5 : Résolution numérique des problèmes d'évolution. Exemple de la chaleur

I) Introduction

On considère $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $T \in \mathbb{R}_+^*$ et on étudie l'équilibre thermique dans Ω, phénomène caractérisé par :

f : source de chaleur : $[0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$

σ : caractéristique calorifique du milieu constante

On se donne une condition initiale : $\forall x \in \Omega \quad u(x,0) = u^0(x)$

des condition au bord $\partial\Omega$ de Ω de type Dirichlet, Neumann ou Fourier.

Enfin l'équation de la chaleur est $\forall (t,x) \in [0,T] \times \Omega$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sigma \, \Delta u = f \qquad (1)$$

Par un changement d'échelle temporelle on peut ramener σ à $\sigma = 1$.

Par la suite, on se placera en monodimensionnel.

ainsi on se donne T, $\Omega \subset \mathbb{R}$ (ouvert), $u^0 : \Omega \to \mathbb{R}$,

on cherche $u : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ /

$$\forall (t,x) \in \,]0,T[\times\Omega \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \qquad (1)$$

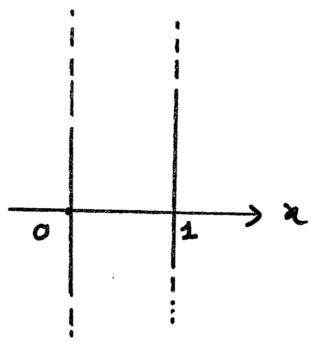
$$\forall x \in \Omega \qquad u(x,0) = u^0(x) \qquad (2)$$

$$\forall t \in \,]0,T[\,, \forall x \in \partial\Omega \qquad u(x,t) = 0 \qquad (3)$$

Par toute la suite on suppose $\Omega = \,]0,1[$. ainsi il nous faut résoudre

$$\begin{cases} \forall (x,t) \in \,]0,1[\times]0,T[& \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \qquad (4) \\ \forall x \in \,]0,1[& u(x,0) = u^0(x) \qquad (5) \\ \forall t \in \,]0,T[& u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad (6) \end{cases}$$

Remarquons que ce problème modélise la thermique dans un mur infini :



II) Etude théorique

Cherchons une expression analytique de la solution de (4) - (5) - (6), en supposant, par simplifier, CAR IL FAUT TOUJOURS SIMPLIFIER, que $f \equiv 0$

1) Solution particulière : séparation des variables

on cherche u sous la forme $u(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$

(On pourra constater dans Brezis que φ est un mode propre de l'opérateur $-\Delta$

ainsi $\forall (t,x)$ $\quad \psi'\varphi - \varphi''\psi = 0$

d'où $\quad \dfrac{\varphi''}{\varphi} = \dfrac{\psi'}{\psi}$ $\quad$ or $\dfrac{\varphi''}{\varphi}$ ne dépend que de x

$\dfrac{\psi'}{\psi}$ " " " t d'où

ainsi $\exists \lambda \in \mathbb{R} \,/\, \forall (t,x)$ $\quad \dfrac{\varphi''}{\varphi} = \dfrac{\psi'}{\psi} = -\lambda$

en particulier, compte tenu de 6, en supposant $\psi \not\equiv 0$, on a :

$\forall x \in \,]0,1[\qquad \varphi'' + \lambda\varphi = 0$

$\varphi(0) = \varphi(1) = 0$

Si $\lambda = 0$ $\qquad \varphi'' = 0$ d'où $\varphi = 0$ $\qquad (\varphi(0) = \varphi(1) = 0)$

Si $\lambda < 0$ $\qquad \varphi = Ae^{\sqrt{-\lambda}\,x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}\,x}$; or $\varphi(0) = \varphi(1) = 0 \Rightarrow A = B = 0$

on cherche φ non nul d'où nécessairement $\lambda > 0$ et ainsi :

$\lambda = \omega^2 > 0$ d'où $\quad \varphi = A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$

compte tenu de $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ $\quad B = 0$ et $\quad A\sin(\omega) = 0$

on cherche φ non nul d'où $A \neq 0$ et $\quad \omega = k\pi$ $\quad$ où $k \in \mathbb{N}^*$

Bref $\qquad \varphi(x) = A\sin(k\pi x)$ $\qquad$ où $k \in \mathbb{N}^*$. On choisit $A = 1$

