9: Introduction à la méthode des éléments finis (Mef)

I) Principe général de la Mef

On s'intéresse ici à la résolution d'edp stationnaire.

i) edp : chercher $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ vérifiant $\_\_\_ = 0$ ds Ω + C.L sur $\partial\Omega$ $\}$ (P)

ii) Formulation variationnelle (équivalente)

V Hilbert et a, b tels que (P) soit équivalent à

chercher $u \in V / \forall v \in V \quad a(u,v) = b(v)$ (φ)

iii) discrétisation.

chercher une base nodale et V_h de dimension finie inclus dans V et remplacer φ par φ_h :

chercher $u_h \in V_h / \forall v_h \in V_h \quad a(u_h, v_h) = b(v_h)$ (φ_h)

iv) construction et assemblage de la matrice du système discret.

Numérotation locale, intégration numérique, assemblage ...

v) Résolution du système $AX = B$ où A SDP

(par cholesky, gradient conjugué...)

II) Introduction à la MEF sur un exemple monodimensionnel

1) Equation aux dérivées partielles considérée

On se donne
$$\left|\begin{array}{l} q, f \in \mathcal{C}^0([0,1]) \\ p \in \mathcal{C}^1([0,1]) \\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

On cherche $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ /

$$(P) \begin{cases} \forall x \in [0,1] \quad -(pu')' + qu = f & (1) \\ u(0) = 0 \quad \text{(CL de Dirichlet)} & (2) \\ u'(1) + \beta u(1) = \alpha \quad \text{(CL de Fourier)} & (3) \end{cases}$$

⚠ : ici on impose des hypothèses de régularité suffisantes pour pouvoir dériver 2 fois, mais par la suite on abaissera ces régularité!

2) Formulation variationnelle

a) Condition nécessaire

• Supposons (P) résolu : cherchons une autre formulation de ce problème.

Soit $v \in \mathcal{C}^1([0,1])$

on a ainsi $\forall x \in [0,1] \quad -(p(x)u'(x))'v(x) + q(x)u(x)v(x) = f(x)v(x)$

ainsi en intégrant $\displaystyle -\int_0^1 (p(x)u'(x))'v(x)\,dx + \int_0^1 q(x)u(x)v(x) = \int_0^1 f(x)v(x)dx$

Or par IPP : $\displaystyle -\int_0^1 (p(x)u'(x))'v(x)\,dx = \int_0^1 p(x)u'(x)v'(x)dx$

$$- [p(x)u'(x)v(x)]_0^1$$

$$= + \int_0^1 p(x)u'(x)v'(x)\,dx - p(1)u'(1)v(1) + p(0)u'(0)v(0)$$

Or

$$u'(1) = \alpha - \beta u(1)$$

ainsi $\quad -p(1)u'(1)v(1) = -(\alpha - \beta u(1))\,v(1)p(1)$

$$= \beta u(1)v(1)p(1) - \alpha v(1)p(1)$$

ici on incorpore la CDL sur les dérivées dans la forme bilinéaire.

ainsi $\forall v \in \mathcal{C}^1([0,1])$

$$\int_0^1 p u' v' + q u v + \beta p(1) u(1) v(1) = \int_0^1 f v + \alpha p(1) v(1)$$

$$- p(0) u'(0) v(0).$$

il Reste $u'(0)$ inconnu.

On impose donc $\underline{v(0) = 0}$

On pose $a(u,v) = \int_\Omega p u' v' + q u v + \beta p(1) u(1) v(1)$

$b(v) = \int_\Omega f v + \alpha p(1) v(1)$

où $\Omega =]0,1[$.

On cherche u / $u(0) = 0$ et

$$\begin{cases} \forall v \in \mathcal{C}^1([0,1]) & / \ v(0) = 0. \\ a(u,v) = b(v) \end{cases}$$

- Cela pourrait constituer une formulation variationnelle de (P), mais pour avoir a continue, il faut se ramener à $\langle u, v \rangle = \int u v + u' v'$, produit scalaire pour lequel $\mathcal{C}^1([0,1])$ N'EST PAS COMPLET.

Il faut prendre un espace plus grand:

$a(u,v)$ et $b(v)$ sont définies si $u, u', v, v' \in L^2(\Omega)$ ie $u, v \in V = H^1(\Omega)$.

et $p, q \in L^\infty(\Omega)$ ← ② Ucieneen ⓓ

(De plus si u et v sont de $H^1(\Omega)$, elles sont continues et il existe (ec) $u(1)$ et $v(1)$.)

↓ "trace de u".

ainsi on pose

$\tilde{V} = H^1(\Omega)$, espace de Hilbert, muni du produit scalaire usuel

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega uv + u'v'$$

$$\text{ainsi } \|u\| = \left(\int_\Omega u^2 + u'^2\right)^{1/2}$$

Enfin on a $u(0) = v(0) = 0$ ainsi on considère

$$V = \{ v \in \tilde{V} \,/\, v(0) = 0 \} = \{ v \in H^1(\Omega) \,/\, v(0) = 0 \} \text{ muni de } \langle \cdot ; \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}$$

Enfin, on impose (pour assurer la coercitivité de a) que

p.p sur Ω $\quad p(x) \geq p_0$

$\quad q(x) \geq q_0$

où $(p_0, q_0) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ et $\beta \geq 0$

Bref

on se donne • $p, q \in L^\infty(\Omega)$ / $p' \in L^2(\Omega)$.

p.p sur Ω $\quad p(x) \geq p_0 > 0 \quad (4)$

$\qquad q(x) \geq q_0 > 0 \quad (5)$ $\quad \hookrightarrow 3/(2)$ Vcàcrau (2)

- $f \in L^2(\Omega)$
- $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}_+$
- $V = \{ v \in H^1(\Omega) \,/\, v(0) = 0 \}$ muni du produit scalaire de $H^1(\Omega)$

a définie par $\forall u, v \in H^1(\Omega)$ $\quad a(u,v) = \int_\Omega p u' v' + q u v + \beta p(1) u(1) v(1) \quad (6)$

$$b(v) = \int_\Omega f v + \alpha p(1) v(1) \quad (7)$$

On cherche $u \in V \,/\, \forall v \in V \quad a(u,v) = b(v) \qquad (\varphi)$.

(φ) est appelé la formulation variationnelle, ou faible (de (1))

b) Étude de la formulation variationnelle : Existence et unicité de la solution

On donne le rappel suivant très important :

Th de Lax Milgram (1)

Soient V, un espace de Hilbert (sur $\mathbb{R}$), a bilinéaire continue sur V, coercitive

$b \in V'$ (dual topologique de V). alors $\exists!\, u \in V \,/$

$$\forall v \in V \quad a(u,v) = b(v)$$

(2) $p, q \in L^\infty(\Omega)$ pour $\Omega =]0,1[$

NE SUFFIT PAS, notamment parce que, dans ce cas, $p(1)$ n'a aucun sens.

Conformément à ce que fait Brézis dans "Analyse Fonctionnelle", p. 138, on impose DE PLUS $\xrightarrow{\text{et } p(0)}$

$$p \in C^1([0,1]), \quad q \in C^0([0,1])$$

et donc puis $p_0, q_0 > 0$ telles que

$$\forall x \in [0,1] \quad \begin{array}{l} p(x) \geq p_0 \\ q(x) \geq q_0. \end{array}$$

Voir suite... page 1

(9.6) (2)

$$-(pu')' + qu = f \qquad (-pu') \in H^1 \quad \text{car } (-pu')' \in L^2$$

$$-\int_0^1 (pu')' v \qquad v \in H^1$$

$$= + \int_0^1 pu'v' - [\underbrace{pu'v}_{\in H^1 \Rightarrow C^0}] \qquad pu'(1) \quad f(1)\alpha -$$

Rel. Fab. Sol.

By hyp 1.38 $p \in C^1$, $q \in C^0$

$$pu' \in H^1 \Rightarrow u' = \boxed{\frac{1}{p}} \underbrace{pu'}_{} \in H^1$$

doit appartenir à H^1

de même .....

9.6.c 3

et on obtient

$$\int_I u'w' + \int_I uw = \int_I fw \qquad \forall w \in H_0^1(I).$$

Ceci implique $u \in H^2(I)$, etc.

$*$ **Exemple 2.**(Problème de Sturm-Liouville). – Soit à résoudre le problème

$$\text{(18)} \qquad \begin{cases} -(pu')' + qu = f & \text{sur} \quad]0, 1[= I \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où $p \in C^1(\bar{I})$, $q \in C(\bar{I})$ et $f \in L^2(I)$ sont donnés avec

$$p(x) \geqslant \alpha > 0 \qquad \forall x \in \bar{I}.$$

Si u est une solution classique de (18) on a

$$\int_I pu'v' + \int_I quv = \int_I fv \qquad \forall v \in H_0^1(I).$$

On adopte comme espace fonctionnel l'espace $H_0^1(I)$ et comme forme bilinéaire, continue, symétrique

$$a(u, v) = \int_I pu'v' + \int_I quv.$$

Si $q \geqslant 0$ cette forme est coercive grâce à l'inégalité de Poincaré (proposition VIII.12). Donc (théorème de Lax-Milgram) il existe $u \in H_0^1$ unique tel que

$$a(u, v) = \int_I fv \qquad \forall v \in H_0^1(I).$$

De plus u s'obtient par

$$\operatorname*{Min}_{v \in H_0^1} \left\{ \frac{1}{2} \int_I (pv'^2 + qv^2) - \int_I fv \right\}$$

Il est clair que $pu' \in H^1$; donc $u' = \frac{1}{p} . pu' \in H^1$ et par suite $u \in H^2$. Enfin si $f \in C(\bar{I})$ alors $u \in C^2(\bar{I})$ et u est solution classique de (18).

