Matériaux 3A MNBmater | Automne 2022

Corrigé de l'examen complémentaire du 21 février 2023

Correction de l'exercice 1.

(1) Les différences divisées sont égales à

$$f[x_0] = 3,$$
$$f[x_0, x_1] = 2.$$

On en déduit alors le polynôme d'interpolation P

$$P(x) = 2\,x + 3. \tag{1}$$

(2) Si on rajoute le point (x_2, y_2) on a

$$f[x_0, x_1, x_2] = 0,$$

et

$$P(x) = 2\,x + 3,$$

identique au polynôme donné par (1).

(3) Si on rajoute le point (x_3, y_3) on a

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 0,$$

et

$$P(x) = 2\,x + 3,$$

identique au polynôme donné par (1).

(4) On rappelle que le polynôme d'interpolation passant par $n + 1$ points. est de degré au plus n. Ici, les points (x_i, y_i) sont déjà tous alignés et vérifient donc

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad y_i = p(x_i), \tag{2}$$

où p est un polynôme de degré 1.

Voir la figure 1 page suivante.

Ainsi, quelque que soit la valeur de n, le polynôme d'interpolation, est de degré 1 et est égal à p.

(5) *Question facultative*

Soit I est un sous ensemble de $\{0, 1, 2, 3\}$ de cardinal q supérieur ou égal à 3. Notons $I = \{i_1, ..., i_q\}$ et considérons Q, le polynôme passant par les points $(x_{i_j}, y_{i_j})_{1\leq j\leq q}$. On sait que

$$Q(x) = f[x_{i_1}] + f[x_{i_1}, x_{i_1}](x - x_{i_1}) + ... + f[x_{i_1}, ..., x_{i_q}](x - x_{i_1})...(x - x_{i_{q-1}}). \tag{3}$$

On a vu, en question 4 que l'égalité (2) était vérifiée où p est un polynôme de degré 1. Par unicité du polynôme d'interpolation, on a donc $Q = p$, de degré 1. Puisque $q \geq 3$ est le coefficient dominant $f[x_{i_1}, ..., x_{i_q}]$, associé au terme $(x - x_{i_1})...(x - x_{i_{q-1}})$, de degré $q - 1$, ne peut être que nul.

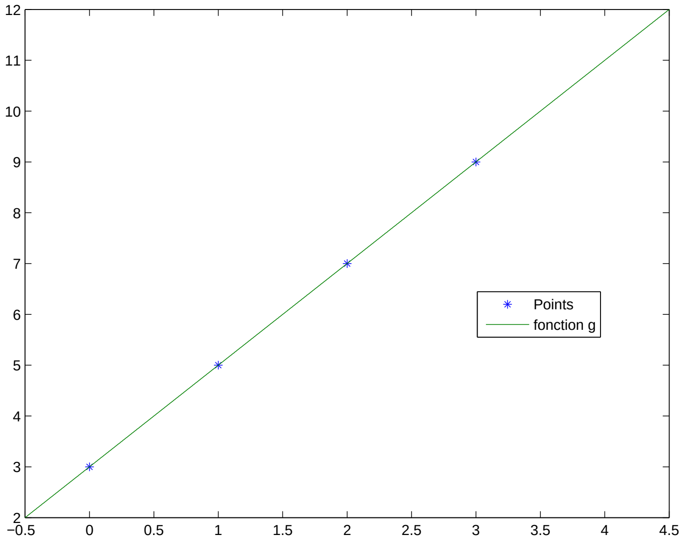


FIGURE 1. Les points (x_i, y_i) et la fonction polynomiale p.

Remarque 1. Cette méthode permet de vérifier que $n+1$ points de coordonnées (x_i, y_i) vérifient l'égalité (2) où p est un polynôme de degré $r \leq n-1$, sans utiliser de détermination de polynôme au sens des moindres carrés. En effet, en raisonnant de la même façon, on peut montrer que les $n+1$ points de coordonnées (x_i, y_i) vérifient l'égalité (2) où p est un polynôme de degré $r \leq n-1$ si et seulement si la différence divisée $f[x_0, x_1, ..., x_r]$ est non nulle et si toutes les différences divisées $f[x_0, x_1, ..., x_r, x_{r+1}]$, ..., $f[x_0, x_1, ..., x_r, x_{r+1}, ..., x_n]$ sont nulles.