Quant à φ, φ étant normal on a :

$$\forall t \in]0,T[\qquad \varphi' + \lambda \varphi = 0$$

$$\text{ainsi} \quad \varphi(t) = \mu e^{-\lambda t} \qquad \text{où } \mu \in \mathbb{R}$$
$$= \mu e^{-k^2\pi^2 t} \qquad \text{. on choisit } \mu = 1.$$

ainsi $\boxed{u(x,t) = e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x)}$ où $k \in \mathbb{N}^*$ (7)

dans ce cas $\qquad u(x,0) = \sin(k\pi x) = u^0(x) \qquad$ (8)

2.) Expression formelle de la solution

Si on a $u^0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\pi x)$, par analogie avec ce qui vient d'être écrit en (8) et par le principe de superposition :

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x)$$

3.) Un résultat théorique d'existence

On admet l'unicité de la solution de (4)–(5)–(6) (avec $f=0$).

Théorème 1 on suppose $u^0 \in L^2(]0,1[)$. Alors pour $m \in \mathbb{N}^*$, il existe

$$c_m = 2\int_0^1 u^0(y) \sin(m\pi y)\, dy \qquad (9)$$

on a $\sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 < +\infty$

on pose pour $m \in \mathbb{N}^*$ $x \in]0,1[$ $t \in]0,T[$

$$\theta_m(x,t) = e^{-m^2\pi^2 t} \sin(m\pi x) \qquad (10)$$

alors la fonction $\theta : [0,1] \times \quad \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,t) \longmapsto \theta(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \theta_m(x,t) \qquad (11)$$

est définie, est $\mathcal{C}^\infty([0,1] \times \mathbb{R}_+^*)$ et vérifie (4)-(5)-(6) (avec $f \equiv 0$)

Démonstration

- l'existence de c_m vient du fait que $u^0 \in L^2(0,1)$, $\sin(m\pi .) \in L^2(0,1)$.

  on raisonne ensuite comme avec les séries de Fourier....

- on a pour tout $t > 0$ (dans $\mathbb{R}_+$)

$$\sum_{m=1}^{\infty} |c_m \theta_m(x,t)| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |c_m| e^{-m^2\pi^2 t}$$
$$\leq \left(\sum_{m=1}^{\infty} |c_m|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} e^{-2m^2\pi^2 t}\right)^{1/2} \quad \text{(CBS)}$$
$$< +\infty$$

car la série $\sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2\alpha t}$ converge $(\alpha = 2\pi^2 t)$ et la fonction

θ est donc définie sur $[0,1] \times \mathbb{R}_+^*$

(ainsi que sur $[0,1] \times \{0\}$ où elle est égale à u_0)

Plus précisément, on peut écrire

$\forall \quad (M, x, t) \in \mathbb{N}^* \times [0,1] \times \mathbb{R}_+^*$

$$\sum_{m=M}^{\infty} |c_m \Theta_m(x,t)| \leq \left(\sum_{m=M}^{\infty} |c_m|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{m=M}^{\infty} e^{-2m^2\pi^2 t}\right)^{1/2}$$

Prenons $t \geq \alpha > 0$

$$\leq \left(\sum_{m=M}^{\infty} |c_m|^2\right)^{1/2} \underbrace{\left(\sum_{m=1}^{\infty} e^{-2m^2\pi^2\alpha}\right)^{1/2}}_{= K \in \mathbb{R}_+}$$

D'où $\forall M \in \mathbb{N}^* \quad \left\| \sum_{m=M}^{\infty} c_m \Theta_m \right\|_{L^\infty([0,1]\times[\alpha;+\infty[)} \leq K \left(\sum_{m=M}^{\infty} |c_m|^2\right)^{1/2}$

ainsi il y a convergence uniforme sur $[0,1] \times [\alpha;+\infty[$ de $\sum_{m=1}^{M} c_m \Theta_m$ vers Θ,

qui est continue sur $[0,1] \times [\alpha, +\infty[$, ce l'appliquant $\forall \alpha > 0$ d'où

$$\Theta \in \mathcal{C}^0([0,1] \times \mathbb{R}_+^*)$$

De même, on montrerait que les deux séries $(p \in \mathbb{N}^*)$

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m (-1)^p (m\pi)^{2p} e^{-m^2\pi^2 t} \sin(m\pi x)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m (-1)^p (m\pi)^{2p+1} e^{-m^2\pi^2 t} \cos(m\pi x)$$

convergent uniformément sur $[0,1] \times [\alpha;+\infty[$ $(\alpha > 0)$ et définissent

$\dfrac{\partial^{2p}\Theta}{\partial x^{2p}}$ et $\dfrac{\partial^{2p+1}\Theta}{\partial x^{2p+1}}$.