Considérons maintenant le problème plus général

$$\text{19)} \qquad \begin{cases} -(pu')' + ru' + qu = f & \text{sur} \quad]0, 1[= I \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Les hypothèses sur p et q sont les mêmes que ci-dessus et $r \in C(\bar{I})$.
Si u est solution classique de (19) on a

$$\int_I pu'v' + \int_I ru'v + \int_I quv = \int_I fv \qquad \forall v \in H_0^1(I).$$

On adopte comme espace fonctionnel l'espace $H_0^1(I)$ et comme forme bilinéaire, continue

$$a(u, v) = \int_I pu'v' + \int_I ru'v + \int_I quv.$$

Cette forme n'est **pas symétrique.** Dans certains cas elle est coercive : par exemple si $q \geqslant 1$ et $r^2 \leqslant \alpha$, ou bien si $q \geqslant 1$ et $r \in C^1(\bar{I})$ avec $|r'| \leqslant 2$ – noter que

$$\int_I rv'v = -\frac{1}{2} \int_I r'v^2 \qquad \forall v \in H_0^1(I).$$

ainsi l'existence et l'unicité de la solution de (φ) découle des théorème de Lax Milgram.

Etude de l'espace V

ici V est un sous espace vectoriel de $H^1(\Omega)$, muni du produit scalaire.

il sera complet si il est fermé!

Soit $\varphi : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$

$v \longmapsto v(0)$

Il est clair que φ est linéaire. on observe que $V = \operatorname{Ker} \varphi$.

ainsi V est fermé si φ est continue.

Montrons qu'il existe $M \in \mathbb{R} / \forall v \in H^1(\Omega) \quad |\varphi(v)| \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \cdot M$

ie $\forall v \in H^1(\Omega) \qquad |v(0)| \leq \left(\int_\Omega v^2 + v'^2\right)^{1/2} \cdot M$

Or $\quad |v(0)| \leq \quad \|v\|_{C^0(\bar\Omega)}$

Or on a le lemme suivant

Lemme 2 $\quad C^0(\bar\Omega)$ s'injecte de façon continue dans $H^1(\Omega)$.

ainsi $\exists M \in \mathbb{R}_+ / \forall v \in C^0(\bar\Omega) \qquad \|v\|_{C^0(\bar\Omega)} \leq M \|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad (8)$

Bref avec ce qui précède $\quad |v(0)| \leq M \|v\|_{H^1(\Omega)}$ et φ est C^0 □.

V est un espace de Hilbert

Etude de la forme bilinéaire a

Il est clair que a est bilinéaire (ici elle est, de plus, symétrique). Elle est continue

$$\forall u, v \in V^2 \quad |a(u,v)| = \left| \int_\Omega p u' v' + q u v + \beta p(1) u(1) v(1) \right|$$

$$\leq \int_\Omega |p||u'||v'| + |q||u||v| + \beta |p(1)||u(1)||v(1)|$$

$$\leq \operatorname{Max}\left(\|p\|_{L^\infty(\Omega)}, \|q\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \int_\Omega |u'v'| + |uv| + \|p\|_{L^\infty(\Omega)} \beta |u(1)v(1)|$$ (si $p \in C^0$ ... car bornée partout)

$$\leq K \left(\int_\Omega |u'v'| + |uv| + |u(1)v(1)| \right)$$

$$\leq K \left(\left(\int_\Omega u'^2 \int v'^2 \right)^{1/2} + \left(\int u^2 \int v^2 \right)^{1/2} + M^2 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \right)$$

(CBS + injection C^0)

$$\leq (2 + M^2) K \|u\| \|v\|$$

$$\leq K' \|u\| \|v\|$$

ainsi a est continue

a est coercitive car $\forall v \in V$

$$|a(v,v)| = \int_\Omega p v'^2 + q v^2 + \beta v^2(1)$$

$$\geq \left(\int v'^2 + v^2 \right) \operatorname{Min}(p_0, q_0)$$

(selon (4), (5) et $\beta \geq 0$)

$\geq \chi \|v\|^2_{H^1(\Omega)}$ où $\chi > 0$.

Etude de la forme linéaire b.

Il est clair que $\forall v \in V$, on a selon (7), (8) et (B)

$$|b(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + |\alpha| M \|p\|_{L^\infty(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\leq \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + |\alpha| M \|p\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \|v\|$$

$$\leq K \|v\|$$

où $K \in \mathbb{R}_+$.

ainsi d'après le théorème de Lax Milgram, (φ) admet une solution unique.

Il faut étudier maintenant si on peut remonter de (φ) à (P) (Puisque l'on a affaibli des hypothèses notamment de régularité)

c) Retour à la formulation "forte" (e.d.p)

Montrons maintenant le retour à l'edp.

- on a naturellement la CL (2) qui est par définition de v.

$u \in V \Rightarrow u(d) = 0$

- on a $\forall v \in H^1(\Omega)$ (avec $v(d=0)$)

$$a(u, v) = b(v)$$

or $\mathcal{D}(\Omega) \subset V$, ainsi

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $\quad a(u, \varphi) = b(\varphi)$

$$\Rightarrow \int_\Omega p u' \varphi' + q u \varphi \quad + \beta p(1) u(1) \varphi(1) = \int_\Omega f \varphi + \alpha p(1) \varphi(1)$$

or $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ d'où $\varphi(1) = 0$. ainsi on a (car $L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$)

$$< pu', \varphi' >_{\mathcal{D}'(\Omega) : \mathcal{D}(\Omega)} + < qu ; \varphi >_{\mathcal{D}' : \mathcal{D}} - < f, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega) : \mathcal{D}(\Omega)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad < -(pu')' ; \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega) : \mathcal{D}(\Omega)} + < -f, \varphi >_{\mathcal{D}' : \mathcal{D}} + < qu ; \varphi >_{\mathcal{D}' : \mathcal{D}} = 0$$

(définition de la dérivée distribution)

ainsi on a $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $\quad < -(pu')' + qu - f, \varphi >_{\mathcal{D}' : \mathcal{D}} = 0$

ce qui est équivalent à

$$\text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \quad (-pu')' + qu = f \qquad (9)$$

on a retrouvé l'edp mais seulement <u>au sens des distributions.</u>

Cependant $f \in L^2(\Omega)$ et $qu \in L^2(\Omega)$ (car $q \in C^0(\Omega)$
et $u \in V \subset L^2(\Omega)$)

de plus $u \in V \subset H^1(\Omega)$ d'où

$u \in H^1(\Omega)$ et

$(-pu')' = f - qu \in L^2(\Omega)$

ainsi $\quad pu' \in H^1(\Omega)$

ainsi $\quad \left(\text{car } \left|\frac{1}{p}\right| \leq \frac{1}{p_0}\right) \quad u' \in H^2(\Omega)$ $\quad$ Si $\frac{1}{p} \in H^1(\Omega)$

ce qui est vrai car $p \in H^1$ et $p \geq p_0$

où $H^2(\Omega) = \{ v \in L^2(\Omega) \,/\, v', v'' \in L^2(\Omega) \}$.

Bref on a le résultat de régularité suivant

$u \in H^2(\Omega)$ et

ds $\mathcal{D}'(\Omega)$ (ou p.p sur Ω) $\quad (-pu')' + qu = f$

- il reste à retrouver la CL (3) qui est en fait "cachée" dans la F.V.

Pour cela, on donne le

Th 3

$\forall u \in H^1(\Omega), \ \forall v \in H^1(\Omega) \quad - \int_\Omega u' v = \int_\Omega u' v - [v(1)u(1) - v(0)u(0)]$ (10)

Ce n'est qu'une intégration par partie

ainsi d'après la formulation faible

$$\forall v \in V \quad \int_\Omega p u' v' + \int_\Omega q u v = \int_\Omega f v + \alpha p(1) v(1) - \beta p(1) u(1) v(1)$$

or $p u' \in H^1(\Omega)$ (car $u \in H^2(\Omega)$, vient d'être établi et $p \in H^1(\Omega)$)

ainsi, d'après (10) $\displaystyle\int_\Omega (p u') v' = -\int_\Omega (p u')' v + [p(1) u'(1) v(1) - p(0) u'(0) v(0)]$

or $v \in V \Rightarrow v(0) = 0$.

ainsi $\forall v \in V$

$$\int_\Omega (-p u')' v + \int_\Omega q u v - \int_\Omega f v + p(1) u'(1) v(1) = \alpha p(1) v(1) - \beta p(1) u(1) v(1)$$

$$\Leftrightarrow \forall v \in V \quad \int_\Omega ((-p u')' + q - f) v = v(1) p(1) (\alpha - \beta u(1) - u'(1))$$

et par hypothèse (relation qui précède $-(p u')' + q = f$ ainsi

$$\forall v \in V \qquad v(1) p(1) (\alpha - \beta u(1) - u'(1)) = 0$$

or $p(1) \geq p_0 > 0$ et on peut choisir $v = t \in V$ ainsi

$$u'(1) = \alpha - \beta u(1), \text{ on a donc retrouvé (3).}$$

ainsi on considère le pb "fort" suivant :

On cherche $u \in H^2(\Omega)$/

$$(P^-)\begin{cases} \text{p.p. sur } \Omega \text{ (au ds } \mathcal{D}'(\Omega)) \quad (-pu')' + qu = f & (1) \\ u(0) = 0 & (2) \\ u'(1) + \beta u(1) = \alpha & (3) \end{cases}$$

il est plus faible que (P) mais la formulation faible entraine (P^-).