Correction de l'exercice 2.

(1) (a) En utilisant le tableau 3.2 du polycopié de cours, on détermine la valeur approchée avec la méthode élémentaire du rectangle (à gauche) :

$$I^R = 0 \tag{4}$$

soit

$$I^R = 0. \tag{5}$$

(b) On note

$$a = 1, \quad b = 2. \tag{6}$$

Le tableau 3.3 du polycopié de cours fournit l'expression de l'erreur commise avec la méthode élémentaire du rectangle (à gauche) :

$$\mathcal{E}^R = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta), \tag{7}$$

où η appartient à $]a, b[$. On vérifie que f est bien de classe $\mathcal{C}^1$. On majore la valeur absolue de $f'(\eta)$, par le maximum de la valeur absolue de la dérivée correspondant et la majoration de l'erreur commise est donc donnée par

$$\mathcal{E}^R \leq \frac{(b-a)^2}{2} M_1 \tag{8}$$

Grâce à (6) et et aux valeurs de l'énoncé (3), on déduit donc la majoration de l'erreur commise suivante :

$$\mathcal{E}^R \leq 0.4267115835. \tag{9}$$

(c) L'erreur réelle commise est égale à

$$\left|I^R - I\right| = |0.3740279123255 - 0| = 0.3740279123255$$

qui est inférieure à celle donnée par (9).

(2) (a) En utilisant le tableau 3.4 du polycopié de cours, on détermine la valeur approchée avec la méthode composite des rectangles (à gauche) avec $N = 5$:

$$I_5^R = 1/5\,\ln(6/5)\sin(6/5) + 1/5\,\ln(7/5)\sin(7/5) + 1/5\,\ln(8/5)\sin(8/5) + 1/5\,\ln(9/5)\sin(9/5) \tag{10}$$

soit

$$I_5^R = 0.30874503281556. \tag{11}$$

(b) On note maintenant

$$A = 1, \quad B = 2. \tag{12}$$

Le tableau 3.5 du polycopié de cours fournit l'expression de l'erreur commise avec la méthode composite des rectangles (à gauche) :

$$\mathcal{E}_5^R = h\frac{B-A}{2}f'(\eta), \tag{13}$$

où η appartient à $[A, B]$ et

$$h = \frac{B-A}{N}, \tag{14}$$

soit

$$h = \frac{(2)-(1)}{5},$$

et donc

$$h = 0.2000000000000. \tag{15}$$

On peut donc écrire

$$\left|\mathcal{E}_5^R\right| \le h\frac{B-A}{2}M_1. \tag{16}$$

En utilisant de nouveau les valeurs de l'énoncé (3), on déduit donc la majoration de l'erreur commise suivante :

$$\mathcal{E}_5^R \le 8.534231\,10^{-2}. \tag{17}$$

(c) L'erreur réelle commise est égale à

$$\left|I_5^R - I\right| = |0.3740279123255 - 0.3087450328156| = 6.528287\,10^{-2}$$

qui est inférieure à celle donnée par (17).

(3) Pour que

$$\left|\mathcal{E}_5^R\right| \le \varepsilon,$$

il suffit, d'après (16) que l'on ait :

$$h\frac{B-A}{2}M_1 \le \varepsilon,$$

soit, d'après (14),

$$\frac{B-A}{N}\frac{B-A}{2}M_1 \le \varepsilon,$$

soit encore

$$\frac{(B-A)^2}{2\varepsilon}M_1 \le N,$$

et donc

$$N \ge \frac{M_1(B-A)^2}{2\varepsilon}.$$

Il suffit donc de prendre

$$N = \left\lceil \frac{M_1(B-A)^2}{2\varepsilon} \right\rceil. \tag{18}$$

où pour tout réel X,

$$\lceil X \rceil \text{ est le plus petit entier supérieur ou égal à } X.$$

Numériquement, on a donc en utilisant de nouveau les valeurs de l'énoncé (3),

$$N = 4268. \tag{19}$$

Remarque 2. Avec cette valeur de N, on a

$$\mathcal{E}^R_{4268} = 0.373954071730678,$$

et l'erreur réelle

$$\left|\mathcal{E}^R_{4268} - I\right| = 7.3840595\,10^{-5},$$

quantité qui est inférieure à ε donné par l'équation (5) de l'énoncé.