De même pour la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m (-m^2\pi^2)^p e^{-m^2\pi^2 t} \sin(m\pi x) \quad \text{converge et}$$

définit $\dfrac{\partial^p \Theta}{\partial t^p}$.

De même ces trois séries sont continues. ainsi

Θ est dérivable infiniment par rapport à x et t sur $[0,1] \times \mathbb{R}_+^*$ d'où

$$\Theta \in \mathcal{C}^\infty([0,1] \times \mathbb{R}_+^*).$$

- enfin on a

$$\forall x \in]0,1[\quad \theta(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin(m\pi x) = u^0(x)$$

(cf Fourier ... , p.p. sur $]0,1[$)

$$\forall t \in]0,T[\quad \theta(0,t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m\, e^{-m^2\pi^2 t} \sin(m\pi 0) = 0$$

de même $\theta(1,t) = 0$

Enfin, d'après ce qui précède, on peut dériver terme à terme et :

$\forall \quad (x,t) \in]0,1[\times]0,T[$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \left(\frac{\partial \theta_m}{\partial t} - \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial x^2} \right) = 0$$ par le choix de θ_m.

θ vérifie bien (4)-(5)-(6).

III) Schémas numériques

On cherche à discrétiser (4)-(5)-(6), où $u(0,t) = \alpha(t)$ $u(1,t) = \beta(t)$; comme en différences finies,

on considère N : nombre d'inconnues en temps

$\delta t = T/N$

P : nombre d'inconnues en espace

$\delta x = 1/P+1$

Pour $(i,n) \in [0,P+1] \times [0,N]$ on pose $x_i = i\,\delta x$

$t_n = n\,\delta t$ et on a le maillage

discret de $[0,1] \times [0,T]$: $(x_i, t_n)_{0 \le i \le P+1,\ 1 \le n \le N}$

pour $(i,n) \in [0,p+1] \times [1,N]$ on pose $\boxed{u_i^n = u(x_i, t_n)}$ (12)

on va chercher $(y_i^n)_{(i,n) \in [1,p] \times [1,N]}$ de telle sorte que

$$\max_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le n \le N}} |y_i^n - u_i^n| \xrightarrow[(\delta t, \delta x) \to (0,0)]{} 0$$

1) Semi discrétisation en espace

On veut résoudre

$$\begin{cases} \forall (x,t) \in]0,1[\times]0,T[& \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f & (4) \\ \forall x \in]0,1[& u(x,0) = u_0(x) & (5) \\ \forall t \in]0,T[& u(0,t) = \alpha(t) \quad u(1,t) = \beta(t) & (6) \end{cases}$$

On commence par discrétiser en espace avec un schéma aux différences finies

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t) \approx \frac{1}{\delta x^2}\left(2u_i(t) - u_{i-1}(t) - u_{i+1}(t)\right)$$

où $\boxed{\forall i \in [0, p+1] \qquad \forall t \in [0,T] \quad u_i(t) = u(x_i, t)}$ (13)

ainsi (4) s'écrit :

$(i=1)$ $\quad u_1'(t) + \dfrac{1}{\delta x^2}\left(-u_0(t) + 2u_1(t) - u_2(t)\right) = f(x_1, t)$

$2 \le i \le p-1$ $\quad u_i'(t) + \dfrac{1}{\delta x^2}\left(-u_{i-1}(t) + 2u_i(t) - u_{i+1}(t)\right) = f(x_i, t)$

$i = p$ $\quad u_p'(t) + \dfrac{1}{\delta x^2}\left(-u_{p-1}(t) + 2u_p(t) - u_{p+1}(t)\right) = f(x_p, t)$

Compte tenu de (6) $\quad u_{p+1}(t) = u(x_{p+1}, t) = u(1,t) = \beta(t)$

$u_0(t) = \alpha(t)$

Enfin les conditions initiales s'écrivent :