On peut montrer aisement que $(P^-) \Rightarrow (\varphi)$.

En effet $u \in H^2(\Omega)$ et $u(0) = 0 \Rightarrow u \in V$.

La FV se montre exactement comme au debut.

<u>On a donc l'equivalence entre (P^-) et (φ)</u>

On remarque la CL de Dirichlet intervient ds la definition de l'espace V des fonctions test ($v(0)=0$) et que la CL de Neuman est "cachée" ds la F.V.
En exemples, voir d'autres F.V (cf exo)

3) Discretisation : approximation interne

Il nous faut maintenant remplacer par un pb discret, le pb PO (sous sa forme F.V).

a) Theorie abstraite de l'approximation variationnelle

On considère (avec a bili, coerci..) le Ph :

(φh) V_h est un espace de dimension finie inclus dans V.

On cherche $u_h \in V_h$ / $\forall v_h \in V_h$ $a(u_h, v_h) = b(v_h)$

Th 4 le Pb φh admet une solution et une seule et on a de plus

$\exists C$, indépendante de V_h /

$$\|u - u_h\|_V \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| \quad (12)$$
$$= C\, d(u, V_h)$$

Démonstration

i) L'existence et l'unicité de la solution de φh vient du cas général appliqué à $V = V_h$ (a reste coercive...)

On peut aussi en donner une démonstration directe (à voir après...)

ii) De même on a 2 démonstration:

Soit $v_h \in V_h$. Posons $w_h = v_h - u_h \in V_h$ ainsi selon

(φh) $a(u_h, w_h) = b(w_h)$

selon (φ) $a(u, w_h) = b(w_h)$

ainsi $a(u - u_h, w_h) = 0$

Bref $\forall v_h \in V_h$ $\quad a(u - u_h, v_h + u_h) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad a(u - u_h, u_h - u + u - v_h) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h)$$

or d'après la $\mathcal{C}^0$ de a $\quad a(x,y) \leq M \|x\| \|y\|$

Coercitivité $\quad a(x,x) \geq \alpha \|x\|^2$

d'où $\forall v_h \in V_h$ $\quad \alpha \|u - u_h\|^2 \leq M \|u - u_h\| \|u - v_h\|$

d'où $\forall v_h \in V_h$ $\quad \|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|$

et a min sur v_h $\quad \|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} d(u, V_h)$.

Bref $c = \frac{M}{\alpha}$. $\square$.

Donnons l'autre démonstration

<u>Prop 5</u> Si $a(\cdot,\cdot)$ est symétrique, elle induit un produit scalaire et par cette norme, <u>u_h est le projeté orthogonal de u sur V_h.</u> De plus

$$\|u - u_h\|_V \leq \sqrt{\frac{c}{\alpha}}\, d_V(u, V_h) \qquad (13).$$

<u>démonst.</u> Si a est symétrique, elle induit un produit scalaire.

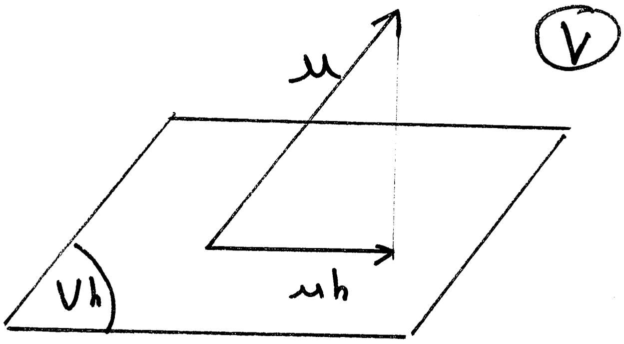
et $\forall v_h \in V_h \quad a(u, v_h) = b(v_h)$

$$a(u_h, v_h) = b(v_h)$$

$\Rightarrow \quad u_h \in V_h$

$\forall v_h \in V_h \quad a(u - u_h, v_h) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} u_h \in V_h \\ u - u_h \in V_h^{\perp_a} \end{cases}$$



ainsi $u_h = \mathrm{Proj}^{\perp}_{V_h}(u)$

dans ce cas (pour la métrique définie par a)

$$\sqrt{\alpha}\, \|u - u_h\|_V \leq \|u - u_h\|_a = \min_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_a \leq \min_{v_h \in V_h} \sqrt{c}\, \|u - v_h\|_V$$

ainsi $\|u - u_h\|_V \leq \sqrt{\dfrac{c}{\alpha}} \min\limits_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$

$$= \sqrt{\frac{c}{\alpha}}\, d(u, V_h) \qquad \square$$

Donnons maintenant une autre preuve de l'existence et unicité de (P_h).

Prop 6 Soit $(e_1 - e_N)$ une base de V_h.

On pose $X \in \mathbb{R}^N / X = {}^t(x_1 \text{---} x_N)$

$$u_h = \sum_{i=1}^{N} x_i e_i$$

Soient $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}) / \forall i\, j \in [1, N] \quad A_{ij} = a(e_j, e_i)$ (13)

$B \in \mathbb{R}^N \quad / \quad \forall i \in [1, N] \quad B_i = b(e_i)$ (14)

Alors A est inversible

A est SDP si a est symétrique (C^0 et coercitive)

et $AX = B$ (15)

<u>Démonstration</u>

on a $u_h \in V_h / \quad \forall v_h \in V_h \quad a(u_h, v_h) = b(v_h)$

$\iff \forall j \in [1, N] \quad a(u_h, e_j) = b(e_j)$ car (e_i) Base

$\iff \forall j \in [1, N] \quad a\left(\sum_{i=1}^{N} x_i e_i, e_j\right) = b(e_j)$

$\iff \forall j \in [1, N] \quad \sum_{i=1}^{N} a(e_j, e_i) x_i = b(e_j)$

$\iff \forall j \in [1, N] \quad (AX)_j = (B)_j$

$\iff AX = B$

Montrons que A est inversible. Soit $X \in \mathbb{R}^N / AX = 0$.

Montrons que $X = 0$

ainsi $\ {}^tYAY=0$

or si $X={}^t(x_1 — x_n)$

$$ {}^tXAX = \sum_{i,j=1}^{N} A_{ji}x_ix_j $$
$$ = \sum_{i,j} a(e_i,e_j)x_ix_j $$
$$ = a\left(\sum_i x_ie_i, \sum_j x_j e_j\right) $$

ainsi d'après la coercivité de a

$$ 0 = a\left(\sum_i x_ie_i, \sum_i x_i e_i\right) \geq \alpha \left\| \sum_i x_ie_i \right\|_V $$

ainsi $\|\sum_i x_ie_i\|_V = 0 \Rightarrow \sum x_ie_i = 0 \Rightarrow X=0$

ds le cas où a est symétrique, A est naturellement symétrique.

De plus A est la matrice de Gram associée à $(e_1 — e_n)$, pour le produit scalaire défini par a ; A est donc SDP.

Cependant aussi le voir à la main : à A est associée la forme quadratique :

$$ \begin{aligned} (\mathbb{R}^N)^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X,Y &\longmapsto {}^tXAY \end{aligned} $$

qui est SDP. $\Big($ $\varphi(X,Y) = {}^tXAY = {}^tY\,{}^tAX = {}^tYAX = \varphi(Y,X)$

$\varphi(X,X) = {}^tXAX \geq \alpha \|\sum_i x_ie_i\|_V^2 \geq 0$ et est nulle si $X=0$ $\Big)$ $\square$.

à ce stade, la MEF n'a pas été mise en jeu. Cependant on peut faire quelques remarques générales :

Remarques

i) V_h est une "approximation" de V et sa dimension est destinée à tendre vers l'infini.

Si a est symétrique, on a $u_h = (\mathrm{Proj}^{\perp} V_h)(u)$

et si "$V_h \xrightarrow[h \to 0]{} V$" $u_h \xrightarrow[h \to 0]{} u$ (dans V).

L'erreur est mesurée par l'erreur d'interpolation $\to d(u, V_h)$.

ii) Souvent a est symétrique, ainsi l'approximation variationnelle débouche toujours sur la résolution d'un système linéaire où A est SDP

$\longrightarrow$ gradient conjugué ; Cholesky....

iii) Maintenant, il faut construire $V_h \subset V$ de telle sorte que :

- la Base $(\varphi_i)_{1 \le i \le N}$ est simple et
- la matrice $(a(\varphi_j, \varphi_i))$ et $(b(\varphi_i))$ est simple à calculer
- le système linéaire est facile à inverser.

→ on va voir sur un exemple comment obtenir

A creuse et bande → c'est l'idée qui

domine dans la M.e.f.

b) Mise en œuvre de la M.e.f sur l'exemple introductif.

- On a déjà défini a, b, V, pour le problème (φ).

Définissons maintenant V_h.

Comme par les différences finies on considère

$N \in \mathbb{N}^*$

$$h = \frac{1}{N+1} \qquad (16)$$

$$x_i = ih \qquad 0 \leq i \leq N+1 \qquad (17)$$

On considère l'espace "simple"

$$V_h = \{ v : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, v_{|[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1 \ , i \in [0, N] \}$$

où $\mathbb{P}_1$ est l'ensemble des polynômes de degré ≤ 1.