Correction de l'exercice 3.
Montrons que

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)dt \leq \frac{1}{2}(b-a)\left(f(a)+f(b)\right). \tag{20}$$

D'après le tableau 3.2 du polycopié de cours, on constate que $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et $\frac{1}{2}(b-a)\left(f(a)+f(b)\right)$ sont les approximations de $\int_a^b f(t)dt$ par les méthodes respectives du point milieu et du trapèze, notées I^M et I^T. Ainsi (20) est équivalente à

$$\int_a^b f(t)dt - I^M \geq 0,$$
$$\int_a^b f(t)dt - I^T \leq 0.$$

ce qui signifie, en terme d'erreurs que

$$\mathcal{E}^M \geq 0,$$
$$\mathcal{E}^T \leq 0,$$

soit encore, d'après le tableau 3.2 du polycopié de cours, que

$$\frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta) \geq 0, \tag{21a}$$
$$-\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta) \leq 0. \tag{21b}$$

Par hypothèse, puisque f est convexe, on a $f''(\eta) \geq 0$ et (21) est immédiate.

Remarque 3. Proposons une méthode alternative, plus fondamentale :
On rappelle, d'après les résultats classiques de convexité, qu'une fonction convexe est en-dessous de sa corde, entre a et b (voir figure 2), ce qui signifie que pour tout $t \in [a,b]$,

$$f(t) \leq \alpha t + \beta, \tag{22}$$

où $t \mapsto \alpha t+\beta$ est l'équation de la corde, entre a et b, c'est-à-dire, la droite passant par les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Si on intègre (22) pour $t \in [a,b]$, on obtient

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b (\alpha t + \beta)\, dt,$$

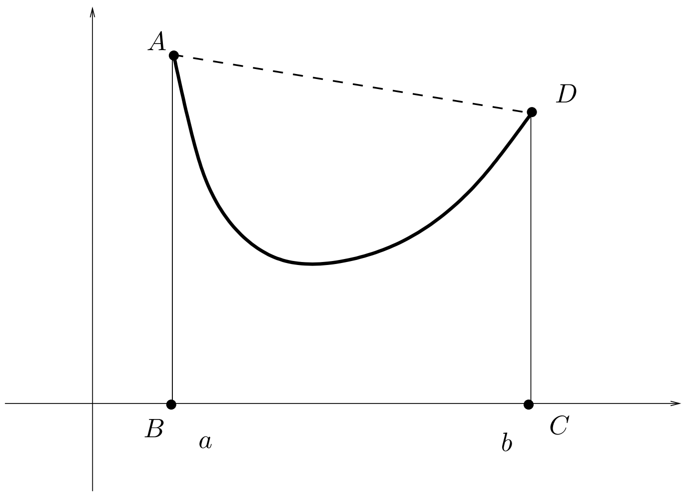


FIGURE 2. Une fonction convexe, sous sa corde.

et puisque $\int_a^b \alpha t+\beta dt$ est exactement l'aire du trapèze (voir figure 2) $ABCD$, donnée par $\frac{1}{2}(b-a)\left(f(a)+f(b)\right)$, on obtient alors