$\forall i \in [1,p] \qquad u_i(0) = u^0(x_i)$

ainsi il nous faut Résoudre :

$U : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^p$

$$\boxed{\begin{aligned} &U'(t) + A_{\delta x} U(t) = F(t) \qquad (14)\\ &U(0) = U_0 \qquad (15)\end{aligned}}$$

où $U = {}^t(u_1(t) \text{---} u_p(t))$ (16)

$F(t) = {}^t\left(f(x_1,t) + \frac{1}{\delta x^2}\alpha(t);\ f(x_2,t);\ \ldots;\ f(x_{p-1},t);\ f(x_p,t) + \frac{1}{\delta x^2}\beta(t)\right)$ (17)

$$A_{\delta x} = \frac{1}{\delta x^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (18)$$

$U_0 = {}^t(u^0(x_1) \text{---} u^0(x_p))$ (19)

On est donc en présence d'une équation différentielle ordinaire du type :

$U'(t) = G(t, U(t))$ avec $\forall (t,U) \in [0,T] \times \mathbb{R}^p \quad G(t,U) = F(t) - A_{\delta x} U$ (20)

$U(0) = U_0$

Rappelons deux petites choses sur la résolution numérique d'un tel système.

2) Rappels sur la résolution numérique d'une edo

α) θ méthode

Pour $\theta \in [0,1]$, on peut résoudre (20) par le schéma :

on cherche $(U^n)_{0 \leq n \leq N} \in (\mathbb{R}^p)^{N+1}$ /

$$U^0 = U_0 \qquad (21)$$

$$\forall n \in [0, N-1] \quad \frac{U^{n+1} - U^n}{\delta t} = \theta G(t_{n+1}, U^{n+1}) + (1-\theta) G(t_n, U^n) \qquad (22)$$

Si $\theta = 0$ méthode d'Euler explicite

Si $\theta = 1$ Euler implicite

Si $\theta = 1/2$ méthode du trapèze

On admet que si $\theta \in]0,1]$, et δt assez petit, U^{n+1} est défini de façon unique (en supposant, par exemple, G Lipschitzien)

β) stabilité d'un schéma

On rappelle que le schéma numérique

$U^{n+1} = U^n + \delta t\, \phi(t_n, U^n, \delta t)$ est stable ssi $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tel que

pour toute suite $(Y^n)_{0 \leq n \leq N} \in (\mathbb{R}^p)^{N+1}$, $(Z^n)_{0 \leq n \leq N} \in (\mathbb{R}^p)^{N+1}$,

$(\varepsilon^n)_{0 \leq n \leq N-1} \in (\mathbb{R}^p)^{N+1}$ telle que

$$\forall n \in [0, N-1] \quad Y^{n+1} = Y^n + \delta t\, \phi(t_n, Y^n, \delta t)$$

$$Z^{n+1} = Z^n + \delta t\, \phi(t_n, Z^n, \delta t) + \varepsilon^n$$

Alors

$$\max_{0 \le n \le N} \| Y^n - Z^n \| \le M \left(\| Y^0 - Z^0 \| + \sum_{n=0}^{N-1} \| \varepsilon^n \| \right) \quad (23)$$

$\mathcal{L}$ ici $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^p$ égale à $\|.\|_\infty$

(Ne pas oublier que p est amené à grandir)

<u>Propriété 2</u> Si le schéma numérique s'écrit :

$\forall n \in [0 ; N-1] \qquad U^{n+1} = C U^n + D$

où $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $D \in \mathbb{R}^p$.

Si C est diagonalisable et $\rho(C) \le 1$ alors le schéma est stable

<u>démonstration</u>

on a, avec les notations précédentes :

$$Y^n = C Y^{n-1} + D$$
$$Z^n = C Z^{n-1} + D + \varepsilon^n$$

d'où $\quad Y^n - Z^n = C(Y^{n-1} - Z^{n-1}) - \varepsilon^n$

$$C(Y^{n-1} - Z^{n-1}) = C^2(Y^{n-2} - Z^{n-2}) - C\varepsilon^{n-1}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$C^{n-1}(Y^1 - Z^1) = C^n(Y^0 - Z^0) - C^{n-1}\varepsilon^0$$

en sommant $\quad Y^n - Z^n = C^n(Y^0 - Z^0) - (\varepsilon^n + C\varepsilon^{n-1} + \dots + C^{n-1}\varepsilon^0)$

or $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad C^n = (PDP^{-1})^n$ où D diagonale

$$= PD^nP^{-1}$$

d'où $\quad |||C^n||| \leq |||PD^nP^{-1}|||$ (norme subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$)

$$\leq |||P|||\ |||P^{-1}|||\ \underbrace{|||D|||^n}_{\leq 1} \quad \text{car } \rho(C) \leq 1.$$

