Matériaux 3A MNBmater — Automne 2023

Corrigé de l'examen CC du 22 Novembre 2023

Correction de l'exercice 1.

(1)

Rappelons que pour $n = 1$, l'interpolation polynômiale est un problème déjà bien connu, qui se traite de façon élémentaire de la façon suivante :

- Si $x_A = x_B$, la droite est "verticale" d'équation
$$x = x_A. \tag{1}$$
- Si $x_A \neq x_B$, on est exactement dans le cadre du début de la section 2.2.1 page 12 du cours en posant
$$x_0 = x_A \text{ et } x_1 = x_B, \tag{2a}$$
$$y_0 = y_A \text{ et } y_1 = y_A. \tag{2b}$$
La droite est d'équation $Y = \alpha X + \beta$ et les égalités traduisant que la droite passe par A et B sont
$$\alpha x_A + \beta = y_A, \tag{3a}$$
$$\alpha x_B + \beta = y_B, \tag{3b}$$
système linéaire qui se résoud aisément et fournit, par différence des deux équations,
$$\alpha(x_A - x_B) = y_A - y_B,$$
et donc
$$\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A},$$
et si on réutilise l'équation (3a) on obtient
$$\beta = y_A - x_A \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$
L'équation de la droite est donc
$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x + y_A - x_A \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}. \tag{4}$$
soit
$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + y_A, \tag{5}$$
que l'on pourra écrire sous la forme suivante :
$$\frac{y - y_a}{x - x_a} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \tag{6}$$
qui traduit que le taux d'accroissement entre x et x_a est égal au d'accroissement entre x_b et x_a.

Si on utilise la théorie de l'interpolation polynômiale, dans le cas où $x_A \neq x_B$, avec les différentes méthodes vues dans le cours, on raisonne comme suit :

(a) Si on utilise la méthode de la section 2.2.2.1 du polycopié de cours, l'équation de la droite est donnée par
$$y = \alpha x + \beta$$
où, d'après l'équation (2.8) du polycopié de cours
$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_A & x_B \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_A \\ y_B \end{pmatrix}.$$
On a aisément
$$\begin{pmatrix} 1 & x_A \\ 1 & x_B \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{x_B - x_A} \begin{pmatrix} x_B & -1 \\ -xA & 1 \end{pmatrix}$$
et donc
$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{x_B - x_A} \begin{pmatrix} x_B & -1 \\ -xA & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_A \\ y_B \end{pmatrix} = \frac{1}{x_B - x_A} \begin{pmatrix} x_B y_A - x_A y_B \\ y_B - yA \end{pmatrix},$$
et donc l'équation de la droite est
$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x + \frac{x_B y_A - x_A y_B}{x_B - x_A}, \tag{7}$$
ce qui est bien l'équation (4) équivalente à l'équation (5). Cette méthode est en fait exactement ce qui a été fait au début du point 1.

(b) Si on utilise la méthode de la section 2.2.2.2 du polycopié de cours, on utilise l'expression des polynômes de Lagranges l_0 et l_1 donnés par les équations (2.17b) du polycopié de cours et (2.17c) du polycopié de cours, puis l'équation (2.19) du polycopié de cours qui donne
$$y = y_A l_0(x) + y_B l_1(x)$$
ce qui donne encore
$$y = y_A \frac{x - x_B}{x_A - x_B} + y_B \frac{x - x_A}{x_B - x_A},$$
ce qui bien équivalent à l'équation (7) et donc à l'équation (5).

(c) Enfin, si on utilise la méthode de la section 2.2.2.3 du polycopié de cours, d'après les calculs de l'exemple 2.15 du polycopié de cours, on a
$$y = y_A + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A), \tag{8}$$
ce qui bien équivalent à l'équation (5).

(d) Une méthode originale a été proposée par Monsieur Mehdi Rosine à l'automne 2023 : Il s'agit de remarquer que la droite en question passe par le point $(x_A, f(x_A))$ et a pour coefficient directeur le taux d'acroissement de f entre x_A et x_B (qui n'est autre que la différence divisée $f[x_A, x_B] = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$). Si $y = g(x)$ désigne l'équation de la droite, on a donc
$$\begin{aligned} g(x_A) &= y_A, \\ g'(x_A) &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \end{aligned}$$
et la formule de Taylor appliquée à g donne, entre x et x_A, puisque $g'' = 0$:
$$\begin{aligned} y &= g(x), \\ &= g(x_A) + g'(x_A)(x - x_A) + \frac{1}{2} g''(\xi)(x - x_A), \\ &= y_A + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A), \end{aligned}$$

et on retrouve donc bien l'équation (5).

(2)

On est de nouveau dans le cas de l'interpolation polynômiale, cette fois-ci avec $n = 2$ et trois points d'interpolation.

$x_i \setminus k$	0	1	2
$x_0 = x_A$	y_A		
		$\boxed{\dfrac{y_B - x_A}{x_B - x_A}}$	
$x_1 = x_B$	y_B		$\boxed{\dfrac{\frac{y_C - x_B}{x_C - x_B} - \frac{y_B - x_A}{x_B - x_A}}{x_C - x_A}}$
		$\dfrac{y_C - x_B}{x_C - x_B}$	
$x_2 = x_C$	y_C		

TABLE 1. Différences divisées de p.

