Matériaux 3A MNBmater | Automne 2022

Corrigé de l'examen du 02 février 2023

Correction de l'exercice 1.

(1) (a)

t	$f(t)$
1.00000	4.47550
1.50000	5.39960
2.00000	6.54960
2.50000	7.82160
3.00000	9.19970

On utilise les trois premières valeurs de t données dans le tableau ci-dessus. On utilise la forme de Newton :

$$\Pi_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1). \tag{1}$$

On considère donc les 3 point suivants qui contiennent la donnée $\tau = 1.2$: $x_0 = 1.0$, $x_1 = 1.5$ et $x_2 = 2.0$. On calcule les différences divisées :

$$f[x_0] = 4.475500,$$
$$f[x_0, x_1] = 1.848200,$$
$$f[x_0, x_1, x_2] = 0.451800.$$

On en déduit donc, d'après (1),

$$\Pi_2(\tau) = \Pi_2(1.2) = 4.818032. \tag{2}$$

(b) On rajoute le quatrième point $x_3 = 2.5$. La nouvelle différence divisée vaut donc

$$f[x_0, x_1, x_2, x_4] = -0.138533.$$

On en déduit donc

$$\Pi_3(x) = (f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \tag{3}$$

soit

$$\Pi_3(x) = \Pi_2(x) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \tag{4}$$

et

$$\Pi_3(\tau) = \Pi_3(1.2) = 4.811382,$$

ce qui n'est guère différent de la valeur donnée par (2).

Voir la figure 1 page suivante.

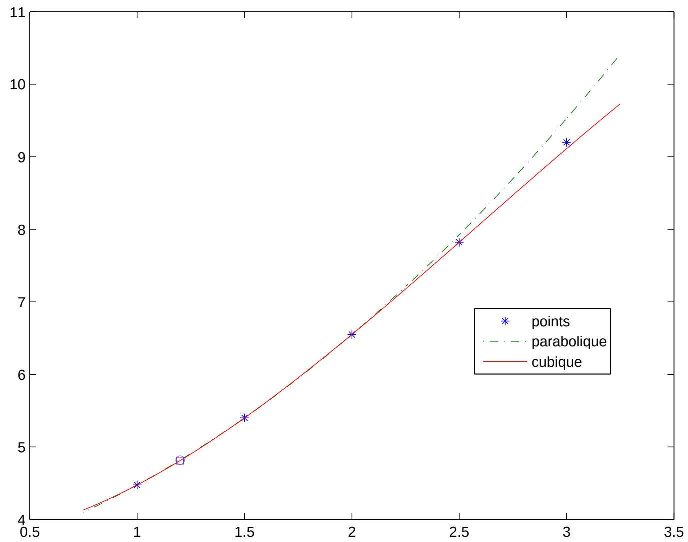


FIGURE 1. Les points $(t, f(t))$ et les deux polynômes de degré 2 et 3.

(2) (a) Ici, on dispose des valeurs de f pour $N = 5$ points équirépartis dans l'intervalle $[A, B] = [1, 3]$ avec un pas égal à $h = 0.5$.

$$I_N^T = \frac{h}{2}\big(f(A) + f(B)\big) + h \sum_{i=1}^{N-1} f\left(t_i\right). \tag{5}$$

On trouve numériquement

$$I_N^T = 13.304200, \tag{6}$$

Remarque 1. On dispose des valeurs de f pour $N = 5$ points équirépartis dans l'intervalle $[A, B] = [1, 3]$ avec un pas égal à $h = 0.5$. L'intégrale approchée de f sur $[A, B]$ par la méthode composites des rectangles (non vues en cours et non exigée ici) est donnée par :

$$I_N^R = h \sum_{i=0}^{N-1} f\left(t_i\right). \tag{7}$$

Il suffit donc d'appliquer cette formule en utilisant les donnés du tableau de la question 1a. On trouve numériquement

$$I_N^R = 12.123150, \tag{8}$$

ce qui est très proche du résultat donné par (6).

(b) (i) Si on veut utiliser la méthode du milieu ou de Simpson, on a deux méthodes :

(A) On peut remarquer que le nombre de points $N = 5$ où f est connue est impair. On peut donc utiliser la méthode composite du point milieu

$$I_N^M = h \sum_{i=0}^{N-1} f\left(t_i + \frac{h}{2}\right). \tag{9}$$

ou celle de Simpson

$$I_N^S = \frac{h}{6}\left(f(A) + f(B) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f\left(t_i\right) + 4\sum_{i=0}^{N-1} f\left(t_i + \frac{h}{2}\right)\right) \tag{10}$$

où le pas h est cette fois-ci égal à $h = 1.0$ et les points t_i correspondent aux valeurs de rang impaires des réels t donnés dans le tableau de la question 1a, tandis que les points milieux $t_i + h/2$ correspondent aux valeurs de rang paires des réels t donnés dans ce même tableau.

(B) On peut aussi considérer le pas $h = 0.5$ et utiliser la formule (9) ou (10) où les points t_i sont donnés dans le tableau de la question 1a, tandis que les points milieux correspondent à des réels où f n'est pas connue et il nous faut donc les valeurs de ces réels par la splines.