$\leq M$, indépendant de n d'où

$$\|Y^n - Z^n\| \leq \|C^n(Y^0 - Z^0)\| + \|\varepsilon^n + C\varepsilon^{n-1} + \dots + C^{n-1}\varepsilon^0\|$$

$$\leq |||C^n|||\ \|Y^0 - Z^0\| + \|\varepsilon^n\| + |||C|||\ \|\varepsilon^{n-1}\| + \dots + |||C^{n-1}|||\ \|\varepsilon^0\|$$

$$\leq M\left(\|Y^0 - Z^0\| + \sum_{q=0}^{n} \|\varepsilon^q\|\right)$$

$$\leq M\left(\|Y^0 - Z^0\| + \sum_{n=0}^{N-1} \|\varepsilon^n\|\right) \qquad \square$$

δ) application à l'edo

On applique cela pour discrétiser l'edo (14) (ou (20)).

on cherche $(Y^n)_{0 \leq n \leq N} \in (\mathbb{R}^P)^{N+1}$ /

$$Y^0 = U_0$$

$\forall n \in [0, N-1]$

$$\frac{Y^{n+1} - Y^n}{\delta t} = \theta(F^{n+1} - A_{\delta x}Y^{n+1}) + (1-\theta)(F^n - A_{\delta x}Y^n) \quad (24)$$

Ce schéma est donc équivalent à :

$$(I + \theta\delta t A_{\delta x})Y^{n+1} = (I - \delta t(1-\theta)A_{\delta x})Y^n + \theta F^{n+1} + (1-\theta)F^n \quad (25)$$

Pour $\theta = 1/2$ on a le schéma de Crank-Nicholson :

$$\left(I + \frac{1}{2}\delta t . A_{\delta x}\right) Y^{n+1} = \left(I - \frac{1}{2}\delta t \, A_{\delta x}\right) Y^{n} + \delta t \, F^{n+1/2}$$

où $F^{n+1/2} = \frac{1}{2}\left(F^{n} + F^{n+1}\right)$

ainsi à chaque itération en temps, on calcule Y^{n+1}

en inversant $I + \theta \delta t A_{\delta x}$ (une bonne fois pour toute).

on est donc en mesure de calculer $(Y_i^n)_{\substack{1 \le n \le N \\ 1 \le i \le p}}$, les valeurs

approchées de u_i^n.

(en effet $\forall n \in [1, N]$ $Y_i^n \sim Y^n(x_i) \sim u(x_i, t_n)$)

Montrons le résultat de convergence $\max_{i,n} |Y_i^n - u_i^n| \xrightarrow[\delta t, \delta x \to 0]{} 0$

3) Convergence du schéma

Compte tenu des CI, conditions aux bords, de l'expression de $A_{\delta x}$, F^n, (24) se récrit :

On cherche $(Y_i^n)_{\substack{0 \le n \le N \\ 0 \le i \le p+1}}$ tel que :

$$\forall i \in [1, p] \qquad Y_i^0 = u^0(x_i) \tag{26}$$

$$Y_0^0 = \alpha(0) \qquad Y_{p+1}^0 = \beta(0) \tag{27}$$

$\forall n \in [0; N-1]$, $\forall i \in [1, p]$

$$\frac{Y_i^{n+1} - Y_i^n}{\delta t} = \theta F_i^{n+1} + (1-\theta) F_i^n - \frac{\theta}{\delta x^2}\left(-Y_{i-1}^{n+1} + 2Y_i^{n+1} - Y_{i+1}^{n+1}\right)$$

$$- \frac{(1-\theta)}{\delta x^2}\left(-Y_{i-1}^n + 2Y_i^n - Y_{i+1}^n\right) = 0 \tag{28}$$