$$\int_a^b f(t)dt \leq \frac{1}{2}(b-a)\left(f(a)+f(b)\right). \tag{23}$$

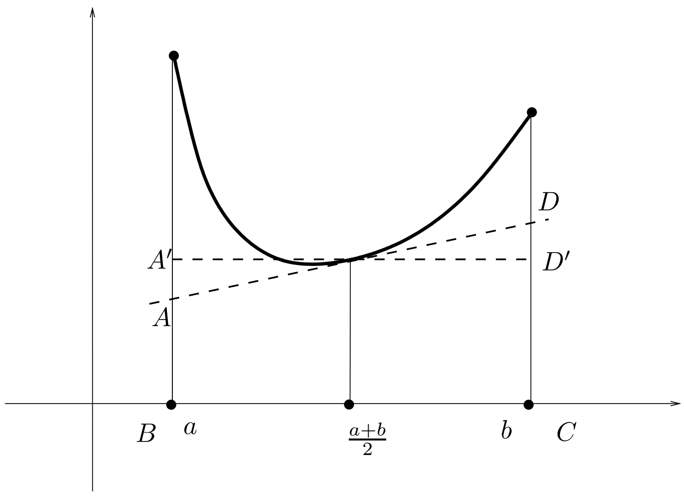


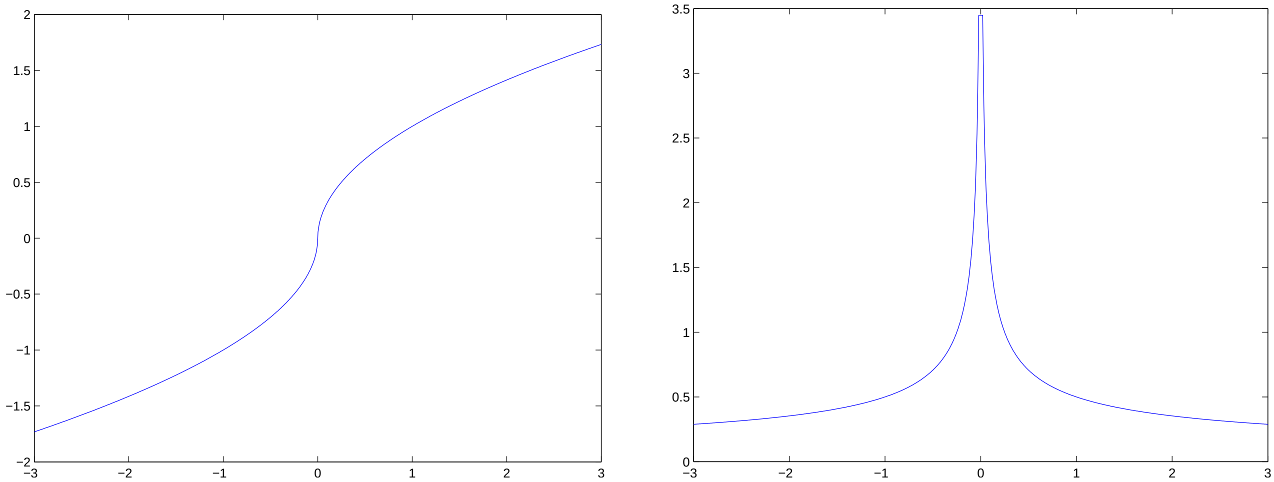
FIGURE 3. Une fonction convexe, au-dessus de sa tangente.

De même, on utilise le fait qu'une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes, en particulier celle au point d'abcisse $(a+b)/2$,(voir figure 3) définie par $t \mapsto At+B$ et donc

$$f(t) \geq \mathcal{A}t+\mathcal{B}. \tag{24}$$

Si on intègre (24) pour $t \in [a,b]$, on obtient

$$\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b \left(\mathcal{A}t+\mathcal{B}\right)dt.$$



(a) f (b) f'

FIGURE 4. Graphes de f et de f'.

Puisque $\int_a^b At + Bdt$ est exactement l'aire du trapèze (voir figure 3) $ABCD$, qui, par symétrie, est aussi l'aire du rectangle $A'BCD'$, donnée par $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, on obtient alors

$$\int_a^b f(t)dt \geq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right). \tag{25}$$

La conclusion provient de (23) et de (25).

Correction de l'exercice 4.