(ii) Pour cette question, l'énoncé incitait fortement à utiliser la méthode 2(b)iB ! En effet, dans l'énoncé était fourni le tableau suivant qui contient les valeurs de f évaluées aux différents milieux grâce à la spline utilisée :

t	$f(t)$
1.25000	4.90144
1.75000	5.95423
2.25000	7.17272
2.75000	8.49701

Il suffit donc d'appliquer cette formule en utilisant les données du tableau de la question 1a. On trouve numériquement en utilisant (9) pour le point milieu

$$I_N^M = 13.262700, \tag{11a}$$

et pour Simpson en utilisant (10)

$$I_N^S = 13.276533, \tag{11b}$$

Si on avait utilisé la méthode 2(b)iA, on aurait trouvé pour le point milieu

$$I_N^M = 13.221200, \tag{12a}$$

et pour Simpson

$$I_N^S = 13.276533. \tag{12b}$$

On constate que la valeur donnée par (12a) est proche de la valeur donnée par (11a), tandis que celles données par (11b) et (12b) semblent identiques !

(c) La méthode composite de Simpson appliquée à la spline sur [A,B] consiste à sommer les différentes intégrales approchées données par la méthode élémentaire de Simpson sur chacun des intervalles $[t_i, t_{i+1}]$, elle-mêmes étant de degré (d'exactitude) 3, c'est-à-dire, intégrant exactement les polynômes de degré 3. Or la spline construite est bien de degré au plus 3 (par morceaux, c'est-à-dire sur chacun des intervalles $[t_i, t_{i+1}]$) et donc intégrée exactement par la méthode composite de Simpson.

Remarque 2. On est obligé d'utiliser la méthode d'intégration élémentaire de Simpson pour justifier cela. On pourra être tenter d'utiliser le raisonnement suivant : l'erreur de la méthode composite de Simpson est donnée par $-h^4 \frac{B-A}{2880} f^{(4)}(\eta)$ où η appartient à $[A, B]$ et cette quantité est nulle si f est polynômiale par morceaux de degré au plus 3. En effet, la spline construite a une dérivée première et seconde continue et n'est donc pas de classe C^4, comme l'exige le raisonnement ainsi fait.

Remarque 3. Numériquement, on est capable de déterminer les coefficients de la spline sur chacun des intervalles $[t_i, t_{i+1}]$. Pour plus de détails, consulter le fichier fourni `examMNBmater22_exo1.m`. On obtient la valeur suivante de l'intégrale exacte de la spline :

$$I = 13.276533, \tag{13}$$

ce qui est bien la valeur donnée par (11b). Si on fait la différence entre les deux méthodes, on obtient bien une erreur égale à 0.

Remarque 4. On pouvait aussi répondre plus rapidement aux trois questions relatives aux calcul par la méthode des rectangles, des milieux des trapèzes et de Simpson, en remarquant la chose suivante : on pose

$$S = h\sum_{i=1}^{N-1} f\left(t_i\right),$$
$$S' = h\sum_{i=0}^{N-1} f\left(t_i + \frac{h}{2}\right),$$

quantités que l'on calcule une fois pour toute grâce aux deux tableaux fournis dans l'énoncé. On a alors

$$\begin{aligned}
I_N^R &= hf\left(t_0\right) + S,\\
I_N^M &= S',\\
I_N^T &= \frac{h}{2}\big(f(A) + f(B)\big) + S,\\
I_N^S &= \frac{1}{6}\left(h\big(f(A) + f(B)\big) + 2S + 4S'\right).
\end{aligned}$$

Numériquement on retrouve bien les valeurs déjà calculées :

$$\begin{aligned}
I_N^R &= 12.123150,\\
I_N^M &= 13.262700,\\
I_N^T &= 13.304200,\\
I_N^S &= 13.276533.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2.

(1) On interpole la fonction f donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt, \tag{14}$$

dont on dispose des valeurs aux points $\{x_0, ..., x_2\}$.

(2) La dérivée de f vaut naturellement

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{15}$$

On peut aussi calculer les dérivées secondes et troisièmes :

$$\begin{aligned}
f^{(2)} &= -\frac{x\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{2\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}},\\
f^{(3)} &= \frac{\sqrt{2}\,\left(x^2 - 1\right)}{2\,\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}}.
\end{aligned}$$

(3) Posons

$$\alpha = 1.050. \tag{16}$$

L'idée de cet exercice est de choisir de façon optimale le degré n du polynôme et les points x_i parmi les points donnés $\{x_0, ..., x_2\}$, notés $z_0, ..., z_n$, puis le polynôme d'interpolation $\Pi_n(f)$ de f, déterminé grâce aux points $z_0, ..., z_n$ de telle sorte que l'erreur d'interpolation soit la plus petite possible au point α. Pour simplifier, nous supposerons que $n \geq 1$. Cette erreur est donnée par

$$E_n(f)(\alpha) = |\Pi_n(f)(\alpha) - f(\alpha)| = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^{n} (\alpha - z_i) \right|, \tag{17}$$

où ξ est un réel inconnu. Il est clair que cette erreur est la plus petite si les z_i se suivent et si α est dans l'intervalle $[z_0, ..., z_n]$. Dans ce cas, on sait que ξ appartient à $[z_0, z_n]$. Une fois ces points déterminés, on a alors de façon classique une approximation de $f(\alpha)$ fournie par

$$\begin{aligned} f(\alpha) \approx \Pi_n(f)(\alpha) = f[z_0] + f[z_0, z_1](\alpha - z_0) + f[z_0, z_1, z_2](\alpha - z_0)(\alpha - z_1) + ... \\ + f[z_0, z_1, z_2, ..., z_n](\alpha - z_0)(\alpha - z_1)...(\alpha - z_{n-1}). \end{aligned} \tag{18}$$

— Pour $n = 1$, l'unique polynôme possible correspond au choix de $z_0 = x_0$ et $z_1 = x_1$. D'après le tableau de l'énoncé et (18), on a

$$\begin{aligned} |E_1(f)(\alpha)| \leq \frac{1}{2} \max_{\xi \in [x_0, x_1]} |f''(\xi)| \, |\alpha - x_0||\alpha - x_1| = \frac{1}{2} \times 0.2419707 \times |\alpha - x_0||\alpha - x_1| \\ \approx 3.2463\, 10^{-4} > 6.0\, 10^{-6}, \end{aligned}$$

et donc cette interpolation ne convient pas.

