

Examen CC du 22 novembre 2023

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés : OUI NON

Photocopiés de l'UE, notes manuscrites. Écrans, Livres et Internet interdits

Calculatrice autorisée : OUI NON

Tout type

Exercice 1.

- (1) On cherche à déterminer l'équation de la droite passant par les points distincts A et B , de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) .

En utilisant la théorie de l'interpolation et l'une des méthodes vue en cours (utilisation de la matrice de Vandermonde, polynôme de Lagrange ou Méthode de Newton), déterminer l'équation de cette droite.

Un bonus sera accordé aux solutions exhaustives !

- (2) On considère de plus un troisième point C de coordonnées (x_C, y_C) tel que x_C soit distinct de x_A et de x_B , eux-mêmes distincts. À partir des calculs de la question 1, pourriez-vous déterminer simplement l'équation de la parabole passant par les points de coordonnées respectives (x_A, y_A) , (x_B, y_B) et (x_C, y_C) ?

Exercice 2.

Soit f donnée par

$$\forall x \in [0, 2], \quad f(x) = \cos(1/10 x^2), \quad (1a)$$

et l'intégrale I

$$I = \int_0^2 f(x) dx. \quad (1b)$$

- (1) (a) Déterminer I^S , l'approximation de I par la méthode élémentaire de Simpson.

(b) On note

$$M_p = \max_{x \in [0, 2]} |f^{(p)}(x)|, \quad (2)$$

le maximum de la valeur absolue de la dérivée p -ième de f sur l'intervalle d'étude. On donne ci-dessous les valeurs numériques de M_1 , M_2 , M_3 et M_4 :

$$M_1 = 0.1557673369235 ; \quad (3a)$$

$$M_2 = 0.2252534275022 ; \quad (3b)$$

$$M_3 = 0.1961318646529 ; \quad (3c)$$

$$M_4 = 0.1200000000000. \quad (3d)$$

Donnez l'expression de l'erreur commise avec la méthode élémentaire de Simpson et fournissez-en une majoration.

(c) On donne la valeur exacte de I :

$$I = \text{FresnelC} \left(2/5 \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}} \right) \sqrt{\pi} \sqrt{5}, \quad (4a)$$

soit encore

$$I = 1.9682361637328. \quad (4b)$$

En déduire l'erreur commise réelle, c'est-à-dire $|I^S - I|$ et vérifier qu'elle est inférieure au majorant de l'erreur donné plus haut.

- (2) (a) Déterminer I_2^S , l'approximation de I par la méthode composite de Simpson avec $N = 2$ sous-intervalles.
- (b) Donnez l'expression de l'erreur commise avec la méthode composite de Simpson puis fournissez-en une majoration.
- (c) Déterminer l'erreur réelle erreur commise, c'est-à-dire $|I_2^S - I|$ et vérifier qu'elle est inférieure au majorant de l'erreur donné plus haut.
- (3) Déterminer le nombre N de sous-intervalles qu'il faudrait utiliser pour avoir une approximation de I par la méthode composite de Simpson avec une erreur inférieure à

$$\varepsilon = 10^{-13}. \quad (5)$$

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur <http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html>