par

$$\forall x \in [0, 1/4\pi], \quad f(x) = x^4 \sin(x), \quad (1a)$$

et l'intégrale I

$$I = \int_0^{1/4\pi} f(x) dx. \quad (1b)$$

- (1) (a) Déterminer I^T , l'approximation de I par la méthode élémentaire du trapèze.
- (b) On note

$$M_p = \max_{x \in [0, 1/4\pi]} |f^{(p)}(x)|, \quad (2)$$

le maximum de la valeur absolue de la dérivée p -ième de f sur l'intervalle d'étude. On donne ci-dessous les valeurs numériques de M_1 et M_2 :

$$M_1 = 1.6393539250748; \quad (3a)$$

$$M_2 = 7.7056845684018. \quad (3b)$$

Donnez l'expression de l'erreur commise avec la méthode élémentaire du trapèze et fournissez-en une majoration.

- (c) (i) Calculer la valeur exacte de I .
 (ii) En déduire l'erreur commise réelle, c'est-à-dire $|I^T - I|$ et vérifier qu'elle est inférieure au majorant de l'erreur donné plus haut.
- (2) (a) Déterminer I_3^T , l'approximation de I par la méthode composite des trapèzes avec $N = 3$ sous-intervalles.
 (b) Donnez l'expression de l'erreur commise avec la méthode composite des trapèzes puis fournissez-en une majoration.
 (c) Déterminer l'erreur réelle erreur commise, c'est-à-dire $|I_3^T - I|$ et vérifier qu'elle est inférieure au majorant de l'erreur donné plus haut.
- (3) Déterminer le nombre N de sous-intervalles qu'il faudrait utiliser pour avoir une approximation de I par la méthode composite des trapèzes avec une erreur inférieure à

$$\varepsilon = 10^{-8}. \quad (4)$$

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>

Erreurs des méthodes d'intégration

Méthodes élémentaires sur $[a, b]$. Dans le tableau qui suit, η appartient à $]a, b[$.

méthode	erreur
rectangle	$\frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta)$
milieu	$\frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta)$
trapèze	$-\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)$
Simpson	$-\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta)$

Méthodes composites (composées) sur $[A, B]$ avec un pas $h = (B - A)/N$. Dans le tableau qui suit, η appartient à $[A, B]$.

méthode	erreur
rectangle	$h \frac{B-A}{2} f'(\eta)$
milieu	$h^2 \frac{B-A}{24} f''(\eta)$
trapèze	$-h^2 \frac{B-A}{12} f''(\eta)$
Simpson	$-h^4 \frac{B-A}{2880} f^{(4)}(\eta)$