— Pour $n = 2$, l'unique polynôme possible correspond au choix de $z_0 = x_0$, $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$. D'après le tableau de l'énoncé et (18), on a

$$\begin{aligned} |E_1(f)(\alpha)| &\leq \frac{1}{3!} \max_{\xi \in [x_0, x_2]} \left| f^{(3)}(\xi) \right| |\alpha - x_0||\alpha - x_1||\alpha - x_2| \\ &= \frac{1}{3!} \times \max(0.0457490, 0.0854419) \times |\alpha - x_0||\alpha - x_1||\alpha - x_2| \approx 5.34011\, 10^{-6} \leq 6.0\, 10^{-6}, \end{aligned}$$

et donc cette interpolation convient.

— Finalement, le meilleur résultat correspond au degré $n = 2$ en choisissant les points x_i d'indices $i \in \{0, 1, 2\}$. Les différences divisées valent alors

$$(0.8413447461, 0.2298919299, -0.1196401130),$$

tandis que la valeur approchée vaut

$$f(\alpha) \approx 0.8531384428. \tag{19}$$

L'erreur est majorée par

$$5.34011\, 10^{-6}. \tag{20}$$

Notons que la vraie valeur est donnée par

$$f(\alpha) = 0.8531409436, \tag{21}$$

et que l'erreur est donc égale à

$$2.50077\, 10^{-6}, \tag{22}$$

plus petite que celle donnée par (20).

Voir la figure 2.

Remarque 5. Donnons le texte complet de l'exercice intialement prévu, plus difficile !

On a calculé les probabilités pour différentes valeurs de x, au moyen de méthodes d'intégration numérique très précises et les résultats sont reportés dans le tableau 1. Obtenir $P(X \leq 1.0500)$ avec une erreur absolue inférieure à $\varepsilon = 1.0\, 10^{-6}$. Dans le tableau 2 ont été affichés les maximums des dérivées $f^{(i)}$ pour $i \in \{2, ..., 5\}$, sur différents intervalles.

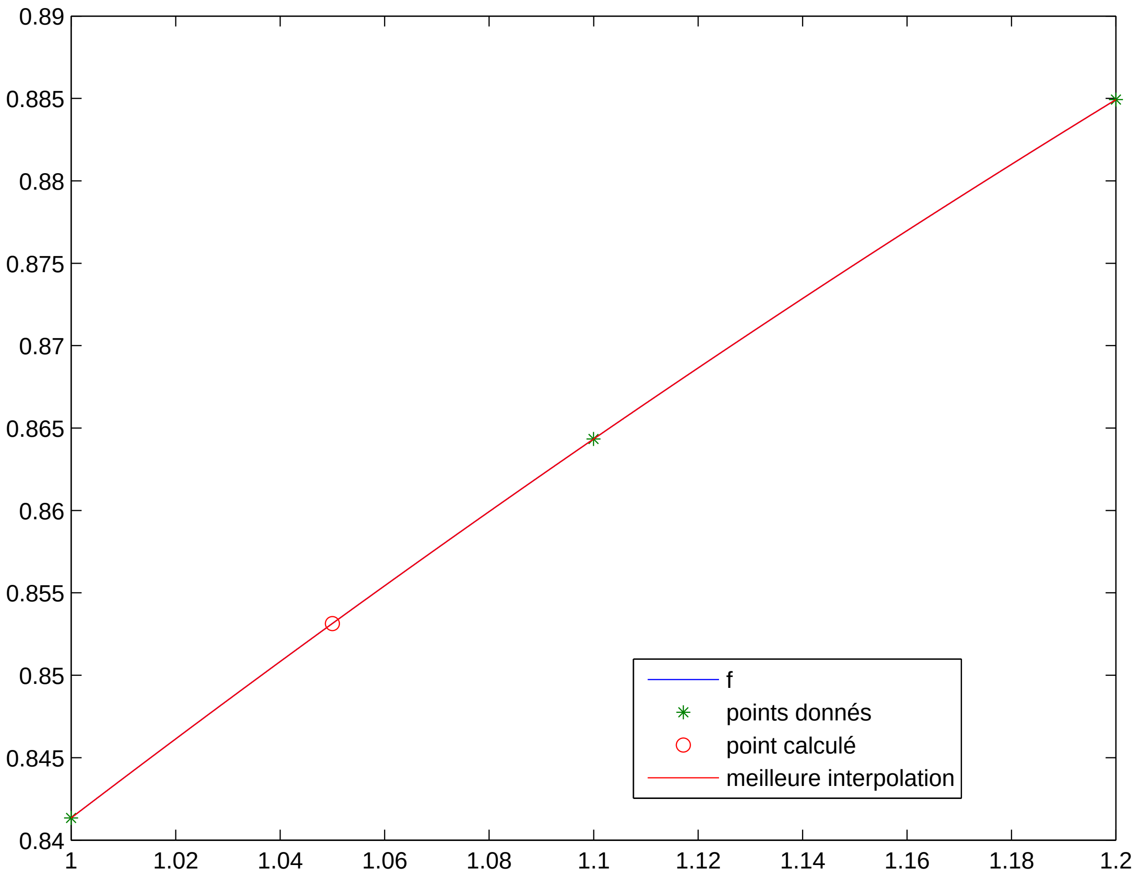


FIGURE 2. Les données et la fonction f.

i	x_i	$P(X \leq x_i)$
0	1.000000000	0.841344746
1	1.100000000	0.864333939
2	1.200000000	0.884930330
3	1.300000000	0.903199515
4	1.400000000	0.919243341

TABLE 1. Les valeurs de x_i et de $P(X \leq x_i)$ pour $i \in \{0, ..., 4\}$

Comme précédemment, on peut aussi calculer les dérivées quatrième et cinquième de f :

$$f^{(4)} = -\frac{\sqrt{2}\,x\,\left(x^2-3\right)}{2\,\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}},$$

$$f^{(5)} = \frac{\sqrt{2}\,\left(x^4-6\,x^2+3\right)}{2\,\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}}.$$

On peut alors remplir les tableaux 2 et 1.