(1) La fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0, \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0, \end{cases} \tag{26}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et il est clair que, si $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

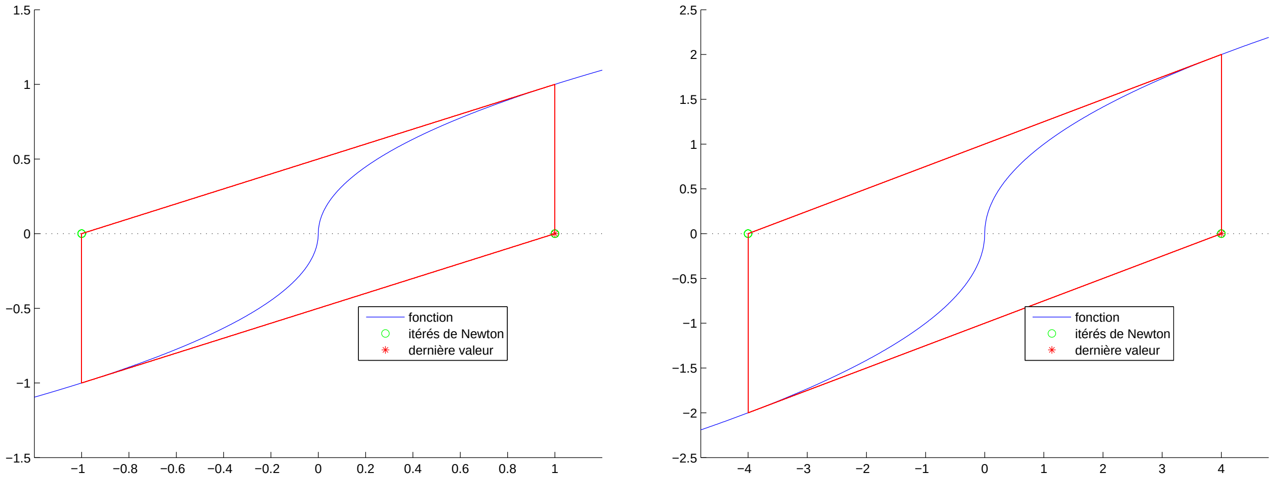
Si $x < 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\left(\sqrt{-x}\right)', \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-x}}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x > 0, \\ \\ \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{27}$$

Il est évident que f est impaire, que $f(0) = 0$ et que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Voir son graphe et celui de sa dérivée sur la figure 4.



(a) $u_0 = 1$ (b) $u_0 = 4$

FIGURE 5. Quelques valeurs de la méthode de Newton

(2) (a) (i) À la main, ou en utilisant par exemple la fonction `newton.m` disponible sur le site à l'adresse habituelle, on obtient les valeurs suivantes de u_n pour $u_0 = 1$

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \dots.$$

et pour $u_0 = 4$, on obtient

$$4,\ -4,\ 4,\ -4,\ 4,\ -4,\ 4,\ -4,\ 4,\ -4,\ 4,\ -4,\ \dots.$$

On pourra taper, sous matlab, grâce à la fonction `newton.m` disponible sur le site à l'adresse habituelle, les commandes suivantes

```
fun=@(x)(x>=0).*sqrt(x)-(x<0).*sqrt(-x);
dfun=@(x)(1/2)*((x>=0)./sqrt(x)+(x<0)./sqrt(-x));
[xvecta,xdif,fx,nit]=newton(1,-1,20,fun,dfun,1);
figure;
[xvectb,xdif,fx,nit]=newton(4,-1,20,fun,dfun,1);
disp(xvecta);
disp(xvectb);
```

ce qui donnera les graphiques de la figure 5. On constate que les valeurs sont cycliques avec, pour $x = u_0 \in \{1, 4\}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \begin{cases} x & \text{si } n \text{ est pair}, \\ -x & \text{si } n \text{ est impair}. \end{cases} \tag{28}$$

(ii) De façon générale, on note u_n les valeurs de la méthode de Newton définie par $u_0 = x$. Montrons que pour tout $x > 0$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \begin{cases} x & \text{si } n \text{ est pair}, \\ -x & \text{si } n \text{ est impair}. \end{cases} \tag{29}$$