Il est nécessaire que $V_h \subset V$

Il faut donc que toute fonction de V_h soit dans $L^2(\Omega)$ et sa dérivée aussi,

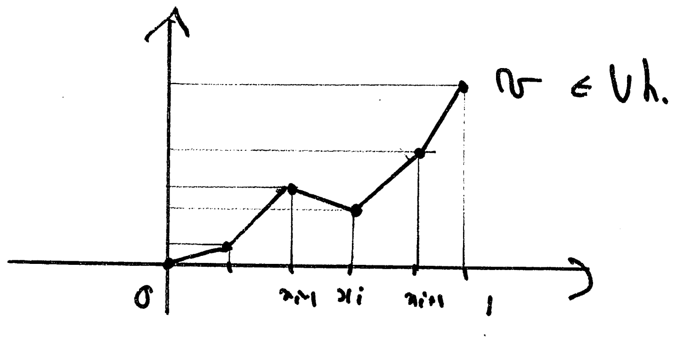
et que la fonction de V_h soit nulle en 0.

Une condition suffisante est donc

$$v \in V_h \Rightarrow \quad v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$$
$$v(0) = 0$$

Bref on pose

$$\boxed{V_h = \left\{ v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \,/\, v(0) = 0 \,,\ \forall i \in [0, N] \quad v_{|[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1 \right\} \quad (18)}$$

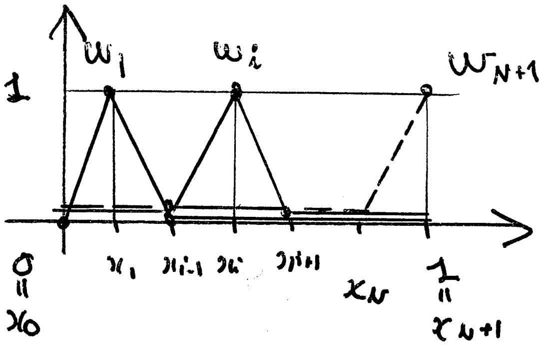


Une fonction de V_h.

- Il nous faut maintenant une base de V_h.

pour $i \in [1, N+1]$ on considère $w_i : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}\,/$

$$w_i \in V_h \qquad w_i(x_{i+1}) = 0 \quad \text{si} \quad i \leq N \qquad (19)$$
$$w_i(x_{i-1}) = 0 \qquad \forall j \notin \{i-1, i, i+1\} \quad w_i(x_j) = 0$$
$$w_i(x_i) = 1$$



Prop 7 | $(w_i)_{1 \le i \le N+1}$ est une base de V_h, de dimension $N+1$.

$$\forall v \in V_h \qquad v = \sum_{i=1}^{N+1} u_i w_i \iff \forall i \in [1, N+1] \quad v(x_i) = u_i. \qquad (20)$$

Remarque. On peut remarquer que l'expression de v sur la Base $(w_i)_{1 \le i \le N+1}$ est simple.

demonstration : par définition w_i est C^1 p.m sur $[0,1]$.

$w_i(0) = 0$

on remarque aussi que

$$\forall i \in [1, N+1], \ \forall j \in [0, N+1] \quad w_i(x_j) = \delta_{ij}$$

ainsi $\displaystyle\sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i w_i = 0 \Rightarrow \forall j \in [1, N+1] \ \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i w_i(x_j) = 0$

$\displaystyle\Rightarrow \forall j \in [1, N+1] \ \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i \delta_{ij} = 0$

$\Rightarrow \forall j \in [1, N+1] \ \alpha_j = 0$

ainsi $(w_i)_{1 \le i \le N+1}$ est une famille libre de V_h.

Soit $v \in V_h$. on pose $\forall i \in [1, N+1]$ $u_i = v(x_i)$

on pose $\tilde{v} = \sum_{i=1}^{N+1} u_i w_i$.

ainsi $\tilde{v} \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$

$\tilde{v}(0) = 0$

$\forall i \in [1, N+1]$ $\tilde{v}(x_i) = u_i$.

ainsi $\tilde{v}$ et v étant affines par morceaux, nulles en 0, coïncidant aux points $(x_i)_{1 \le i \le N+1}$, sont égales et ainsi $v = \sum_{i=1}^{N+1} u_i w_i$.

$\Rightarrow (w_i)_{1 \le i \le N+1}$ est une famille génératrice de V_h.

(20) résulte de nos observations $\square$.

Remarque

La connaissance des valeurs ponctuelles de $v \in V_h$ aux points $(x_i)_{1 \le i \le N+1}$ suffit ainsi à connaître v partout sur $[0, 1]$. car elle est affine par morceaux.

- Revenons maintenant à la construction de A et de B_s dans le cas particulier du problème $(\mathcal{P})$, $(\mathcal{P}_h)$.

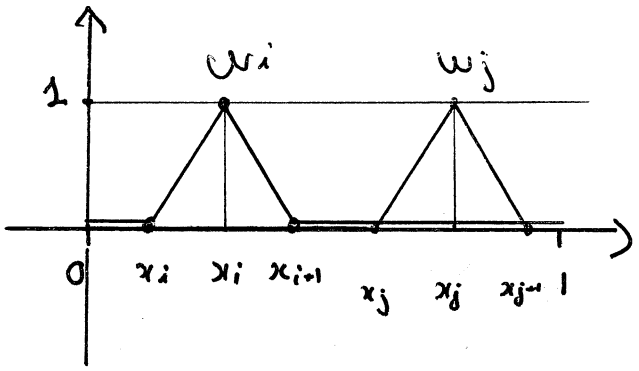
Par définition $(2\ \underline{N+1})$

$$\forall i,j \in [1, N+1] \quad A_{ij} = A_{ji} = a(w_i, w_j) = \int_\Omega p w_i' w_j' + q w_i w_j + \beta p(1) w_i(1) w_j(1)$$

L'intérêt majeur du choix de la base de V_h réside dans le fait que w_i est à support compact $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, de taille petite.

ainsi si $|i-j| \geq 2$ $\quad \mathrm{supp}(w_i) \cap \mathrm{supp}(w_j) = \emptyset$

$$\Rightarrow a_{ij} = 0$$



On supposera pour simplifier que

$$\begin{aligned} p &\equiv p_0 > 0 \\ q &\equiv q_0 > 0 \end{aligned} \qquad (21)$$

Sinon, dans le cas général, pour calculer a_{ij} (et b_i) on utilise des formules d'intégration numérique (à 1 pas → erreur en $O(h)$ suffisante)

Calculons maintenant $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N+1}$, $\quad (b_i)_{1 \leq i \leq N+1}$

- Si $i = j \in [1, N]$

$$a_{ij} = \int_\Omega p_0 \omega_i'^2 + q_0 \omega_i^2 + \beta p_0(1) \underset{\overset{\|}{0}}{\omega_i(1)^2}$$

(car égal à $\omega_i(x_{N+1}) = \delta_{i,N+1}$)

on a une expression analytique de ω_i :

$\forall x \in [x_{i-1}, x_i] \qquad \omega_i(x) = \dfrac{x - x_{i-1}}{h}$

$\forall x \in [x_i, x_{i+1}] \qquad \omega_i(x) = \dfrac{x_{i+1} - x}{h}$

$\forall x \in [0,1] \setminus [x_{i-1}, x_{i+1}] \qquad \omega_i(x) = 0$

ainsi
$$a_{ii} = q_0 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{x - x_i}{h}\right)^2 dx + q_0 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x_{i+1} - x}{h}\right)^2 dx$$

$$+ p_0 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2} + p_0 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{1}{h}\right)^2 dx$$

ds les deux premières intégrales on pose $u = \dfrac{x - x_{i-1}}{h}$ et $u = \dfrac{x_{i+1} - x}{h}$

$$a_{ii} = 2 q_0 h \int_0^1 u^2\, du + \frac{2 p_0}{h}$$

$$= 2 \frac{q_0 h}{3} + \frac{2 p_0}{h}$$

de même $a_{N+1\, N+1} = \dfrac{q_0 h}{3} + \dfrac{p_0}{h} + \beta p_0 \underbrace{\omega_{N+1}(1)}_{=1}$

$$= \frac{q_0 h}{3} + \frac{p_0}{h} + \beta p_0$$

si $i \in [1, N-1]$

$$a_{i,i+1} = p_0 \int_\Omega w_i' w_{i+1}' + q_0 \int_\Omega w_i w_{i+1} + \beta p_0 \underbrace{w_i(1) w_{i+1}(1)}_{=0}$$

$$= p_0 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h} \cdot \left(-\frac{1}{h}\right) dx + q_0 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x_{i+1}-x}{h}\right)\left(\frac{x - x_i}{h}\right) dx$$

$$= -\frac{p_0}{h} + q_0 h \int_0^1 u(1-u)\, du$$

$$u = \frac{x_{i+1} - x}{h}$$

$$\Rightarrow x = -hu + x_{i+1}$$

$$\Rightarrow \frac{x - x_i}{h} = \frac{1}{h}(-hu + x_{i+1} - x_i)$$

$$= 1 - u$$

$$= -\frac{p_0}{h} + \frac{q_0 h}{6}$$

et on a par symétrie $a_{i+1,i}$.