	$[x_0, x_1]$	$[x_1, x_2]$	$[x_2, x_3]$	$[x_3, x_4]$
$\left\|f^{(2)}\right\|$	0.241971	0.239637	0.233023	0.222779
$\left\|f^{(3)}\right\|$	0.045749	0.085442	0.118244	0.143738
$\left\|f^{(4)}\right\|$	0.483941	0.428951	0.363516	0.291841
$\left\|f^{(5)}\right\|$	0.609093	0.692545	0.734126	0.739986

TABLE 2. Les maximas des valeurs absolue des dérivées $\left|f^{(j)}\right|$ sur les intervalles $[x_i, x_{i+1}]$.

On fait comme précédemment. Le meilleur résultat correspond au degré $n = 4$ en choisissant les points x_i d'indices $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Les différences divisées valent alors

$$(0.8413447461, 0.2298919299, -0.1196401130, 0.0109328620, 0.0151031802),$$

tandis que la valeur approchée vaut

$$f(\alpha) \approx 0.8531411267. \tag{23}$$

L'erreur est majorée par

$$2.2340\,10^{-7}. \tag{24}$$

Notons que la vraie valeur est donnée par

$$f(\alpha) = 0.8531409436, \tag{25}$$

et que l'erreur est donc égale à

$$1.83120\,10^{-7}, \tag{26}$$

plus petite que celle donnée par (24).
Voir la figure 3.

Remarque 6. Notons que cet exercice est intéressant, puisqu'ici, il est plus facile de calculer explicitement les dérivées de f, que la fonction f, qui est une primitive !

Remarque 7. Puisqu'il est plus facile de calculer les dérivées de f que la fonction, une autre méthode consiste à utiliser la théorie de l'interpolation d'Hermite, qui généralise celle de Lagrange et qui correspond à des choix de points z_i qui se confondent. Par exemple, on choisit un polynôme de degré $n = 3$ avec les points z_i égaux à x_0, x_0, x_1, x_1. Dans ce cas, on peut utiliser de nouveau les algorithmes et les formules d'erreurs vue en cours. Voir [o1, exercice 2.8]. Les points à considérer sont alors $\{x_0, x_0, x_1, x_1\}$ et les 4 différences divisées valent $\{f(x_0), f'(x_0), f(x_1), f'(x_1)\}$, où f' est donnée par (15). La formule d'erreur (17) est encore valable et donne donc avec $z_0 = z_1 = x_0$ et $z_2 = z_3 = x_1$:

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left|\prod_{i=0}^{n}(\alpha - z_i)\right| = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}|x_0 - \alpha|^2|x_1 - \alpha|^2,$$

soit numériquement, en utilisant le tableau 2 :