$$Y_0^{n+1} = \alpha(t_{n+1}) \qquad Y_{p+1}^{n+1} = \beta(t_{n+1}) \tag{29}$$

d) consistance du schéma

Définition 3 le schéma (26) – (29) est dit (consistant) (à l'ordre...) d'ordre $q \in \mathbb{N}^*$ si $\exists M \in \mathbb{R}_+$, $\exists (r,s) \in \mathbb{N}^{*2}$ /

$$\max_{\substack{1 \le i \le P \\ 0 \le n \le N-1}} |\varepsilon_i^n| \le M \left((\delta x)^r + (\delta t)^s \right)$$

où
$$\varepsilon_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} - \left(\theta f_i^{n+1} + (1-\theta) f_i^n \right) + \frac{\theta}{\delta x^2} \left(-u_{i-1}^{n+1} + 2u_i^{n+1} - u_{i+1}^{n+1} \right) + \frac{1-\theta}{\delta x^2} \left(-u_{i-1}^n + 2u_i^n - u_{i+1}^n \right) \quad (30)$$

et $q = \min(r,s)$

en fait ε_i^n mesure au point $i\delta x$, au temps $n\delta t$ la précision à laquelle la solution exacte vérifie le schéma numérique. on a dans

Théorème 4 Si la solution exacte $u \in C^4([0,1] \times [0,T])$

alors pour tout $\theta \in [0,1]$, le schéma précédent est consistant d'ordre 1.

si $\theta = 1/2$, le schéma est consistant d'ordre 2.

démonstration on suppose pour simplifier $f = 0$, ce qui n'enlève rien à la généralité.

(5.14 BIS)

* Plus précisément :

Si Z^n désigne le vecteur $\begin{pmatrix} u^n_1 \\ | \\ u^n_p \end{pmatrix}$ on a, si le

schéma est défini par $Y^{n+1} = CY^n + D$

$$\varepsilon^n = \left(Z^{n+1} - Z^n - CZ^n - D \right)$$

où $\varepsilon^n = (\varepsilon^n_1 \dots \varepsilon^n_p)$

on prend $n \in [0, N-1]$, $i \in [1, p]$

u la solution exacte vérifie $Pu = 0$ où $P = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

(+ CI + CL ...)

Y_i^n la solution approchée vérifie $P_{\delta x, \delta t}(Y_i^n) = 0$.

ainsi
$$\varepsilon_i^n = P_{\delta x, \delta t}(Y_i^n) - 0$$

$$= P_{\delta x, \delta t}(Y_i^n) - (Pu)(x_i, t_n)$$

$$= \left(\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} - \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n)\right)$$

$$+ \left(\frac{\theta}{\delta x^2}\left(-u_{i-1}^{n+1} + 2u_i^{n+1} - u_{i+1}^{n+1}\right) - \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{n+1})\right)$$

$$+ \left(\frac{1-\theta}{\delta x^2}\left(-u_{i-1}^n + 2u_i^n - u_{i+1}^n\right) - (1-\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n)\right)$$

$$- \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{n+1}) + \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n)$$

évaluons chacun des 4 termes grâce à des formules de Taylor (u est suffisamment régulière)

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\delta t} - \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) = \frac{1}{\delta t}\left(u_i^n + \delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) + \frac{\delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_n) - u_i^n \right.$$
$$\left. \frac{\delta t^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, \tilde{t}_n^i)\right) - \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n)$$

$$= \frac{1}{2}\delta t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_n) \quad \text{où } \Theta_{i,n}^{(1)} = (x_i, \tilde{t}_n^i)$$

$$+ \frac{1}{6}\delta t^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\Theta_{i,n}^{(1)}) \quad \text{et } \tilde{t}_n^i \in]t_n, t_{n+1}[.$$

De même

$$u_{i+1}^{m+1} = u_i^{m+1} + \delta x \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{m+1}) + \frac{\delta x^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{m+1}) + \frac{\delta x^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_{m+1})$$
$$+ \frac{\delta x^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\tilde{\theta}^{(2)}_{i,m})$$

$$u_{i-1}^{m+1} = u_i^{m+1} - \delta x \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{m+1}) + \frac{\delta x^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{m+1}) - \frac{\delta x^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_{m+1})$$
$$+ \frac{\delta x^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\tilde{\tilde{\theta}}^{(2)}_{i,m})$$

en sommant

$$\frac{-u_{i+1}^{m+1} + 2u_i^{m+1} - u_{i-1}^{m+1}}{\delta x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{m+1}) + \delta x^2 A \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta^{(2)}_{i,m})$$

où K est constante numérique (indé de i, n)