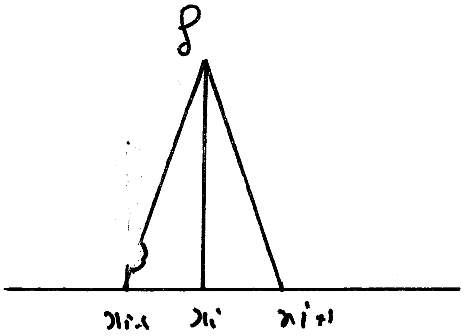
de même, on calcule $b(w_i)$ $\quad 1 \leq i \leq N+1$

$$= \int_\Omega f w_i + \alpha p(1) w_i(1)$$

Pour évaluer le premier vecteur, on fait une intégration numérique du type trapèze :

ainsi $\forall i \in [1, N]$ $\quad b(w_i) = \int_\Omega f w_i + \alpha p_0 . 0$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f w_i$$



$$(f w_i)(x_{i-1}) = 0$$
$$(f w_i)(x_{i+1}) = 0$$
$$(f w_i)(x_i) = f(x_i) = f_i$$

on note $\forall i \in [1, N+1]$ $\quad f_i = f(x_i) \qquad (21)$

ainsi $\quad b_i \sim \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot f(x_i) = h f_i$

de fin $\quad b_{N+1} \sim \frac{h}{2} f_{N+1} + \alpha p_0$

Bref $\quad$ en posant $u_h = \sum_{i=1}^{N+1} u_i w_i$ on a

$$A X = B$$

où

$$\cdot \cdot \cdot \diagup \cdot \cdot \cdot$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2q_0h}{3} + \frac{2p_0}{h} & -\frac{p_0}{h} + \frac{q_0h}{6} & & 0 \\ -\frac{p_0}{h} + \frac{q_0h}{6} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\frac{p_0}{h} + \frac{q_0h}{6} \\ & & \frac{2q_0h}{3} + \frac{2p_0}{h} & \\ 0 & & -\frac{p_0}{h} + \frac{q_0h}{6} & \frac{q_0h}{3} + \frac{p_0}{h} + \beta p_0 \end{pmatrix} \qquad (22)$$

$$B = \begin{pmatrix} h g_1 \\ \vdots \\ h g_N \\ \frac{h}{2} g_{N+1} + \alpha p_0 \end{pmatrix} \qquad (23)$$

Ici, on observe que A est (SDP) tridiagonale.

Remarque : Si on considère le problème $q = 0$, $p = p_0$ → Modèle erreur.

et on le discrétise par un schéma aux différences finies (voir note ...)

on écrit :

$\forall i \in [1, N+1]$ $\qquad -p_0 u''(x_i) = f(x_i)$

discrétisé par $\qquad - \dfrac{p_0}{h^2}\left(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}\right) = f_i$

ie $\qquad \dfrac{p_0}{h}\left(-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}\right) = h f_i$

Les conditions aux limites s'écrivent :

$u_0 = u(0) = 0$ $\qquad$ (Dirichlet)

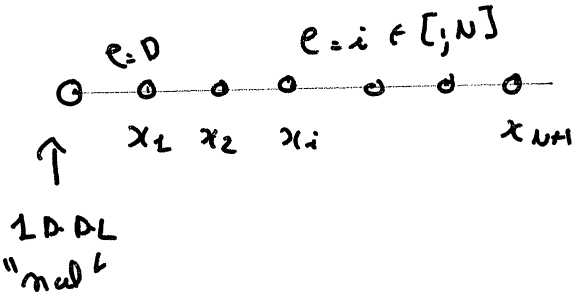
et $\qquad$ [illegible] $\beta\, u_{N+1} = \alpha$

on remplace $u'(1) + \beta u(1) = \alpha$ est discrétisé de la même façon.

On retrouve le même système.

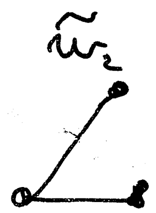
4) assemblage et construction des matrices A et B : cas particulier

Reprenons la numérotation :

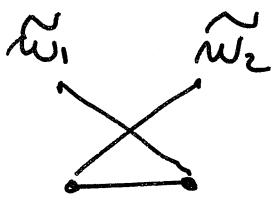


En chaque sommet, il n'y a qu'un nombre fini de fonctions de base non nulles en ce sommet.

à Un " Elément fini " (de type P_1 utilisé ici) correspondent deux sommets (numérotés localement 1 et 2) & deux fonctions de bases associées $\tilde{w}_1$ et $\tilde{w}_2$: (sauf pour le premier EF qui n'a qu'un seul de non nul).



1^{er} E.F



e^e élément fini ($e \in [1, N+1]$)

On dispose d'une bijection (pour chaque EF) entre 1 et 2 (n° locaux) et les numéros globaux de numérotation :

num_e : E.F n° $e \in [1, N]$ $\quad 1 \longrightarrow e$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2 \longrightarrow e+1$

num_0 : $e = 0$ $\quad 1 \longrightarrow \phi$

$\qquad\qquad\qquad\quad 2 \longrightarrow 1$

on peut écrire alors

$\forall i, j \in [1, N+1]$

$$a_{ij} = a(\varphi_j ; \varphi_i) = \int_\Omega \mathcal{A}(\varphi_j(x), \varphi_i(x))\, dx \quad \text{où } \mathcal{A}(\cdot\,;\cdot) \text{ forme Q}$$

on somme sur toutes les EF :

$$a_{ij} = \sum_{e=0}^{M} \int_{\Omega_e} \mathcal{A}(\varphi_j|_{\Omega_e} ; \varphi_i|_{\Omega_e})$$

où Ω_e est la partie de Ω du $\hat{e}$ ème EF

ainsi
$$a_{ij} = \sum_{e=0}^{M} a(\varphi_j|_{\Omega_e}, \varphi_i|_{\Omega_e})$$
$$= \sum_{e=0}^{M} a_{ij}^e$$

avec $a^e_{ij} = a(\varphi_j|_{\Omega_e}, \varphi_i|_{\Omega_e})$

Si on appelle E_{ij} la matrice élémentaire de $\mathbb{R}^{N+1}$

$$((E_{ij})_{lm} = \delta_{il}\delta_{jm})$$

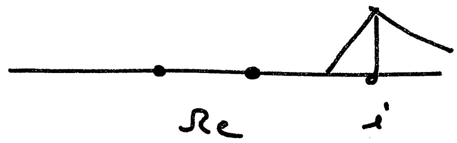
on a alors
$$A = \sum_{i,j=1}^{N+1} a_{ij} E_{ij} = \sum_{i,j=1}^{N+1} \sum_{e=0}^{N} a_{ij}^e E_{ij}$$
$$= \sum_{e=0}^{M} \sum_{i,j=1}^{N+1} a_{ij}^e E_{ij}$$
$$= \sum_{e=0}^{M} \tilde{A}^e$$

où $\tilde{A}^e = \sum_{i,j=1}^{N+1} a_{ij}^e E_{ij}$

Notons $J_e = \{ num_0(2) \}$ si $e = 0$

$\quad = \{ num_e(k) / k \in \{1, 2\} \}$ si $e \in [1, N]$

Si i (ou j) $\notin J_e$



on a $\varphi_i|_{\Omega_e} = 0$ ou $\varphi_j|_{\Omega_e} = 0 \Rightarrow a_{ij}^e = 0$

Si $i \in J_e$ et $j \in J_e$, notons k et l, les uniques antécédents de i et j par num_e.

$$\text{ainsi } \tilde{A}^e = \sum_{\substack{i,j / \\ i \notin J_e \\ \text{ou} \\ j \notin J_e}} a_{ij}^e E_{ij} + \sum_{\substack{i,j / \\ i = num_e(k) \\ j = num_e(l)}} a_{ij}^e E_{ij}$$

$$= \sum_{k,l=1}^{p_e} a^e(\varphi_{num_e(l)}, \varphi_{num_e(k)}) E_{num_e(k), num_e(l)}$$

où $p_e = 2$ si $e \neq 0$

$\quad = 1$ si $e = 0$ (EF de frontière)

ainsi, on voit apparaître la matrice élémentaire $A^e \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$

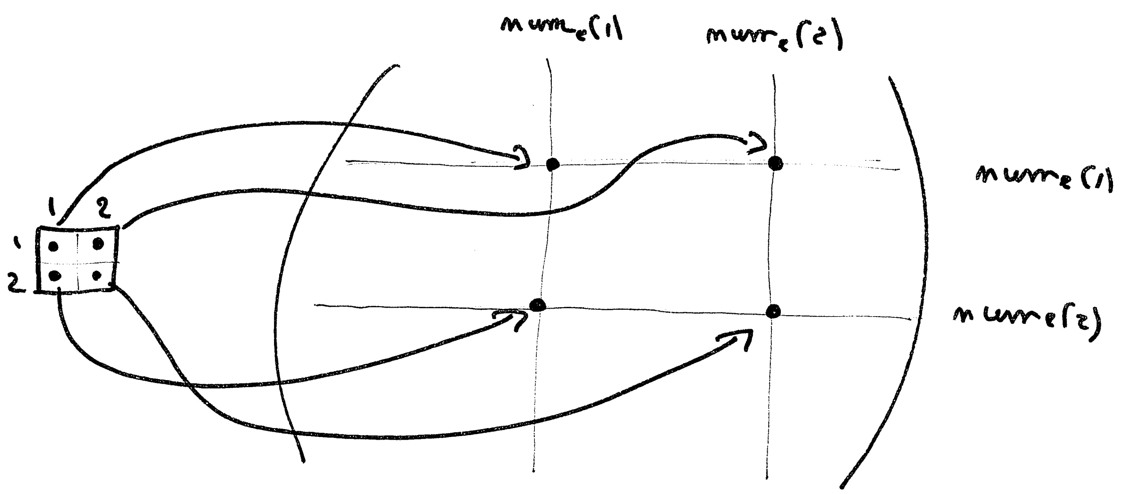
(Sauf si $e = 0$, auquel cas $A^e \in \mathbb{R}$)

définie par

$$A^e_{ij} = a(\varphi_j|_{\Omega_e}, \varphi_i|_{\Omega_e})$$

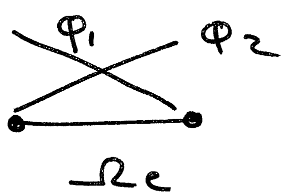
et on a
$$A_{ij} = \sum_{e=0}^{N+1} \sum_{k,p=1}^{pe} A^e_{k,l} \, \delta_{num_e(k),i} \, \delta_{num_e(p),j}$$

de façon pratique, chaque matrice élémentaire est "dispatchée" dans A selon (si e≠0)



a) Calcul de la matrice élémentaire A_e.