$$\eta = 1.260\,10^{-7}.$$

La formule (18) donne alors

$$f(\alpha) \approx 0.853140824405.$$

L'erreur réelle commise est alors égale à

$$\eta = 1.191\,10^{-7}.$$

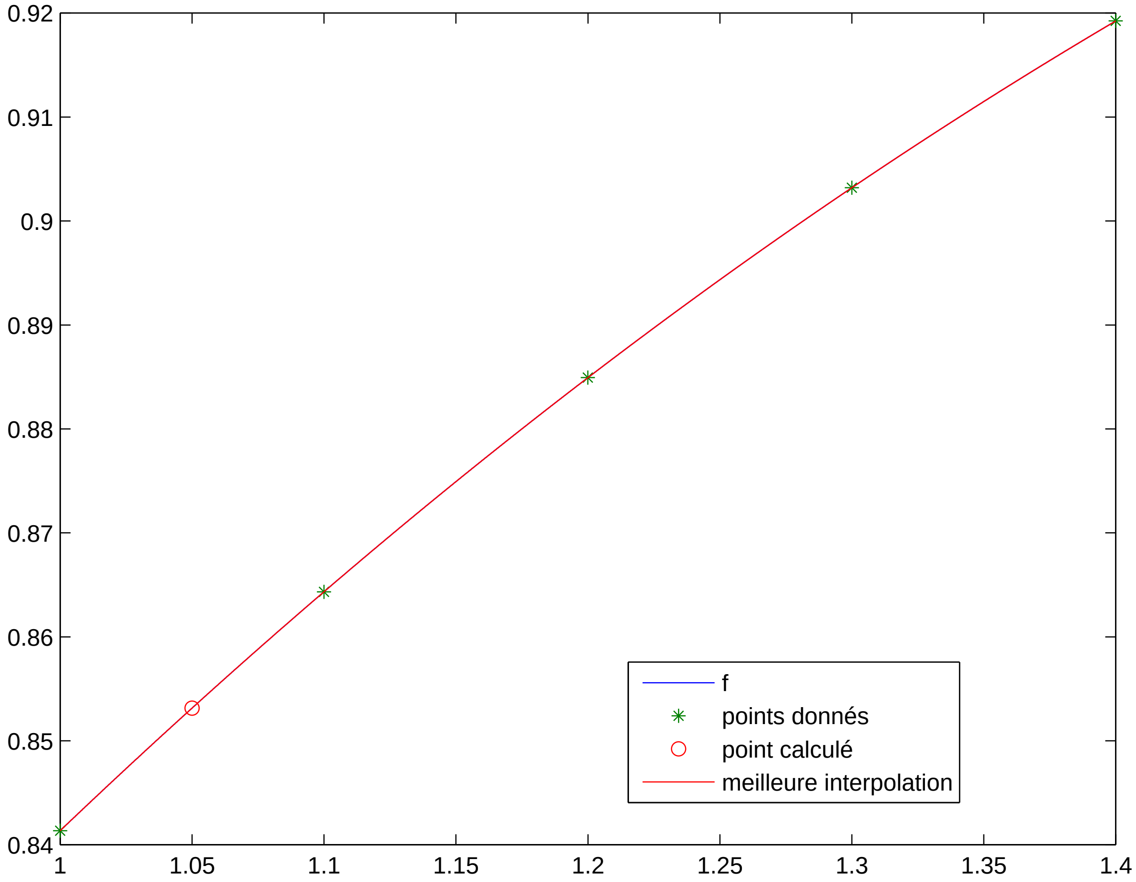


FIGURE 3. Les données et la fonction f.

Remarque 8. En fait, grâce à matlab, il est très facile de calculer la fonction f grâce à la fonction `erf`, qui renvoie la valeur de

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Un petit calcul simple nous montre que

$$f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}.$$

Correction de l'exercice 3.

Montrons que

$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)dt \leq \frac{1}{2}(b-a)\left(f(a)+f(b)\right). \tag{27}$$

D'après le tableau 3.2 du polycopié de cours, on constate que $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et $\frac{1}{2}(b-a)\left(f(a)+f(b)\right)$ sont les approximations de $\int_a^b f(t)dt$ par les méthodes respectives du point milieu et du trapèze, notées I^M et I^T. Ainsi (27) est équivalente à

$$\int_a^b f(t)dt - I^M \geq 0,$$
$$\int_a^b f(t)dt - I^T \leq 0.$$

ce qui signifie, en terme d'erreurs que

$$\mathcal{E}^M \geq 0,$$
$$\mathcal{E}^T \leq 0,$$

soit encore, d'après le tableau 3.2 du polycopié de cours, que

$$\frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta) \geq 0, \tag{28a}$$
$$-\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta) \leq 0. \tag{28b}$$

Par hypothèse, puisque f est convexe, on a $f''(\eta) \geq 0$ et (28) est immédiate.

Remarque 9. Proposons une méthode alternative, plus fondamentale :

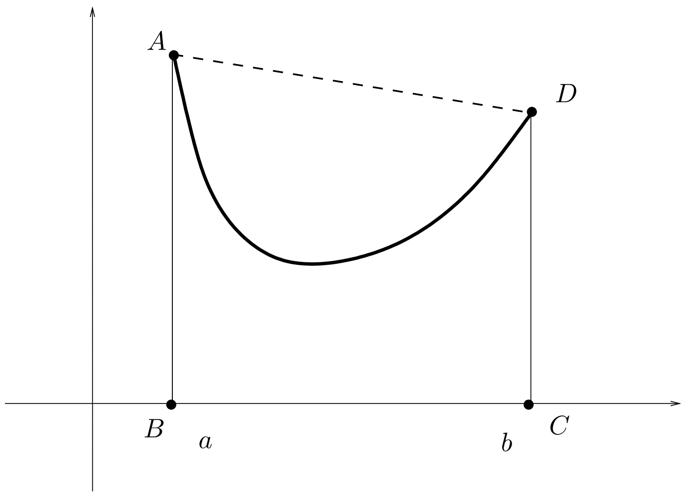


FIGURE 4. Une fonction convexe, sous sa corde.

On rappelle, d'après les résultats classiques de convexité, qu'une fonction convexe est en-dessous de sa corde, entre a et b (voir figure 4), ce qui signifie que pour tout $t \in [a, b]$,

$$f(t) \leq \alpha t + \beta, \tag{29}$$

où $t \mapsto \alpha t+\beta$ est l'équation de la corde, entre a et b, c'est-à-dire, la droite passant par les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Si on intègre (29) pour $t \in [a, b]$, on obtient

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b (\alpha t + \beta)\, dt,$$

et puisque $\int_a^b \alpha t+\beta dt$ est exactement l'aire du trapèze (voir figure 4) $ABCD$, donnée par $\frac{1}{2}(b-a)\,(f(a) + f(b))$, on obtient alors

$$\int_a^b f(t)dt \leq \frac{1}{2}(b-a)\,(f(a) + f(b))\,. \tag{30}$$

De même, on utilise le fait qu'une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes, en particulier celle au point d'abcisse $(a + b)/2$,(voir figure 5) définie par $t \mapsto At + B$ et donc

$$f(t) \geq \mathcal{A}t + \mathcal{B}. \tag{31}$$

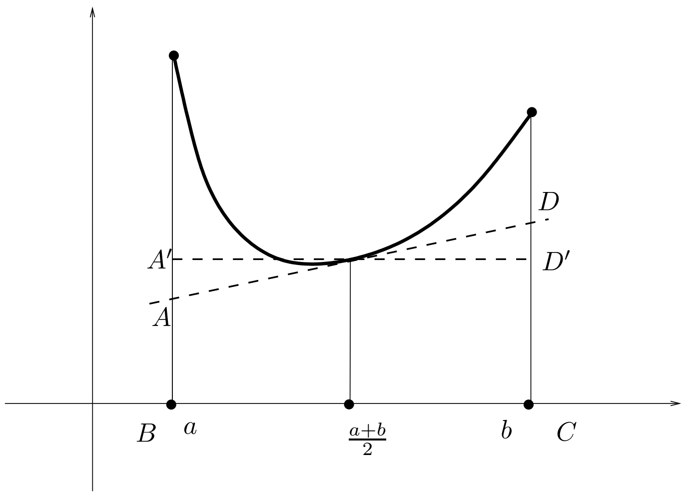


FIGURE 5. Une fonction convexe, au-dessus de sa tangente.