$\theta^{(2)}_{i,m} \in]0, T[\times]0,1[$.

de même $$\frac{1}{\delta x^2}\left(-u^m_{i+1} + 2u^m_i - u^m_{i-1}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_m) + \delta x^2 B \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta^{(3)}_{i,m})$$

Enfin $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{m+1}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_m) + \delta t \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(x_i, t_m)$$
$$+ \frac{\delta t^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(\theta^{(4)}_{i,m}))$$

Bref, en rassemblant les 4 termes:

$$\varepsilon_i^m = \delta t\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_m) - \theta \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(x_i, t_m)\right) + \frac{1}{6}\delta t^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\theta^{(1)}_{i,m})$$
$$+ \left(A\theta \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta^{(2)}_{i,m}) + (1-\theta) B \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta^{(3)}_{i,m})\right)\delta x^2 - \frac{\delta t^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(\theta^{(4)}_{i,m}))$$

avec $\theta^{(1)}_{i,n} \dots \theta^{(4)}_{i,n} \in [0,1] \times [0,T]$.

L'aspect C^4 de u impose que les termes correspondants sont bornés

Enfin $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(x_i, t_n) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}(x_i, n)\right)$

d'où $|\varepsilon^n_i| \leq \left|\delta t \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_n)\right| + A\delta t^2 + B\delta x^2$

$$\boxed{|\varepsilon^n_i| \leq A\delta t^2 + B\delta x^2 + \gamma \delta t |(\theta - 1/2)|} \quad (31)$$

où A, B, γ sont des constantes numériques indépendantes $\square$.

β) stabilité

On conclue maintenant par stabilité + consistance ⇒ convergence.

Plus précisément, on adopte les notations de la définition β)2) (23).

Théorème 5 On admet que M est indépendante de p. Alors :

$$\max_{\substack{0 \leq m \leq N \\ 1 \leq i \leq p}} |Y^m_i - u^m_i| \leq TM\left(A\delta t^2 + B\delta x^2 + \gamma \delta t\, |\theta - 1/2|\right) \quad (32)$$

où A, B, γ sont des constantes numériques (si u est assez régulière)

démonstration

On pose $\forall n \in [0, N]$ Y^n tel que Y^n_i est solution du schéma

$Z^n \,/\, \forall i \in [1, p]$ $Z^n_i = u^n_i$

Par définition $Y^{n+1} = Y^n + \delta t\, \phi(t_n, Y^n, \delta t)$

$Z^{n+1} = Z^n + \delta t\, \phi(t_n, Z^n, \delta t) + \tilde{\varepsilon}^n$

calculons $\tilde{\varepsilon}^n_i$ défini par

$$\tilde{\varepsilon}^n_i = u^{n+1}_i - u^n_i - \delta t\,(\phi(t_n, z^n, \delta t))_i$$

$$= \delta t\left(\frac{u^{n+1}_i - u^n_i}{\delta t} + \dots\right) = \delta t\,\varepsilon^n_i$$

ainsi ε^n_i est l'erreur de convergence défini par 30.

ainsi d'après (30)

$$\underset{0\le n\le N}{\mathrm{Max}} \|y^n - z^n\| \le M\Big(\underbrace{\|y^0 - z^0\|}_{=0\ \text{exact}} + \sum_{n=0}^{N-1} \|\varepsilon^n\|\Big)$$

or $\|.\| = \|.\|_{\mathbb{R}^p,\infty}$ d'où

$$\underset{\substack{0\le n\le N\\ 1\le i\le p}}{\mathrm{Max}} |y^n_i - u^n_i| \le M \sum_{n=0}^{N-1} \underset{i}{\mathrm{Max}}\,\delta t\,|\varepsilon^n_i|$$

$$\le M\,\delta t \sum_{n=0}^{N-1} A\,\delta t^2 + \beta\,\delta x^2 + \gamma\,\delta t\,|\theta - 1/2|$$

(selon 31) enfin $\delta t \sum_{n=0}^{N-1} = N\delta t = T$

d'où

$$\underset{\substack{0\le n\le N\\ 1\le i\le p}}{\mathrm{Max}} |y^n_i - u^n_i| \le MT\left(A\,\delta t^2 + \beta\,\delta x^2 + \gamma\,\delta t\,|\theta - 1/2|\right) \quad \square$$

$\longrightarrow$ la convergence est d'ordre 1 pour $\theta \in [0,1]$

d'ordre 2 si $\theta = 1/2$.