si $e \geq 1$



où $\varphi_1 = \tilde{w}_1$
$\varphi_2 = \tilde{w}_2$ associé aux 2 sommets 1 et 2 (locaux).

on a par définition (matrice élémentaire symétrique) $\forall (i,j) \in [1,2]^2$

$$a^e_{ij} = \int_{\Omega e} p\,\varphi_i'\,\varphi_j' + q\,\varphi_i\,\varphi_j \; + \beta\, p(1)\,\varphi_i(1)\,\varphi_j(1)$$

ds le cas particulier où $p = p_0$ $q = q_0$

$$a^e_{ij} = p_0 \int_{\Omega_e} \varphi_i' \varphi_j' + q_0 \int_{\Omega_e} \varphi_i \varphi_j + \beta p_0 \; \varphi_i(1) \varphi_j(1)$$

et enfin (si $e \geq 1$)

$$\int_{\Omega_e} \varphi_1 \varphi_1 = \int_{eh}^{(e+1)h} \left(\frac{x - eh}{h}\right)^2 dx \quad \left(\text{car } \Omega_e =]x_e, x_{e+1}[=]eh, (e+1)h[\right.$$

$$= h \int_0^1 u^2 \, du$$

$$= \frac{1}{3} h$$

De même $\displaystyle\int_{\Omega_e} \varphi_1' \varphi_1' = \int_{eh}^{(e+1)h} \left(\frac{1}{h}\right)^2 dx = \frac{1}{h}$

$$\int_{\Omega_e} \varphi_1 \varphi_2 = \frac{h}{6}$$

$$\int_{\Omega_e} \varphi_1' \varphi_2' = -\frac{1}{h}$$

$$\int_{\Omega_e} \varphi_2^2 = \frac{h}{3}$$

$$\int_{\Omega_e} \varphi_2'^2 = \frac{1}{h}$$

et enfin $\varphi_i(1) \varphi_j(1) = 1$ SSi $i = j = N+1$

ainsi

$$e \in [1, N] \Rightarrow \quad A^e = \begin{pmatrix} \frac{q_0 h}{3} + \frac{p_0}{h} & \frac{q_0 h}{6} - \frac{p_0}{h} \\ \frac{q_0 h}{6} - \frac{p_0}{h} & \frac{q_0 h}{3} + \frac{p_0}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$$

$$A^0 = \frac{q_0 h}{3} + \frac{p_0}{h} = \lambda$$

$$A^N = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \lambda + \beta p_0 \end{pmatrix}$$

les matrices élémentaires "dispatchées" donnent :

$$\tilde{A}_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{matrix} \lambda & \mu \\ \mu & \lambda \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N-1 \geq e \geq 1$$

$$\tilde{A}_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{A}_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{matrix} \lambda & \mu \\ \mu & \lambda + \beta p_0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

b) calcul de la matrice élémentaire Be

On a les mêmes techniques.

$$\forall e, i \qquad b_i^e = \int_{\Omega_e} f \varphi_i + \alpha p(1) \varphi_i(1)$$

$$\simeq \frac{h}{2}\Big((f\varphi_i)(eh) + (f\varphi_i)((e+1)h) \Big) + \alpha p(1)\varphi_i(1)$$

(intégration : trapèze)

ainsi

$$B^e = \frac{h}{2}\begin{pmatrix} f_e \\ f_{e+1} \end{pmatrix} \qquad e \in [1, N-1]$$

$$B^0 = \frac{h}{2} f_0$$

$$B^N = \frac{h}{2}\begin{pmatrix} f_N \\ f_{N+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha p_0 \end{pmatrix}$$

Les matrices élémentaires dispatchées donnent :

$$\tilde{B}^e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{h}{2}\begin{pmatrix} f_e \\ f_{e+1} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}^0 = \begin{pmatrix} \frac{h}{2} f_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}^N = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{h}{2} f_N \\ \frac{h}{2} f_{N+1} + \alpha p_0 \end{pmatrix}$$

Il n'y a plus qu'à sommer toutes ces matrices pour obtenir A & B.

./..

9.37 à 9.39

c) Assemblage

$$A = \begin{pmatrix} d+d & \mu & & & & \\ \mu & d+d & \mu & & & \\ & \mu & d+d & \ddots & & \\ & & \ddots & d+d & \mu & 0 \\ & & & \mu & d+d & \mu \\ & & & 0 & \mu & d+\beta p_0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{h}{2} f_0 + \frac{h}{2} f_0 \\ \frac{h}{2} f_1 + \frac{h}{2} f_1 \\ \vdots \\ h f_N \\ \frac{h}{2} f_{N+1} + \alpha p_0 \end{pmatrix}$$

III) Etude d'un exemple bidimensionnel

1°) Rappels : green, Minimisation, Sobolev

a) Minimisation

Donnons un résultat qui permet de considérer la résolution de

$u \in V / \forall v \in V \quad a(u,v) = b(v)$.

(V Hilbert...)

où a est bilinéaire, coercitive, C^0 et Symétrique

Avec les Hypothèses du th de Lax Milgram, en supposant de plus que a est SYM, on a équivalence entre :

i) $u \in V / \forall v \in V \quad a(u,v) = b(v)$

ii) $u \in V / J(u) = \underset{v \in V}{\operatorname{Min}} J(v)$

où J est la fonctionnelle quadratique définie par :

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - b(v).$$

ainsi J représente une énergie potentielle pour des champs admissibles (cf Lexique de Mécanique...)

b) Sobolev _ Poincaré

On généralise les Sobolev construits en monodimensionnel.

Déf 8 $H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \,/\, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \in L^2(\Omega) \right\}$

Ω étant un ouvert de $\mathbb{R}^2$

On munit $H^1(\Omega)$ d'une structure Hilbertienne, en posant

$$\forall u, v \in H^1(\Omega) \qquad \langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \qquad (23)$$

Il nous faut aussi définir pour $u \in H^1(\Omega)$, sa valeur au bord.
En dimension 2, on n'a plus l'injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$. Aussi

On admet qu'il existe une application linéaire " γ_0 de $H^1(\Omega)$
vers un sous espace des fonctions de $\Gamma = \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
(définie pour Ω de frontière " assez régulière ").

Il nous faudra des applications " nulles au bord " de Ω, au sens de γ_0
linéaire. On admet que

Déf - Prop 9

On pose $H_0^1(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega) / v_{|\Gamma} = 0 \}$ (24)

Alors $H_0^1(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

On peut munir $H_0^1(\Omega)$ d'une structure Hilbertienne. En effet on admet :

Prop 10 : inégalité de Poincaré

Si Ω est borné, il existe $C = C(\Omega) > 0$ telle que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\sum_{i=1}^{2} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} \qquad (25)$$

On peut dans ce cas le..

Th 11 : Si Ω est borné, on considère la semi norme

$$|v|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^{2} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} \qquad (26)$$

Alors $|\cdot|_{1,\Omega}$ est norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ (définie en (23))

Démonstration

Il suffit de démontrer que : $\exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ /

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad C_1 \|v\|_{1,\Omega} \leq |v|_{1,\Omega} \leq C_2 \|v\|_{1,\Omega}$$

où, selon (23) $\|v\|_{1,\Omega} = \|v\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega v^2 + \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 \right)^{1/2}$

$$= \left(\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{2} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}$$

trivialement on a

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad |v|_{1,\Omega}^2 = \sum_{i=1}^{2} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^{2} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$= \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$$

Prenons alors $C_2 = 1$.

Réciproquement, on a par définition:

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^{2} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

cf Poincaré

$$= \sum_{i=1}^{2} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + C^2 \sum_{i=1}^{2} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$= (1 + C^2)\, |v|_{1,\Omega}^2$$

On prend ainsi $C_1 = \sqrt{\frac{1}{1+C^2}}$ $\square$

On est maintenant en mesure d'étudier une edp sur Ω, un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
On considèrera un exemple simple: Le problème du Laplacien avec des C.L de type Dirichlet.

2) EDP considérée

Pour toute la suite, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$
$f \in L^2(\Omega)$. On cherche

$$u \,/\, \left.\begin{array}{ll} \text{p.p sur } \Omega & -\Delta u = f \\ \text{sur } \Gamma = \partial\Omega & u = 0 \end{array}\right\} \quad (P)$$

2.) Formulation variationnelle

a) CN

En supposant u suffisamment régulière, on multiplie par $v \in H^1(\Omega)$ et on intègre :

ainsi $\displaystyle\int_\Omega (-\Delta u) . v = \int_\Omega f v$

on fait une "intégrale" par partie qui est donnée par :

Prop 12 FORMULE de Green :

$\forall u \in H^2(\Omega)$, $\forall v \in H^1(\Omega)$

$$-\int_\Omega \Delta u \, v = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} . v \, d\sigma \qquad (27)$$

où $\frac{\partial}{\partial \nu}$ est la dérivée normale sur Γ :

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = \vec{\nu} . \vec{\mathrm{grad}} .$$

$d\sigma$ est la mesure de Lebesgue sur Γ.