Si on intègre (31) pour $t \in [a,b]$, on obtient

$$\int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b (\mathcal{A}t + \mathcal{B})\,dt.$$

Puisque $\int_a^b At + Bdt$ est exactement l'aire du trapèze (voir figure 5) $ABCD$, qui, par symétrie, est aussi l'aire du rectangle $A'BCD'$, donnée par $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, on obtient alors

$$\int_a^b f(t)dt \geq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right). \tag{32}$$

La conclusion provient de (30) et de (32).

Correction de l'exercice 4.

(1) La fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0, \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0, \end{cases} \tag{33}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et il est clair que, si $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

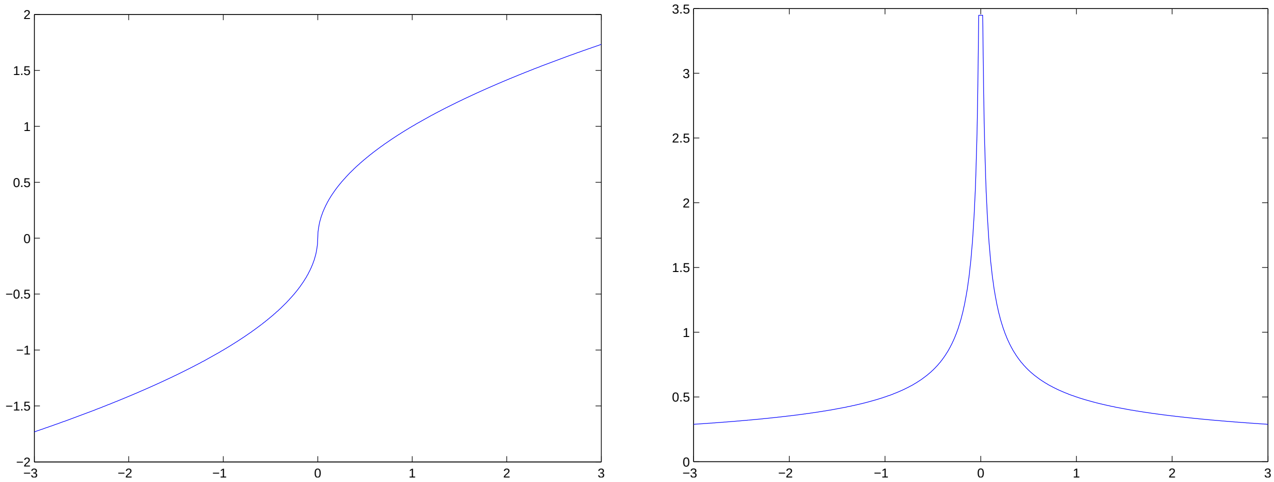
Si $x < 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\left(\sqrt{-x}\right)', \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-x}}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x > 0, \\ \\ \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{34}$$

Il est évident que f est impaire, que $f(0) = 0$ et que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Voir son graphe et celui de sa dérivée sur la figure 6.



(a) f (b) f'

FIGURE 6. Graphes de f et de f'.

(2) (a) (i) À la main, ou en utilisant par exemple la fonction `newton.m` disponible sur le site à l'adresse habituelle, on obtient les valeurs suivantes de u_n pour $u_0 = 1$

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ ....$$

et pour $u_0 = 4$, on obtient

$$4,\ -4,\ 4,\ -4,\ 4,\ -4,\ 4,\ -4,\ 4,\ -4,\ 4,\ -4,\ ....$$

On pourra taper, sous matlab, grâce à la fonction `newton.m` disponible sur le site à l'adresse habituelle, les commandes suivantes

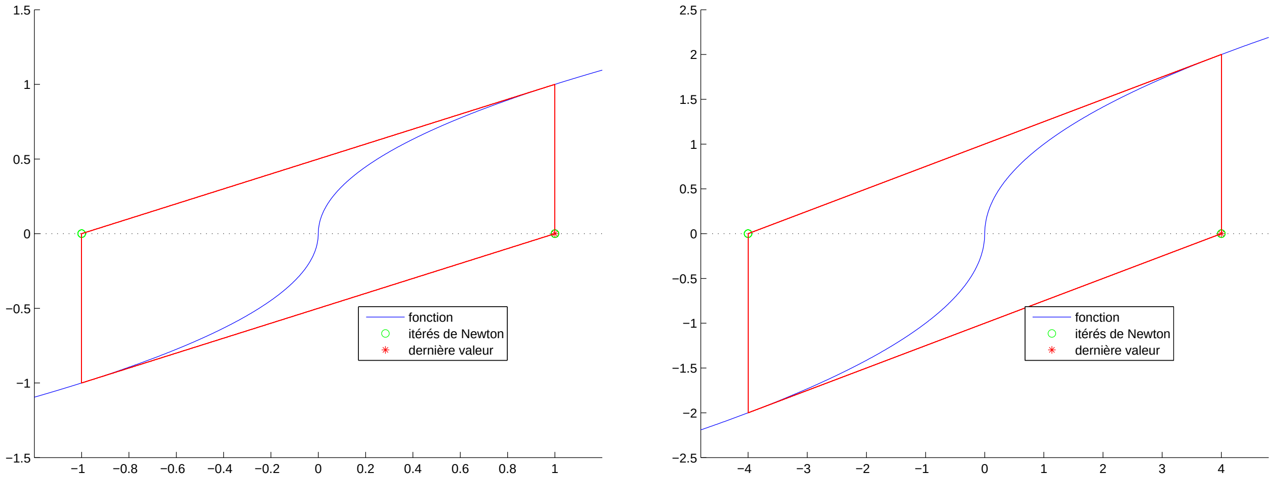
```
fun=@(x)(x>=0).*sqrt(x)-(x<0).*sqrt(-x);
dfun=@(x)(1/2)*((x>=0)./sqrt(x)+(x<0)./sqrt(-x));
[xvecta,xdif,fx,nit]=newton(1,-1,20,fun,dfun,1);
figure;
[xvectb,xdif,fx,nit]=newton(4,-1,20,fun,dfun,1);
disp(xvecta);
disp(xvectb);
```