On considère g donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \tag{30}$$

On a, d'après (26)-(27) si $x > 0$,

$$\begin{aligned} g(x) &= x - \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}, \\ &= x - 2\sqrt{x}\sqrt{x}, \\ &= x - 2\left(\sqrt{x}\right)^2, \\ &= x - 2x, \\ &= -x. \end{aligned}$$

On vérifie aussi, en même temps que, si $x < 0$

$$\begin{aligned} g(x) &= x + \frac{\sqrt{-x}}{\frac{1}{2\sqrt{-x}}}, \\ &= x + 2\sqrt{-x}\sqrt{-x}, \\ &= x + 2\left(\sqrt{-x}\right)^2, \\ &= x - 2x, \\ &= -x. \end{aligned}$$

et donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = -x. \tag{31}$$

Puisque la méthode de Newton est définie par $u_{n+1} = g(u_n)$, on a, si $u_0 = x > 0$

$$u_1 = g(u_0) = -u_0 < 0$$

et donc

$$u_2 = g(u_1) = -u_1 = u_0,$$

et par récurrence, on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \begin{cases} x & \text{si } n \text{ est pair}, \\ -x & \text{si } n \text{ est impair}. \end{cases} \tag{32}$$

Cela est vrai aussi si $x < 0$. On vérifie aussi que, puisque f n'est pas dérivable en zéro.

$$\text{pour } x = 0, \text{ la méthode de Newton n'est pas définie.} \tag{33}$$

Néanmoins, on peut considérer que g est définie par continuité en zéro, d'après (31), en posant

$$g(0) = 0. \tag{34}$$

On a donc, immédiatement, avec cette convention, si $x = u_0 = 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 0. \tag{35}$$

(iii) Voir question 2(a)ii

(iv) D'après (32), vraie aussi pour $x < 0$,

$$\text{la suite de la méthode de Newton est cyclique et ne converge pas si } u_0 \neq 0. \tag{36}$$

et, en adoptant la convention (34), on a, d'après (35)

$$\text{la suite de la méthode de Newton est constante et converge vers zéro si } u_0 = 0. \tag{37}$$

Remarque 4. Cet exemple est un peu pathologique, pour ne pas dire capilotracté ! Les hypothèses habituellement faites sur la méthode de Newton exigent que f est dérivable en la racine, mieux à dérivée non nulle (voir les propositions du cours 4.54 et 4.62).

(b) Les hypothèses de la méthode du point fixe (voir proposition 4.11 du cours) ne sont pas assurées, puisque f n'est pas dérivable, et sa dérivée sur l'intervalle $[-1, 1] \setminus \{0\}$ n'est pas bornée, puisqu'elle tend vers $+\infty$ quand x tend vers zéro ! La seule méthode qui fonctionne ici est la méthode de la dichotomie. À la main, ou en utilisant par exemple la fonction `bisection.m` disponible sur le site à l'adresse habituelle, et en tapant

```
[xvect,xdif,fx,nit]=bisection(-1,1,0,150,fun)
```

en obtient le zéro exact en une seule itération, ce qui est normal, par symétrie. Si on tape par exemple

```
[xvect,xdif,fx,nit]=bisection(-1,1.1,eps,150,fun)
```

on obtient la valeur suivante $1.033563\,10^{-16}$ en 54 itérations.

(3) (a) Soit f, définie sur $\mathbb{R}$, que l'on suppose nulle en zéro seulement, impaire et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Soit $u_0 > 0$. On a par définition de la méthode de Newton

$$u_1 = u_0 - \frac{f(u_0)}{f'(u_0)}.$$

Ainsi,

$$u_1 = -u_0 \tag{38}$$

est équivalent à

$$2u_0 - \frac{f(u_0)}{f'(u_0)} = 0 \tag{39}$$

Sous cette hypothèse, on a alors, grâce à (38),

$$u_1 \neq 0, \tag{40}$$

on a, par imparité (si f est impaire, sa dérivée est paire)

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 - \frac{f(u_1)}{f'(u_1)}, \\ &= -u_0 - \frac{f(-u_0)}{f'(-u_0)}, \\ &= -u_0 + \frac{f(u_0)}{f'(u_0)}, \\ &= -u_0 + 2u_0 \end{aligned}$$

et donc

$$u_2 = u_0. \tag{41}$$

(b) On en déduit (28).