Pour calculer le polynôme sous la forme de Newton, on détermine tout d'abord les différences divisées $p[x_i, ..., x_{i+k}]$ données dans le tableau 1. On a noté $x_0 = x_A$, $x_1 = x_B$, $x_2 = x_C$, $y_0 = y_A$, $y_1 = y_B$, $y_2 = y_C$. Ensuite, on n'utilise plus que les différences divisées qui sont encadrées et le polynôme interpolateur est donné par la formule :

$$\Pi_2(p)(x) = \sum_{i=0}^{n} p[x_0, ..., x_i](x - x_0)...(x - x_{i-1}). \tag{9}$$

Ici, on a donc :

$$\Pi_2(p)(x) = p[x_0] + p[x_0, x_1](x - x_0) + p[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1). \tag{10}$$

On peut soit refaire la totalité du tableau 1, soit plus rapidement, se rappeler qu'il a déjà été constitué pour la détermination de $\Pi_1(p)$ et utiliser (10) sous la forme

$$\Pi_2(p)(x) = \Pi_1(p)(x) + p[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

On utilise alors l'équation (5) ou (8), dont on déduit l'équation de la parabole recherchée

$$y = y_A + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + \frac{\frac{y_C - x_B}{x_C - x_B} - \frac{y_B - x_A}{x_B - x_A}}{x_C - x_A}(x - x_A)(x - x_B), \tag{11}$$

expression que l'on pourrait essayer de simplifier, mais sans intérêt sur le plan numérique !

Correction de l'exercice 2.

(1) (a) En utilisant le tableau 3.2 du polycopié de cours, on détermine la valeur approchée avec la méthode élémentaire de Simpson :

$$I^S = 1/3 + 1/3 \cos(2/5) + 4/3 \cos(1/10) \tag{12}$$

soit

$$I^S = 1.96702588503833. \tag{13}$$

(b) On note
$$a = 0, \quad b = 2. \tag{14}$$
Le tableau 3.3 du polycopié de cours fournit l'expression de l'erreur commise avec la méthode élémentaire de Simpson :
$$\mathcal{E}^S = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta), \tag{15}$$
où η appartient à $]a,b[$. On vérifie que f est bien de classe $\mathcal{C}^4$. On majore la valeur absolue de $f^{(4)}(\eta)$, par le maximum de la valeur absolue de la dérivée correspondant et la majoration de l'erreur commise est donc donnée par
$$\mathcal{E}^S \leq \frac{(b-a)^5}{2880} M_4 \tag{16}$$
Grâce à (14) et et aux valeurs de l'énoncé (3), on déduit donc la majoration de l'erreur commise suivante :
$$\mathcal{E}^S \leq 0.0013333333. \tag{17}$$

(c) L'erreur réelle commise est égale à
$$\left|I^S - I\right| = |1.9682361637328 - 1.9670258850383| = 0.0012102786945$$
qui est inférieure à celle donnée par (17).

(2) (a) En utilisant le tableau 3.4 du polycopié de cours, on détermine la valeur approchée avec la méthode composite de Simpson avec $N = 2$:
$$I_2^S = 1/6 + 1/6\,\cos(2/5) + 1/3\,\cos(1/10) + 2/3\,\cos(1/40) + 2/3\,\cos\left(\frac{9}{40}\right) \tag{18}$$
soit
$$I_2^S = 1.96816596965625. \tag{19}$$

(b) On note maintenant
$$A = 0, \quad B = 2. \tag{20}$$
Le tableau 3.5 du polycopié de cours fournit l'expression de l'erreur commise avec la méthode composite de Simpson :
$$\mathcal{E}_2^S = -h^4 \frac{B-A}{2880} f^{(4)}(\eta), \tag{21}$$
où η appartient à $[A,B]$ et
$$h = \frac{B-A}{N}, \tag{22}$$
soit
$$h = \frac{(2)-(0)}{2},$$
et donc
$$h = 1. \tag{23}$$
On peut donc écrire
$$\left|\mathcal{E}_2^S\right| \leq h^4 \frac{B-A}{2880} M_4. \tag{24}$$
En utilisant de nouveau les valeurs de l'énoncé (3), on déduit donc la majoration de l'erreur commise suivante :
$$\mathcal{E}_2^S \leq 8.333332\,10^{-5}. \tag{25}$$

(c) L'erreur réelle commise est égale à
$$\left|I_2^S - I\right| = |1.9682361637328 - 1.9681659696563| = 7.019408\,10^{-5}$$
qui est inférieure à celle donnée par (25).

(3) Pour que

$$\left|\mathcal{E}_2^S\right| \leq \varepsilon,$$

il suffit, d'après (24) que l'on ait :

$$h^4 \frac{B-A}{2880} M_4 \leq \varepsilon,$$

soit, d'après (22),

$$\left(\frac{B-A}{N}\right)^4 \frac{B-A}{2880} M_4 \leq \varepsilon,$$

soit encore

$$\frac{(B-A)^5}{2880\varepsilon} M_4 \leq N^4,$$

et donc

$$N \geq \sqrt[4]{\frac{M_4 (B-A)^5}{2880\varepsilon}}.$$

Il suffit donc de prendre

$$N = \left\lceil \sqrt[4]{\frac{M_4 (B-A)^5}{2880\varepsilon}} \right\rceil. \tag{26}$$

où pour tout réel X,

$$\lceil X \rceil \text{ est le plus petit entier supérieur ou égal à } X.$$

Numériquement, on a donc en utilisant de nouveau les valeurs de l'énoncé (3),

$$N = 340. \tag{27}$$

Remarque 1. Avec cette valeur de N, on a

$$\mathcal{E}_{340}^S = 1.968236163732763,$$

et l'erreur réelle

$$\left|\mathcal{E}_{340}^S - I\right| = 8.1268325\,10^{-14},$$

quantité qui est inférieure à ε donné par l'équation (5) de l'énoncé.