(en toute rigueur $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial \nu}$ " trace de " $u \in H^{2-3/2}(\Omega) = H^{1/2}(\Omega)$

$v \in H^{1/2}(\Gamma)$)

Reprenons la F.V. selon Green :

$$\forall v \in H^1(\Omega) \qquad +\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}.v\,d\sigma = \int_\Omega f v$$

on considère dans la CL $u=0$ que l'on incorpore dans l'Hilbert V.

On pose $V = H_0^1(\Omega)$

$$= \{ v \in H^1(\Omega) / \text{"} v_{|\Gamma} = 0 \text{"} \}$$

ainsi $\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}.v\,d\sigma = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}.\, 0\, d\sigma = 0$ si on impose $\underline{v \in V}$

on cherche donc $u \in H_0^1(\Omega)/$

$\forall v \in H_0^1(\Omega) = V \qquad a(u,v) = b(v)$

où

$$\boxed{\begin{aligned} a(u,v) &= \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} = \int_\Omega \vec{\nabla} u . \vec{\nabla} v \\ b(v) &= \int_\Omega f v \end{aligned}}$$

On s'intéresse au

Problème (φ)

on cherche $u \in H_0^1(\Omega) / \forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$a(u,v) = b(v)$$

ici on admet que $H_0^1(\Omega)$ est fermé (par la structure de H^1)

$V = H_0^1(\Omega)$, muni de la structure Hilbertienne de $H^1(\Omega)$ est donc un Hilbert.

Pour pouvoir appliquer le théorème de Lax Milgram, Etudions la forme bilinéaire a, la forme linéaire b.

Etude de b

b est C^0 car $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ $|b(v)| \leq |\int_\Omega f v|$

$\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$

$\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$

Etude de a

a est C^0 car $\forall u, v \in H_0^1(\Omega)$ $|a(u,v)|$

$\leq \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|$

$\leq$

$\leq \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2\right)^{1/2} \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2\right)^{1/2} (\ldots)$

$\leq \|u\|_V \|v\|_V$

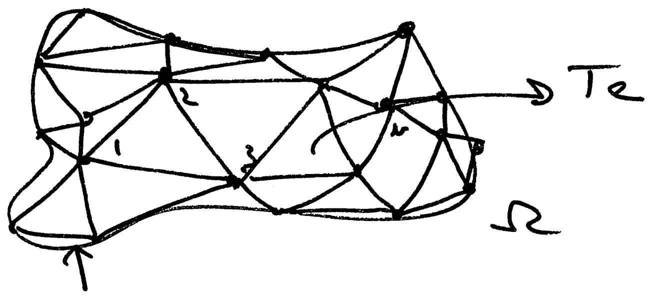
a est coercive car $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$a(v,v) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2$$

$$= |v|_{1,\Omega}^2 \geq C_1^2 \|v\|_{1,\Omega}^2 \qquad (Th\ 11)$$

3) Approximation interne, assemblage

On considère un maillage de Ω en TRIANGLE. (selon règle...)

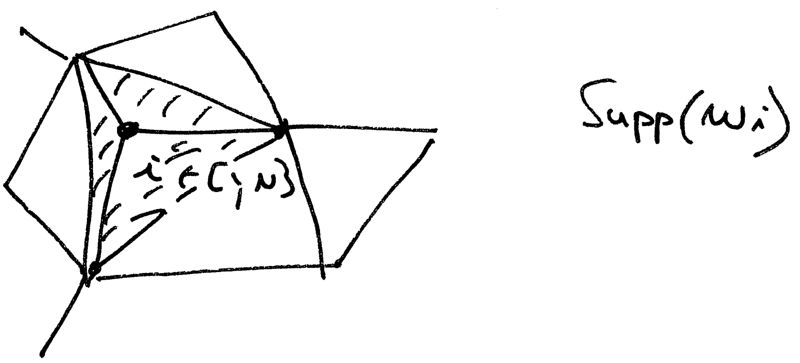


On suppose numérotés en premier de 1 à N, les nœuds à l'intérieur (ceux de $\partial\Omega = \Gamma$ ont une valeur connue).

On cherche des fonctions linéaires par morceaux sur chaque triangle :

$$V_h = \left\{ v \in C^0(\bar{\Omega}) \,/\, \forall e \in [1, M] \quad v_{|T_e} \in P_1 \,,\; v_{|\partial\Omega} = 0 \right\} \quad (28)$$

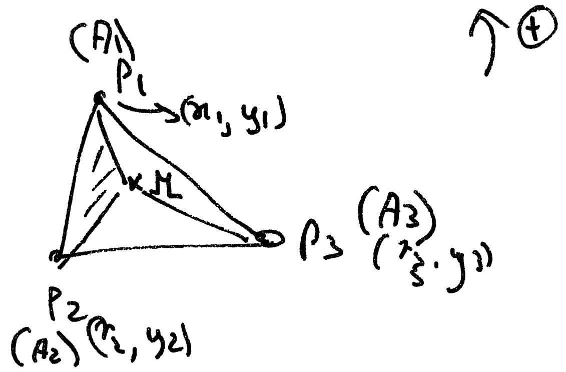
On considère la base duale des ddl :



$$\forall i \in [1, N] \quad w_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (29)$$

Les w_i forment une base ssi pr chaque triangle, les 3 pts ne sont pas alignés.

Si on est strict dans 1, 2, 3 numérotation locale :



$\exists!\ (p_1, p_2, p_3)$ linéaire sur ... / $p_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}$

Les p_i sont là simplement les coordonnées barycentriques de M

qui se calculent grâce aux aires :

$$p_1 \overrightarrow{MA_1} + p_2 \overrightarrow{MA_2} + p_3 \overrightarrow{MA_3} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad p_1 \overrightarrow{MA_1} \wedge \overrightarrow{MA_2} + p_3 \overrightarrow{MA_3} \wedge \overrightarrow{MA_2} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p_1}{p_3} = - \frac{(\overrightarrow{MA_1} \wedge \overrightarrow{MA_2}) \cdot \vec{k}}{(\overrightarrow{MA_2} \wedge \overrightarrow{MA_3}) \cdot \vec{k}}$$ où $\vec{k}$ 3e vect orth.

ainsi en notant : division par $|T| = $ aire$(A_1 A_2 A_3)$ ....

Ouverture et l'affaire est jouée....

E9 Exercices sur la MEF

Exercice 1

F.V de Dirichlet en monodimensionnel.

Soit $f \in L^2(\Omega)$. On cherche $u : \Omega =]0,1[\to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} u(0) = u(1) = 0 \\ \text{sur } \Omega \quad -u'' = f \end{cases}$$

corrigé

- on cherche $u \in H_0^1(\Omega)$ / pp sur Ω $\quad -u'' = f \quad$ (car $f \in L^2(\Omega)$)
  (au sens $\mathcal{D}'(\Omega)$.)

où on rappelle que $H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$, muni

du produit scalaire usuel de $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

On a aussi $H_0^1(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega) / v(0) = v(1) = 0 \}$

où $v(0)$ et $v(1)$ sont les valeurs de v — au sens des "traces"

— ponctuelles car $H^1(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$

ainsi on a nécessairement

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad -u'' v = f v \qquad (u'' \in L^2 \Rightarrow u \in H^2)$$

$$\Rightarrow -\int_\Omega u'' v = \int_\Omega f v$$

$$\Rightarrow +\int_\Omega u' v' + \cancel{[u' v]_0^1} = \int_\Omega f v$$

- ainsi on cherche $\left| \begin{array}{l} u \in V = H_0^1(\Omega) / \\ \forall v \in V \qquad a(u,v) = b(v) \\ \text{où} \quad a(u,v) = \int_\Omega u' v' \\ \qquad b(v) = \int_\Omega f v \end{array} \right.$

l'espace de Hilbert V est muni du produit scalaire de $H^1(\Omega)$.

<u>étude V</u> D'après ce que l'on vient de dire $H_0^1(\Omega)$ muni de $\langle \cdot \rangle_{H^1}$ est un Hilbert.

<u>Étude de a</u>

a est continue car $\forall u, v \in H_0^1(\Omega)$

$$|a(u,v)| \leq \left|\int_\Omega u' v'\right| \leq \|u'\|_{L^2(\Omega)} \|v'\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_V \|v\|_V$$

Par la coercitivité on a besoin de l'inégalité :

Inégalité de Poincaré

(vrai si Ω est borné) si $\Omega =]0,1[$, $\exists\, C$ tq

$\forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \, \|v'\|_{L^2(\Omega)}$

Démonstration : Par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ on peut supposer

$v \in \mathcal{D}(\Omega)$. ainsi

$\forall x \in [0,1] \qquad v(x) = \int_0^x v'(t)\, dt$

et d'après CBS $\quad |v(x)|^2 = \left(\int_0^x v'(t)\, dt\right)^2 \leq \left(\int_0^x v'^2(t)\, dt\right) \cdot \left(\int_0^x 1^2 dt\right)$

$$= x \int_0^x v'^2(t)\, dt$$

$$\leq 1 \int_0^1 v'(t)^2\, dt$$

$$= \|v'\|^2_{L^2(\Omega)}$$

ainsi $\qquad \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|v'\|^2_{L^2(\Omega)}$ $\qquad \square$

ainsi $\forall\, u \in H_0^1(\Omega) \quad a(u,u) = \int_0^1 u'^2(t)\, dt = \|u'\|_{L^2(\Omega)}$

ainsi $\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u'\|^2_{L^2(\Omega)}$

$$\leq C^2 \|u'\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u'\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$= (1 + C^2)\, a(u,u)$$

d'où $\quad a(u,u) \geq \dfrac{1}{1+C^2} \|u\|_{H^1(\Omega)} = \dfrac{1}{1+C^2} \|u\|_V$

<u>Etude de b.</u>

D'après CBS $\quad \forall v \in H_0^1(\Omega) = V$

$$|b(v)| = |\langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)}| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$

$$\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$= \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_V$$

<u>Remarque</u> on peut aussi considérer

$V = H_0^1(\Omega)$ muni de $\langle u, v\rangle = \int_\Omega u'v'$ qui est bien produit scalaire.