Concluons maintenant sur la stabilité effective de (25), grâce à la propriété 2.

γ) convergence effective

Th 6. Le schéma (25) est :

- inconditionnellement stable si $\theta \geq 1/2$
- conditionnellement stable si $\theta < 1/2$ avec $\delta t \leq \dfrac{\delta x^2}{2(1-2\theta)}$

En pratique on choisira $\theta \geq 1/2$: stable + consistant ⟹ convergent.

on choisira Crank Nicholson ($\theta = 1/2$) pour avoir de plus l'ordre 2.

démonstration

Selon (25) :

$$Y^{n+1} = C\, Y^n + D$$

où $C = (I + \theta \delta t A_{\delta x})^{-1} (I - \delta t (1-\theta) A_{\delta x})$

où $A_{\delta x}$ est déterminée par (18).

on a $\lambda \in Sp\, C \iff \exists X \in \mathbb{R}^{k} / \ C X = \lambda X$

or $CX = \lambda X \iff (I - \delta t (1-\theta) A_{\delta x}) X = \lambda (I + \theta \delta t A_{\delta x}) X$

$\iff (\lambda \theta \delta t + \delta t (1-\theta)) A_{\delta x} X = (\lambda - 1) X$

$\iff \dfrac{\lambda - 1}{\lambda \theta \delta t + \delta t (1-\theta)} = \mu_k$ où μ_k est l'une des valeurs propres de $A_{\delta x}$

$$\Leftrightarrow \exists k \in [1,p] / \quad \lambda_k = 1 - \frac{\delta t\, \mu_k}{1+\theta\delta t\,\mu_k} = \frac{1-\delta t(1-\theta)\mu_k}{1+\theta\delta t\,\mu_k}$$

or on a déjà calculé $\tilde{\mu}_k$ valeurs propres de $\begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$ qui

valent pour $k \in [1,p]$ $\quad 4\sin^2 \frac{k\pi\delta x}{2}$

d'où $\mu_k = \frac{4}{\delta x^2} \sin^2 \frac{k\pi\delta x}{2}$

si $\rho(C) \leq 1$ la méthode est stable. ainsi la méthode est stable

si $\quad \forall k \in [1,p] \qquad -1 \leq \lambda_k \leq 1$

$\Leftrightarrow \forall k \in [1,p] \qquad -1 \leq 1 - \frac{\delta t\,\mu_k}{1+\theta\delta t\,\mu_k} \leq 1.$

la seconde inégalité est toujours vraie car $\mu_k > 0$. d'où la méthode est stable si $\quad \forall k \in [1,p] \quad \frac{\delta t\,\mu_k}{1+\theta\delta t\,\mu_k} \leq 2$

$\Leftrightarrow \quad \forall k \in [1,p] \qquad (\frac{1}{2} - \theta)\delta t\,\mu_k \leq 1$

Si $\theta \in [1/2 ; 1]$ cela est toujours vrai est le schéma est donc dit inconditionnellement stable

Si $\theta \in [0; 1/2[$, il y a stabilité si l'inégalité est vraie pour la plus grande des valeurs propres μ_k soit :

$$1 \geq (\frac{1}{2} - \theta)\delta t \frac{4}{\delta x^2} \sin^2 \frac{p\pi\delta x}{2} = (\frac{1}{2} - \theta)\delta t \frac{4}{\delta x^2} \cos^2 \frac{\pi\delta x}{2}$$

soit

$$\delta t \leq \frac{\delta x^2}{2(1-2\theta)\cos^2\frac{\pi\delta x}{2}}$$

on retiendra une condition suffisante $\delta t \leq \dfrac{\delta x^2}{2(1-2\theta)}$ $\square$