ce qui donnera les graphiques de la figure 7. On constate que les valeurs sont cycliques avec, pour $x = u_0 \in \{1, 4\}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \begin{cases} x & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -x & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \tag{35}$$

(ii) De façon générale, on note u_n les valeurs de la méthode de Newton définie par $u_0 = x$. Montrons que pour tout $x > 0$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \begin{cases} x & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -x & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \tag{36}$$



(a) $u_0 = 1$ (b) $u_0 = 4$

FIGURE 7. Quelques valeurs de la méthode de Newton

On considère g donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \tag{37}$$

On a, d'après (33)-(34) si $x > 0$,

$$\begin{aligned} g(x) &= x - \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}, \\ &= x - 2\sqrt{x}\sqrt{x}, \\ &= x - 2\left(\sqrt{x}\right)^2, \\ &= x - 2x, \\ &= -x. \end{aligned}$$

On vérifie aussi, en même temps que, si $x < 0$

$$\begin{aligned} g(x) &= x + \frac{\sqrt{-x}}{\frac{1}{2\sqrt{-x}}}, \\ &= x + 2\sqrt{-x}\sqrt{-x}, \\ &= x + 2\left(\sqrt{-x}\right)^2, \\ &= x - 2x, \\ &= -x. \end{aligned}$$

et donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = -x. \tag{38}$$

Puisque la méthode de Newton est définie par $u_{n+1} = g(u_n)$, on a, si $u_0 = x > 0$

$$u_1 = g(u_0) = -u_0 < 0$$

et donc

$$u_2 = g(u_1) = -u_1 = u_0,$$

et par récurrence, on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \begin{cases} x & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -x & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \tag{39}$$

Cela est vrai aussi si $x < 0$. On vérifie aussi que, puisque f n'est pas dérivable en zéro.

$$\text{pour } x = 0, \text{ la méthode de Newton n'est pas définie.} \tag{40}$$

Néanmoins, on peut considérer que g est définie par continuité en zéro, d'après (38), en posant

$$g(0) = 0. \tag{41}$$

On a donc, immédiatement, avec cette convention, si $x = u_0 = 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 0. \tag{42}$$

(iii) Voir question 2(a)ii

(iv) D'après (39), vraie aussi pour $x < 0$,

$$\text{la suite de la méthode de Newton est cyclique et ne converge pas si } u_0 \neq 0. \tag{43}$$

et, en adoptant la convention (41), on a, d'après (42)

$$\text{la suite de la méthode de Newton est constante et converge vers zéro si } u_0 = 0. \tag{44}$$

Remarque 10. Cet exemple est un peu pathologique, pour ne pas dire capilotracté ! Les hypothèses habituellement faites sur la méthode de Newton exigent que f est dérivable en la racine, mieux à dérivée non nulle (voir les propositions du cours 4.54 et 4.62).

(b) Les hypothèses de la méthode du point fixe (voir proposition 4.11 du cours) ne sont pas assurées, puisque f n'est pas dérivable, et sa dérivée sur l'intervalle $[-1, 1] \setminus \{0\}$ n'est pas bornée, puisqu'elle tend vers $+\infty$ quand x tend vers zéro ! La seule méthode qui fonctionne ici est la méthode de la dichotomie. À la main, ou en utilisant par exemple la fonction `bisection.m` disponible sur le site à l'adresse habituelle, et en tapant

```
[xvect,xdif,fx,nit]=bisection(-1,1,0,150,fun)
```

en obtient le zéro exact en une seule itération, ce qui est normal, par symétrie. Si on tape par exemple

```
[xvect,xdif,fx,nit]=bisection(-1,1.1,eps,150,fun)
```

on obtient la valeur suivante $1.033563\,10^{-16}$ en 54 itérations.

(3) (a) Soit f, définie sur $\mathbb{R}$, que l'on suppose nulle en zéro seulement, impaire et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Soit $u_0 > 0$. On a par définition de la méthode de Newton

$$u_1 = u_0 - \frac{f(u_0)}{f'(u_0)}.$$

Ainsi,

$$u_1 = -u_0 \tag{45}$$

est équivalent à

$$2u_0 - \frac{f(u_0)}{f'(u_0)} = 0 \tag{46}$$

Sous cette hypothèse, on a alors, grâce à (45),

$$u_1 \neq 0, \tag{47}$$

on a, par imparité (si f est impaire, sa dérivée est paire)

$$\begin{aligned}
u_2 &= u_1 - \frac{f(u_1)}{f'(u_1)},\\
&= -u_0 - \frac{f(-u_0)}{f'(-u_0)},\\
&= -u_0 + \frac{f(u_0)}{f'(u_0)},\\
&= -u_0 + 2u_0
\end{aligned}$$

et donc

$$u_2 = u_0. \tag{48}$$

(b) On en déduit (35).