(c) On cherche f telle que (39) ait lieu pour tout $u_0 > 0$, ce qui revient à écrire

$$\forall x > 0, \quad \frac{f(x)}{f'(x)} = 2x, \tag{42}$$

ce qui est équivalent, par hypothèse sur f à

$$\forall x > 0, \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2x}. \tag{43}$$

On résout cette équation différentielle de la façon suivante : Considérons l'équation différentielle

$$\forall t \in [\tau, +\infty[, \quad 2ty'(t) - y(t) = 0. \tag{44}$$

On a deux façons de procéder.

(i) Soit, on raisonne comme dans [Bas22, Chapitre "Équations différentielles (ordinaires)", section "Équations differentielles d'ordre un"] disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/coursMFI.pdf`, en écrivant et en supposant y non nul (et par exemple strictement positif)

$$\begin{aligned}
2ty(t)' - y(t) = 0 &\Longleftrightarrow \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{2t},\\
&\Longleftrightarrow (\ln|y|)' = \left(\frac{1}{2}\ln|t|\right)',\\
&\Longleftrightarrow (\ln|y|)' = \left(\ln\sqrt{t}\right)',\\
&\Longleftrightarrow \ln(y) = c + \ln\sqrt{t},\\
&\Longleftrightarrow y = e^{c+\ln\sqrt{t}},\\
&\Longleftrightarrow y = e^{c}e^{\ln\sqrt{t}},\\
&\Longleftrightarrow y = c\sqrt{t}
\end{aligned}$$

où $K = e^c$. On a donc

$$y(t) = c\sqrt{t}. \tag{45}$$

(ii) Soit on applique directement le résultat de [Bas22, Section "Équations différentielles d'ordre 1" de l'annexe "Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2"] disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/coursMFI.pdf`. On sait, d'après le cours, en notant $a(t) = 2t$ et $b(t) = -1$, que y est solution de (44) ssi

$$y(t) = ce^{-\alpha(t)}$$

où c est un réel et α une primitive de $b/a = -1/(2t)$, soit

$$\alpha(t) = -1/2\ln|t| = -1/2\ln t = -\ln\sqrt{t}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
y(t) &= ce^{-\alpha(t)},\\
&= ce^{\ln\sqrt{t}},
\end{aligned}$$

et donc

$$y(t) = c\sqrt{t}. \tag{46}$$

où c est un réel quelconque.

Finalement, on obtient, en prolongeant f par continuité en zéro, et en utilisant les hypothèses faites sur f :

$$\exists c \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} c\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0,\\ -c\sqrt{-x} & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{47}$$

On retrouve bien, à une constante multiplicative près, la fonction f donné par l'équation (26).

Remarque 5. On réécrit (43) sous la forme

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{2}\frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

Si f est dérivable en zéro, on obtient quand x tend vers zéro :

$$\lim_{x\to 0} \quad f'(x) = \frac{1}{2}f'(0),$$

et d'après le théorème de la limite de la dérivée, on a donc (dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$)

$$f'(0) = \frac{1}{2} f'(0),$$

ce qui implique que, soit $f'(0) = 0$ soit $f'(0) = +\infty$, ce qui est le cas pour a fonction f donné par l'équation (26).

Remarque 6. Si on se passe de l'hypothèse d'imparité faite sur f, on laisse au lecteur le soin de vérifier que l'on obtient l'équation différentielle, dite non résolue, beaucoup plus difficile (probablement impossible) à résoudre

$$\forall x > 0, \quad \frac{f(x)}{f'(x)} + \frac{f\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f'\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)} = 0. \tag{48}$$

Références

[Bas22] J. Bastien. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique.* Notes de cours de l'UV MFI (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`. 2022. 270 pages.