(norme équivalente à celle de H^1 car Poincaré $\frac{1}{1+C^2}\|u\|^2_{H^1} \leq \|u\|_V \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}$)

De plus $|a(u,v)| = |\langle u, v\rangle|_V$ ok.

et $\quad |b(v)| = \left|\int_\Omega f v\right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$

$$\leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v'\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{(Poincaré)}$$

$= C\|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_V$

- Retour à la formulation forte. $u \in H_0^1(\Omega)$

on a $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ $\displaystyle\int_\Omega u'v' = \int_\Omega f v$

$u \in H_0^1(\Omega) \subset \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \Rightarrow \underline{u(0) = u(1) = 0}$

et on a $\langle u', v' \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \langle f, v \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) : \mathcal{D}(\Omega)}$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$. En particulier $\forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle u', v' \rangle = \langle f, v \rangle$$

$$\Rightarrow \langle -u'', v \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) : \mathcal{D}(\Omega)} = \langle f, v \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) : \mathcal{D}(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \langle -u'' + f ; v \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) : \mathcal{D}(\Omega)}$$

ainsi au sens des distributions $\underline{-u'' = f}$

or $f \in L^2(\Omega)$ et $u, u' \in L^2(\Omega) \Rightarrow \underline{u \in H^2(\Omega)}$ et l'égalité a lieu

p.p sur Ω.

Exercice 2

F.V de Neumann en Mono D.

(E 9.8)

Soit $f \in L^2(\Omega)$

On cherche $u :]0,1[= \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ /

$$\begin{cases} u'(0) = u'(1) = 0 \\ \text{sur } \Omega \quad -u'' + u = f \end{cases}$$

<u>Corrigé</u>

Si u est suffisament régulière

$$\forall v \in H^1(\Omega) \quad \int_\Omega -u''v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv$$

$$\Rightarrow \int_\Omega u'v' + uv - \cancel{[u'v]_0^1} = \int_\Omega fv$$

car $u'(0) = u'(1) = 0$

ainsi | on cherche $u \in V = H^1(\Omega)$ (muni du produit usuel) /
| $\forall v \in H^1(\Omega) \quad a(u,v) = b(v)$

où | $a(u,v) = \int_\Omega uv + u'v'$
| $b(v) = \int_\Omega fv$

ici on peut utiliser Lax Milgram; on peut aussi directement utiliser le th. de Riesz car a est égal au produit scalaire.

$b \in V'$ car $\forall v \in V \quad |b(v)| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$
$$\leq \|f\|_{L^2} \|v\|_V$$

ainsi $\exists ! u \in V = H^1(\Omega) / \forall v \in H^1(\Omega)$
$$\langle u . v \rangle_{H^1(\Omega)} = a(u, v) = b(v).$$

- Retour à la f. forte.

on a $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ d'où $\forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle u', v' \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) : \mathcal{D}(\Omega)} + \langle u, v \rangle_{\mathcal{D}' : \mathcal{D}} = \langle f, v \rangle_{\mathcal{D}' : \mathcal{D}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle -u'' + u - f ; v \rangle_{\mathcal{D}' : \mathcal{D}} = 0$$

ainsi ds $\mathcal{D}'(\Omega)$ $\quad -u'' + u = f$

or $\quad -u'' = f - u \in L^2 \Rightarrow \underline{u \in H^2(\Omega)}$

ainsi on recommence :

$$\forall v \in H^1(\Omega) \quad + \int_\Omega u'v' + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv$$

Green
$$\int_\Omega \underbrace{(-u'' + u - f)}_{=0} v + [u'v]_0^1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad u'(1)\,v(1) - u'(0)\,v(0) = 0$$

Prenons $v = t \longrightarrow \quad u'(1) = 0$

$v = 1 \longrightarrow \quad u'(0) = 0.$

On cherche donc $u \in H^1(\Omega)$ (ou $H^2(\Omega)$) //

pp sur Ω ou ds $\mathcal{D}'(\Omega)$ $\quad -u'' + u = f$

$u'(0) = u'(1) = 0.$

<u>Rque</u> La condition au limite de Neumann est naturellement "codée" ds la FV.

$u \in H^2(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \longrightarrow u'(0)$ et $u'(1)$ ont 1 sens ponctuel.

Exercice 3 (E 9.9)

Écrire la FV de

chercher $u : \Omega =]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ /

$$\begin{cases} \text{ds } \Omega \quad \dfrac{d^4 u}{dx^4} + u = f \\ u(0) = u(1) = 0 \\ \dfrac{d^2 u}{dx^2}(0) = \dfrac{d^2 u}{dx^2}(1) = 0 \end{cases}$$

Corrigé

on suppose $u \in C^4(\bar{\Omega})$ assez régulière.

Si $v \in C^4(\bar{\Omega})$, on a.

$$\int_\Omega u^{(4)} v + \int_\Omega u v = \int_\Omega f v$$

$$\Rightarrow -\int_\Omega u^{(3)} v' + [u^{(3)} v]_0^1 + \int_\Omega u v = \int_\Omega f v$$

$$\Rightarrow \int_\Omega u^{(2)} v^{(2)} + u v + \left(u^{(3)}(1) v(1) - u^{(3)}(0) v(0)\right)$$
$$- \left(\frac{d^2 u(1)}{dx^2} v'(1) - \frac{d^2 u(0)}{dx^2} v'(0)\right) = \int_\Omega f v$$

E9.10

On choisit d'incorporer les CL dans les espaces :

$u(0)=u(1)=v(0)=v(1)=0$ ainsi compte tenu de $u^{(2)}(0)=u^{(2)}(1)=0$

$$\int_\Omega u''v'' + uv = \int_\Omega fv$$

un minimum de régularité est requis pour $u, v \in H^2(\Omega)$.

et il faut $u(0)=v(0)=u(1)=v(1)=0 \Rightarrow u, v \in H_0^1(\Omega)$.

On cherche $u \in V = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ /

$\forall v \in V \quad a(u,v) = b(v)$

où $\forall u, v \in V^2 \quad a(u,v) = \int_\Omega uv + u''v''$

$$b(v) = \int_\Omega fv$$

• dans a ne figure pas de terme dérivé 1 fois ainsi on pose

$$\boxed{\|v\|_V = \left(\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v''\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}}$$

$$\left(\langle u, v \rangle_V = \int_\Omega uv + u''v'' = a(u,v) \right)$$

E 9.11

Montrons que $\|\cdot\|_V$ est une norme équivalente à la norme usuelle de $H^2(\Omega)$

$$\left(\|v\|_{2,\Omega} = \left(\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v'\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v''\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} \right)$$

pour laquelle $H^2(\Omega)$ est un Hilbert.

on a $$\int_0^1 v'^2(s)\,ds = \left[v\, v' \right]_0^1 - \int_0^1 v(\alpha)\, v''(\alpha)\, d\alpha$$

$$= \cancel{v(1)\, v'(1) - v(0)\, v'(0)} - \int_0^1 v(\alpha)\, v''(\alpha)\, d\alpha$$

car $v \in V \supset H_0^1(\Omega)$

ainsi d'après CBS

$$\forall v \in V \qquad \|v'\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{L^2(0,1)} \|v''\|_{L^2(0,1)}$$

$$\leq \frac{1}{2} \left(\|v\|^2_{L^2(0,1)} + \|v''\|^2_{L^2(0,1)} \right)$$

(car $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$)

ainsi $\forall v \in V$

$$\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v''\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|^2_{H^2(\Omega)} \leq \frac{3}{2} \left(\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v''\|^2_{L^2(\Omega)} \right)$$

ie :

$$\boxed{\forall v \in V \qquad \|v\|_V \leq \|v\|_{H^2(\Omega)} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}\, \|v\|_V}$$

Et les deux normes sont donc équivalentes.

Ici on peut donc appliquer directement le th de Riesz car

$$a = \langle \cdot , \cdot \rangle_V .$$

et $\forall v \in V \quad |b(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_V .$

d'où $\underline{b \in V'}$.

<u>Il y a donc existence et unicité de $u \in V = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ vérifiant la F.V</u>

- Retour à la f. forte.

on a $u \in V \supset H_0^1(\Omega) \Rightarrow \underline{u(0) = u(1) = 0}$

de plus $\mathcal{D}(\Omega) \subset V$ d'où $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle u'', \varphi'' \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) : \mathcal{D}(\Omega)} + \langle u, v \rangle_{\mathcal{D}' : \mathcal{D}} = \langle f, v \rangle_{\mathcal{D}' : \mathcal{D}}$$

$$\Rightarrow \quad \langle u'''' + u - f , \varphi \rangle_{\mathcal{D}' : \mathcal{D}} = 0$$

d'où <u>dans $\mathcal{D}'(\Omega)$</u> $\quad \underline{u^{(4)} + u = f.}$

$$\Rightarrow \quad u^{(4)} = f - u$$

ainsi $u \in H^2(\Omega)$ et $u^{(4)} \in L^2(\Omega)$ d'où

$$\underline{u \in H^4(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^3(\bar{\Omega})}$$

et <u>l'égalité dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ a aussi lieu p.p. sur Ω.</u>