(c) On cherche f telle que (46) ait lieu pour tout $u_0 > 0$, ce qui revient à écrire

$$\forall x > 0, \quad \frac{f(x)}{f'(x)} = 2x, \tag{49}$$

ce qui est équivalent, par hypothèse sur f à

$$\forall x > 0, \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2x}. \tag{50}$$

On résout cette équation différentielle de la façon suivante : Considérons l'équation différentielle

$$\forall t \in [\tau, +\infty[, \quad 2ty'(t) - y(t) = 0. \tag{51}$$

On a deux façons de procéder.

(i) Soit, on raisonne comme dans [Bas22, Chapitre "Équations différentielles (ordinaires)", section "Équations différentielles d'ordre un"] disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/coursMFI.pdf`, en écrivant et en supposant y non nul (et par exemple strictement positif)

$$\begin{aligned}
2ty(t)' - y(t) = 0 &\iff \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{2t},\\
&\iff (\ln|y|)' = \left(\frac{1}{2}\ln|t|\right)',\\
&\iff (\ln|y|)' = \left(\ln\sqrt{t}\right)',\\
&\iff \ln(y) = c + \ln\sqrt{t},\\
&\iff y = e^{c+\ln\sqrt{t}},\\
&\iff y = e^c e^{\ln\sqrt{t}},\\
&\iff y = c\sqrt{t}
\end{aligned}$$

où $K = e^c$. On a donc

$$y(t) = c\sqrt{t}. \tag{52}$$

(ii) Soit on applique directement le résultat de [Bas22, Section "Équations différentielles d'ordre 1" de l'annexe "Théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2"] disponible sur `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/MFI/coursMFI.pdf`. On sait, d'après le cours, en notant $a(t) = 2t$ et $b(t) = -1$, que y est solution de (51) ssi

$$y(t) = ce^{-\alpha(t)}$$

où c est un réel et α une primitive de $b/a = -1/(2t)$, soit

$$\alpha(t) = -1/2 \ln |t| = -1/2 \ln t = -\ln \sqrt{t}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} y(t) &= ce^{-\alpha(t)}, \\ &= ce^{\ln \sqrt{t}}, \end{aligned}$$

et donc

$$y(t) = c\sqrt{t}. \tag{53}$$

où c est un réel quelconque.

Finalement, on obtient, en prolongeant f par continuité en zéro, et en utilisant les hypothèses faites sur f :

$$\exists c \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} c\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0, \\ -c\sqrt{-x} & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{54}$$

On retrouve bien, à une constante multiplicative près, la fonction f donné par l'équation (33).

Remarque 11. On réécrit (50) sous la forme

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{2} \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

Si f est dérivable en zéro, on obtient quand x tend vers zéro :

$$\lim_{x \to 0} \quad f'(x) = \frac{1}{2} f'(0),$$

et d'après le théorème de la limite de la dérivée, on a donc (dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$)

$$f'(0) = \frac{1}{2} f'(0),$$

ce qui implique que, soit $f'(0) = 0$ soit $f'(0) = +\infty$, ce qui est le cas pour a fonction f donné par l'équation (33).

Remarque 12. Si on se passe de l'hypothèse d'imparité faite sur f, on laisse au lecteur le soin de vérifier que l'on obtient l'équation différentielle, dite non résolue, beaucoup plus difficile (probablement impossible) à résoudre

$$\forall x > 0, \quad \frac{f(x)}{f'(x)} + \frac{f\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f'\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)} = 0. \tag{55}$$

Correction de l'exercice 5.
En posant $\xi_0 = 0.2$ et

$$f(t, y) = \sin(t) + t^2 y^2, \tag{56}$$

l'équation différentielle

$$\forall t \in [0, T], \quad y'(t) = \sin(t) + t^2 y(t)^2, \tag{57a}$$

$$y(0) = 0.2, \tag{57b}$$

est équivalente à

$$\forall t \in [0, T], \quad y'(t) = f(t, y(t)), \tag{58a}$$

$$y(0) = \xi_0. \tag{58b}$$

On calcule pour $n \in \{1, 2, 3\}$, les approximations $y_n \approx y(t_n)$.

n	y_n
0	0.20000000
1	0.20000000
2	0.31054638
3	0.53095692

TABLE 3. Solutions approchées avec Euler explicite

n	y_n
0	0.20000000
1	0.25527319
2	0.42403748
3	0.75256085

TABLE 4. Solutions approchées avec RK2

Les résultats sont donnés dans les tableaux 3 et 4 obtenus en utilisant les définitions 5.13 du polycopié de cours et 5.18 du polycopié de cours.

Références

[Bas22] J. BASTIEN. *Mathématiques Fondamentales pour l'Informatique.* Notes de cours de l'UV MFI (Département Informatique) de Polytech Lyon, disponible sur le web : `http://utbmjb.chez-alice.fr/Polytech/index.html`. 2022. 270 pages.

[o1] J. BASTIEN et J.-N. MARTIN. *Introduction à l'analyse numérique. Applications sous Matlab.* Ouvrage disponible à la bibliothèque Sciences de Lyon 1 (cote : 519.4 BAS, 4e étage). Voir `https://www.dunod.com/sciences-techniques/introduction-analyse-numerique-applications-sous-matlab`. Paris : Dunod, 2003. 392 pages.