Matériaux 3A MNBmater | Automne 2022

Examen complémentaire du 21 février 2023

Durée : 1,5 heure(s)

Documents autorisés : OUI ☒ NON ☐
Un formulaire manuscrit d'une feuille A4 recto-verso

Calculatrice autorisée : OUI ☒ NON ☐
Tout type

On pourra consulter les formules d'erreur données en page 4.

Exercice 1.
On se donne $n = 4$ points d'abscisses respectives $\{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3\}$ et d'ordonnées respectives $\{y_0 = 3, y_1 = 5, y_2 = 7, y_3 = 9\}$.

(1) Déterminer le polynôme P passant par les points $(x_i, y_i)_{0\leq i\leq 1}$.

(2) Que se passe-t-il si on rajoute le point (x_2, y_2) ?

(3) Que se passe-t-il si on rajoute le point (x_3, y_3)(en plus du point déjà rajouté) ?

(4) Expliquer ceci, avec un minimum de calcul !

(5) *Question facultative*

(a) Au vu des résultats précédents, montrer, *sans calculs*, que $f[x_0, x_3, x_2]$ est nul.

(b) Plus généralement, montrer sans calcul, que si I est un sous ensemble de $\{0, 1, 2, 3\}$ de cardinal q supérieur ou égal à 3, alors, en notant $I = \{i_1, ..., i_q\}$, la différence divisée $f[x_{i_1}, ..., x_{i_q}]$ est nulle.

Exercice 2.
Soit f donnée par

$$\forall x \in [1, 2], \quad f(x) = \ln(x)\sin(x), \tag{1a}$$

et l'intégrale I

$$I = \int_1^2 f(x)dx. \tag{1b}$$

(1) (a) Déterminer I^R, l'approximation de I par la méthode élémentaire du rectangle (à gauche).

(b) On note

$$M_1 = \max_{x\in[1,2]} \left|f'(x)\right|, \tag{2}$$

le maximum de $|f'|$ sur l'intervalle d'étude. On donne ci-dessous la valeur numérique de M_1 :

$$M_1 = 0.8534231670804. \tag{3}$$

Donnez l'expression de l'erreur commise avec la méthode élémentaire du rectangle (à gauche) et fournissez-en une majoration.

(c) On donne la valeur exacte de I :

$$I = -Ci\,(1) - \ln(2)\cos(2) + Ci\,(2)\,, \tag{4a}$$

soit encore

$$I = 0.3740279123255. \tag{4b}$$

En déduire l'erreur commise réelle, c'est-à-dire $\left|I^R - I\right|$ et vérifier qu'elle est inférieure au majorant de l'erreur donné plus haut.

(2) (a) Déterminer I_5^R, l'approximation de I par la méthode composite des rectangles (à gauche) avec $N = 5$ sous-intervalles.

(b) Donnez l'expression de l'erreur commise avec la méthode composite des rectangles (à gauche) puis fournissez-en une majoration.

(c) Déterminer l'erreur réelle erreur commise, c'est-à-dire $\left|I_5^R - I\right|$ et vérifier qu'elle est inférieure au majorant de l'erreur donné plus haut.

(3) Déterminer le nombre N de sous-intervalles qu'il faudrait utiliser pour avoir une approximation de I par la méthode composite des rectangles (à gauche) avec une erreur inférieure à

$$\varepsilon = 10^{-4}. \tag{5}$$

Exercice 3.
Soient a et b tels que $a < b$ et f une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$. On suppose aussi que f est convexe sur $[a,b]$ (dont on rappelle que cela est équivalent à $f'' \geq 0$ sur $[a,b]$.)
Montrer que

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)dt \leq \frac{1}{2}(b-a)\left(f(a)+f(b)\right). \tag{6}$$

Exercice 4.

(1) Pour cette question et la question 2, on considère f, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0, \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{7}$$

Étudier sommairement et tracer la fonction f. On montrera en particulier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x > 0, \\ \\ \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{8}$$

(2) (a) (i) Pour $u_0 \in \{1, 4\}$, déterminer les premières valeurs de la méthode de Newton associée à la recherche de l'unique zéro de f. On pourra illustrer les valeurs obtenues sur le graphe de la question 1. Que remarquez-vous ?

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note u_n les valeurs de la méthode de Newton définie par $u_0 = x$. Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \begin{cases} x & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -x & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \tag{9}$$

(iii) Qu'en est-il si $x < 0$ et $x = 0$?

(iv) Conclure sur la convergence de la méthode de Newton pour la fonction f.

(b) Pourriez-vous, en utilisant l'un des méthodes vues en cours, approcher numériquement l'unique zéro de f. Faites quelques simulations numériques pour cette méthode choisie.

(3) *Question facultative*

On cherche maintenant s'il existe d'autres fonctions que f présentant le comportement observé pour la méthode de Newton dans les question 1 et 2.

(a) Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur $\mathbb{R}$, que l'on suppose nulle en zéro seulement, impaire et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Montrer que pour $u_0 > 0$, on a

$$u_1 = -u_0 \Longleftrightarrow 2u_0 - \frac{f(u_0)}{f'(u_0)} = 0. \tag{10}$$

et que si (10) est valable alors

$$u_2 = u_0. \tag{11}$$

(b) Que peut-on en déduire sur u_n pour $n \in \mathbb{N}$?

(c) On cherche f telle que (10) ait lieu pour tout $u_0 > 0$, ce qui revient à écrire

$$\forall x > 0, \quad \frac{f(x)}{f'(x)} = 2x.$$

Montrer que cela est équivalent à

$$\forall x > 0, \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2x}$$

et en déduire f sur $\mathbb{R}_+^*$ en supposant que f'/f est de signe constant sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire l'expression de f sur $\mathbb{R}$ et conclure.

Corrigé

Un corrigé sera disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`

Erreurs des méthodes d'intégration

Méthodes élémentaires sur $[a, b]$. Dans le tableau qui suit, η appartient à $]a, b[$.

méthode	erreur
rectangle	$\frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta)$
milieu	$\frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta)$
trapèze	$-\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)$
Simpson	$-\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta)$

Méthodes composites (composées) sur $[A, B]$ avec un pas $h = (B - A)/N$. Dans le tableau qui suit, η appartient à $[A, B]$.

méthode	erreur
rectangle	$h \frac{B-A}{2} f'(\eta)$
milieu	$h^2 \frac{B-A}{24} f''(\eta)$
trapèze	$-h^2 \frac{B-A}{12} f''(\eta)$
Simpson	$-h^4 \frac{B-A}{2880} f^{(4)}(\eta)$